● Bernoulli Numbers

Bernoulli Numbersを考察しましょう。Bernoulli NumbersのBernoulliは、あの有名な数学一家の一人、Jacob Bernoulli (1654-1705)です。僕がBernoulli Numbersの勉強(Study)をする切掛となったのは、3角関数の級数展開でも、RiemannのZeta Function $\zeta(s)$でもありません。次の定積分です。

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\,dx = \frac{\pi^4}{15} \qquad \text{呈示(248)}$$

この積分、またこの積分に限らずにこれに類した定積分は、物理学ではよく現われるのです。(248)は後で(当節でとは限りませんが)、もっと一般化した(Parameterを含む)定積分として解く予定です。

Bernoulli Numbersの定義は幾つかありますが、ここでは指数型母関数を用いて定義することにしましょう。天下り的だと思われるかも知れませんが、とてもSimpleかつUsefulだからです。

Bernoulli Numbers B_n の定義

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n=0}^\infty B_n \frac{x^n}{n!} \qquad \text{定義(249)}$$

これより直ちに、B_nの初期値B_0と差分公式を得ることが出来ます。実際、(249)の両辺に左辺の逆数を掛け、さらにe^xを

 4月9日(土) Bernoulli Numbers（続き）

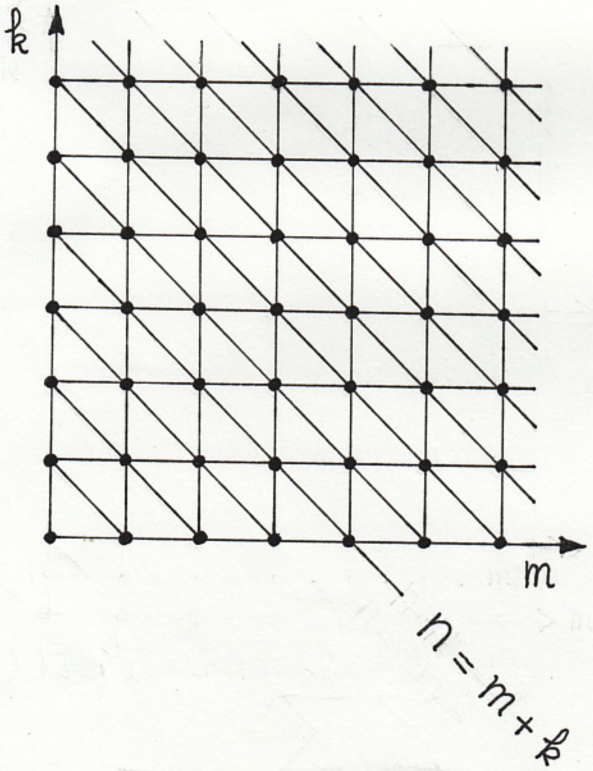
級数展開すれば

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$$

$$1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{(m+1)!\,k!} x^{m+k} \qquad \text{(W1)}$$

ここで、2重和 $\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}$ は、下記の格子点の絵に注意すれば



$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}$$

fig.311

次のように変換することが出来ます。

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{(n+1-k)!\,k!} \right) x^n \qquad \text{(W2)}$$

4月10日(日) Bernoulli Numbers (続き)

(W2)は任意の複素数xに対して成り立つ恒等式です。両辺のxの0次の係数は等しく、それは1です。従って

$$B_0 = 1 \tag{W3}$$

両辺のxの1次以上の係数もそれぞれ等しく、それは0です。従って

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{(n+1-k)!\,k!} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

この式の両辺に$(n+1)!$を掛ければ2項係数で表現できて

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{W4}$$

(W3), (W4)を定理として再記しておきます。

Bernoulli Numbers B_n の初期値と差分恒等式

$$B_0 = 1 \qquad .1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad .2)$$

定理(250)

(250)を用いれば、(原理的には) $B_1, B_2, B_3, B_4, \cdots$ を望むだけ計算できます。初めの幾つかのB_nを計算してみましょう。

$$\binom{2}{0} B_0 + \binom{2}{1} B_1 = 0$$

【P687】 Bernoulli Numbers（続き）

$$B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1 + \binom{3}{2}B_2 = 0$$

$$1 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3B_2 = 0$$

$$B_2 = \frac{1}{6}$$

$$\binom{4}{0}B_0 + \binom{4}{1}B_1 + \binom{4}{2}B_2 + \binom{4}{3}B_3 = 0$$

$$1 + 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 6\frac{1}{6} + 4B_3 = 0$$

$$B_3 = 0$$

以下 計算過程は省略します。結果は

$B_0 = 1$	$B_1 = -\frac{1}{2}$
$B_2 = \frac{1}{6}$	$B_3 = 0$
$B_4 = -\frac{1}{30}$	$B_5 = 0$
$B_6 = \frac{1}{42}$	$B_7 = 0$
$B_8 = -\frac{1}{30}$	$B_9 = 0$
$B_{10} = \frac{5}{66}$	$B_{11} = 0$
$B_{12} = -\frac{691}{2730}$	$B_{13} = 0$
$B_{14} = \frac{7}{6}$	$B_{15} = 0$

fig.312

【P688】Bernoulli Numbers（続き）

fig.312から下記が成り立つと推測（Conjecture）されます。

B_{2m+1}の値

$$B_1 = -\frac{1}{2} \qquad .1)$$

$$B_{2m+1} = 0 \ , \quad (m = 1, 2, 3, 4, \cdots) \qquad .2)$$

定理(251)

.2)を証明します。Bernoulli Numbersの定義式(249)の左辺の母関数から$B_1 x$を引いた関数を$g(x)$とします。

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

$g(x)$が偶関数であることを示せば .2)を証明したことになります。

$$g(-x) = \frac{-x}{2} \cdot \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = -\frac{x}{2} \cdot \frac{1 + e^x}{1 - e^x} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}}$$

$$= \frac{x}{2} \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = g(x) \ _{//} \qquad \text{Q.E.D.}$$

(251)より(249)は次のようにも表わされます。

B_{2m}の母関数表現

$$\frac{x}{e^x - 1} = -\frac{x}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \qquad \text{定理(252)}$$

(252)において、$x \to 2ix$, あるいは $x \to -2ix$ とすれば

$$\frac{2ix}{e^{2ix}-1} = -\frac{2ix}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m} \frac{(2ix)^{2m}}{(2m)!} \quad .1)$$

$$\frac{-2ix}{e^{-2ix}-1} = -\frac{-2ix}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m} \frac{(-2ix)^{2m}}{(2m)!} \quad \text{(W5.2)}$$

次式が成り立ちます。

B_{2m} と $x\cot x$

$$x\cot x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m B_{2m} \frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}, \quad -\pi < x < \pi \qquad \text{定理(253)}$$

証明します。(W5)を用います。

$$x\cot x = x\frac{\cos x}{\sin x} = x\cdot\frac{\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}{\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})}$$

$$= ix\cdot\frac{e^{ix}}{e^{ix}-e^{-ix}} + ix\cdot\frac{e^{-ix}}{e^{ix}-e^{-ix}}$$

$$= \frac{ix}{1-e^{-2ix}} + \frac{ix}{e^{2ix}-1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-2ix}{e^{-2ix}-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2ix}{e^{2ix}-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{-2ix}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m}\frac{(-2ix)^{2m}}{(2m)!}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{2ix}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m}\frac{(2ix)^{2m}}{(2m)!}\right) \quad \text{〃} \quad \text{Q.E.D.}$$

次式が成り立ちます。

B_{2m} と2項係数（その1）

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}2^{2k}B_{2k}=2m+1,\quad (m=0,1,2,\cdots)\qquad \text{定理(254)}$$

証明します。(253)を変形して

$$\cos x=\frac{\sin x}{x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B_{2k}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B_{2k}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+k}}{(2m+1)!(2k)!}B_{2k}2^{2k}x^{2m+2k}$$

ここで、fig.311で説明したように、2重和に関するDummyIndexの変換 $n=m+k$ を実行すれば

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{2k}B_{2k}}{(2n+1-2k)!(2k)!}\right)(-1)^n x^{2n}\qquad \text{(W6)}$$

一方

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad \text{(W7)}$$

(W6)の右辺の x^{2n} の係数と(W7)の右辺の x^{2n} の係数は等しいから

【P691】 Bernoulli Numbers （続き）

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2n+1-2k)!\,(2k)!} = \frac{1}{(2n)!}, \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

両辺に $(2n+1)!$ を掛ければ (254) が得られます。 Q.E.D.

次式が成り立ちます。

3角関数に関するささやかな恒等式

$$\tan x = \cot x - 2\cot 2x \qquad .1)$$

$$\frac{1}{\sin x} = \cot\frac{x}{2} - \cot x \qquad .2)$$

定理(255)

証明します。

$$2\cot 2x = 2\,\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \sin x}$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \cot x - \tan x \,/\!/$$

$$\frac{1}{\sin x} + \cot x = \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} + \frac{2\cos^2\frac{x}{2} - 1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}\left(1 + 2\cos^2\frac{x}{2} - 1\right)$$

$$= \cot\frac{x}{2} \,/\!/$$

Q.E.D.

次式が成り立ちます。

B_{2m} と $x\tan x$

$$x\tan x = \sum_{m=1}^{\infty}(1-2^{2m})(-1)^m B_{2m}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}, \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

定理(256)

証明します。(255.1), (253)を用います。

$$\begin{aligned} x\tan x &= x\cot x - 2x\cot 2x \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m B_{2m}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!} - \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m B_{2m}\frac{(4x)^{2m}}{(2m)!} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}(1-2^{2m})(-1)^m B_{2m}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!} \end{aligned}$$

〃 Q.E.D.

次式が成り立ちます。

B_{2m} と2項係数(その2)

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{2m}{2k}2^{2k}(1-2^{2k})B_{2k} = -2m, \quad (m=1,2,3,\cdots)$$

定理(257)

証明します。(256)を変形して

【P693】 Bernoulli Numbers（続き）

$$x\sin x = \cos x \sum_{k=1}^{\infty}(1-2^{2k})(-1)^k B_{2k}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}\sum_{k=1}^{\infty}(1-2^{2k})(-1)^k B_{2k}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k}(1-2^{2k})}{(2m)!(2k)!}B_{2k}(-1)^{m+k}x^{2(m+k)}$$

$$x\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}(1-2^{2k})}{(2n-2k)!(2k)!}B_{2k}\right)(-1)^n x^{2n} \qquad \text{(W8)}$$

一方

$$x\sin x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n} \qquad \text{(W9)}$$

(W8)の右辺のx^{2n}の係数と(W9)の右辺のx^{2n}の係数は等しいので

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2k}(1-2^{2k})}{(2n-2k)!(2k)!}B_{2k} = \frac{-1}{(2n-1)!}, \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

この式の両辺に$(2n)!$を掛ければ(257)が得られます。

次式が成り立ちます。

B_{2m} と $\dfrac{x}{\sin x}$

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(1-2^{2m-1})(-1)^m B_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}, \quad -\pi < x < \pi$$

定理(258)

証明します。(255.2), (253)を用います。

$$\frac{x}{\sin x} = 2\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} - x\cot x$$

$$= 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m B_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!} - \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m B_{2m}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}(2-2^{2m})(-1)^m B_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$= 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(1-2^{2m-1})(-1)^m B_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!} \quad // \quad \text{Q.E.D.}$$

$x\tan x$の展開式(256)と$x\cot x$の展開式(253)のx^{2m}の係数を見比べると、違いは因子$(1-2^{2m})$の有無だけです。

次式が成り立ちます。

$(1-2^{2m})B_{2m}$の母関数表現

$$\frac{x}{e^x+1} = \frac{x}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(1-2^{2m})B_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!} \qquad \text{定理(259)}$$

証明します。(252)を用います。

$$\frac{x}{e^x+1} = \frac{x}{e^x-1} - \frac{2x}{e^{2x}-1}$$

$$= \left(-\frac{x}{2} + \sum_{m=0}^{\infty}B_{2m}\frac{x^{2m}}{(2m)!}\right) - \left(-x + \sum_{m=0}^{\infty}B_{2m}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!}\right)$$

Q.E.D.

【P695】4月15日(金) Bernoulli Numbers（続き）

B_{2m}の母関数表現(252)から直接$x\cot x$の級数表現(253)が得られたのと同様に、$(1-2^{2m})B_{2m}$の母関数表現(259)から直接$x\tan x$の級数表現(256)が得られます。やってみましょう。

$$x\tan x = x\frac{\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})}{\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}$$

$$= -ix\frac{e^{ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} + ix\frac{e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-2ix}{e^{-2ix}+1} + \frac{1}{2}\frac{2ix}{e^{2ix}+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-2ix}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(1-2^{2m})B_{2m}\frac{(-2ix)^{2m}}{(2m)!}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2ix}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(1-2^{2m})B_{2m}\frac{(2ix)^{2m}}{(2m)!}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}(1-2^{2m})(-1)^m B_{2m}\frac{(2x)^{2m}}{(2m)!} \quad //$$

ほとんど同じ計算Algorithmが幾度も繰返し用いられました。まるで馬鹿の1つ覚えを実践し(Practice)ていると思わされる程です。まあ、その通りだとも云えす。でも、何故なのでしょうか？

何か理由があるとするならば、それはある同じ数学的構造に起因しているはずです。そしてその数学的構造は、1つ、あるいは幾つかの複素関数に帰着させることが出来るのかも知れません。でもそのような関数はまだ見えて来ていません。

先出しになりますが、実は次のような関数たちが関与しているのです。

Zeta Function たちの定義

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad , \quad \Re(z) > 1 \qquad .1)$$

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} \quad , \quad \Re(z) > 0 \qquad .2)$$

$$\xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^z} \quad , \quad \Re(z) > 1 \qquad .3)$$

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^z} \quad , \quad \Re(z) > 0 \qquad .4)$$

定義(260)

これらの複素関数はそれぞれ次のように呼ばれています。

$\zeta(z)$: Rieman Zeta Function
$\varphi(z)$: Alternating Zeta Function
$\xi(z)$: ? Zeta Function?
$\psi(z)$: Catalan Zeta Function

これらの関数たちと Bernoulli Numbers B_{2m} などとを関連付けるのに重要な働きをするのは、誰でも知っている次の等式です。

$$\frac{1}{1-r} = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots \quad ; \quad |r| < 1$$

【P697】4月16日（土）Bernoulli Numbers（続き）

f(x)を次のようにおきます。

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

（211.1）より

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

（240.2）より

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\frac{2x}{k^2\pi^2}}{1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}}$$

$$x\frac{f'(x)}{f(x)} = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{k^2\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^m,\quad -\pi < x < \pi$$

$$= -2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^m$$

$$= -2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}\right)\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2m}$$

$\zeta(z)$の定義（260.1）より

$$x\frac{f'(x)}{f(x)} = -2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}}x^{2m},\quad -\pi < x < \pi \qquad \text{(W10)}$$

一方

【P698】Bernoulli Numbers（続き）

$$x\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x^2}{\sin x}\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{x^2}{\sin x}\left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$$

$$x\frac{f'(x)}{f(x)} = x\cot x - 1 \qquad \text{(W11)}$$

(W10), (W11) より

$\zeta(2m)$ と $x\cot x$

$$x\cot x = 1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}}x^{2m}, \quad -\pi < x < \pi$$

定理(261)

(253)と(261)を見比べましょう。両式の右辺の x^{2m} の係数は一致しますから、次式が得られます。

$\zeta(2m)$ と B_{2m}

$$\zeta(2m) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}\cdot(-1)^{m-1}B_{2m}, \quad (m = 1, 2, 3, \cdots)$$

定理(262)

B_{2m} の値は、(250)と(251)を用いるかあるいは、(254)または(256)を用いることにより、幾らでも好きなだけ求めることが出来るので、

【P699】Bernoulli Numbers （続き）

$\zeta(2m)$も好きなだけ計算することが出来ます。

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

fig.313

次式が成り立ちます。

$\varphi(z)$ と $\zeta(z)$

$$\varphi(z) = (1-2^{1-z})\zeta(z)$$

定理(263)

証明します。

$$\begin{aligned}\zeta(z) - \varphi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^z} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(1+(-1)^n)\frac{1}{n^z} \\ &= 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^z} \\ &= 2^{1-z}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^z} \\ &= 2^{1-z}\zeta(z) \quad /\!/\end{aligned}$$

Q.E.D.

次式が成り立ちます。

$$\varphi(1) = \log 2 \qquad \text{定理(264)}$$

証明します。

$$\log 2 = \Big[\log(1+x)\Big]_0^1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$= \varphi(1) \; /\!/ \qquad \text{Q.E.D.}$$

$$\varphi(1) = \log 2$$

$$\varphi(2) = \frac{1}{2}\zeta(2) \qquad \varphi(4) = \frac{7}{8}\zeta(4)$$

$$\varphi(6) = \frac{31}{32}\zeta(6) \qquad \varphi(8) = \frac{127}{128}\zeta(8)$$

$$\varphi(10) = \frac{511}{512}\zeta(10)$$

fig.314

$\varphi(z)$と$\zeta(z)$の関係(263)と、$\zeta(2m)$とB_{2m}との関係(262)から、$\varphi(2m)$とB_{2m}の関係が得られるのは自明です。そしてそれは、$\zeta(2m)$とB_{2m}の関係(262)を導びいたのとほとんど同様の計算Algorithmを用いることによっても得られます。やってみましょう。

【P701】Bernoulli Numbers（続き）

(209.1) および $\varphi(z)$ の定義 (260.2) より、$-\pi < x < \pi$ とすれば

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{\sin x} - 1 &= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^2}{x^2-(k\pi)^2} \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^2}{k^2\pi^2}(-1)\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{k^2\pi^2}} \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{x^2}{k^2\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^m \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)^m \\
&= 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{2m}}\right)\frac{x^{2m}}{\pi^{2m}} \\
&= 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(2m)}{\pi^{2m}}x^{2m}
\end{aligned}
$$

$\varphi(2m)$ と $\dfrac{x}{\sin x}$

$$
\frac{x}{\sin x} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varphi(2m)}{\pi^{2m}}x^{2m}, \quad -\pi < x < \pi
$$

定理(265)

(258) と (265) を見比べましょう。両式の右辺の x^{2m} の係数は

一致しますから、次式が得られます。

$\varphi(2m)$ と B_{2m}

$$\varphi(2m) = (1-2^{1-2m})\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}(-1)^{m-1}B_{2m}, \quad (m=1,2,3,\cdots)$$

定理(266)

(265)式の右辺の和が $m=0$ から始まると仮定すれば

$$\frac{x}{\sin x} = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\varphi(2m)}{\pi^{2m}}x^{2m} \qquad (W11)$$

となりますが

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1$$

ですから、$\varphi(0) = \frac{1}{2}$ と予想(Conjecture)されます。また、(266)式が $m=0$ の場合でも成り立つと仮定すれば

$$\varphi(0) = (1-2)\cdot\frac{1}{2}(-1)\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

やはり $\varphi(0) = \frac{1}{2}$ が得られます。これを予想として明記しておきます。

$\varphi(0)$ の値

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}$$

予想(267)

それでは $\zeta(0)$ の値はどうでしょうか？ 遡って考えることになります(失敗です)。

(261)式の右辺の和が $m=0$ から始まると仮定すれば

$$x\cot x = -2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}}x^{2m} \tag{W12}$$

となりますが

$$\lim_{x\to 0} x\cot x = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cos x = 1$$

ですから、$\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$ と予想されます。また、(262)式が $m=0$ の場合でも成り立つと仮定すれば

$$\zeta(0) = \frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

やはり $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$ が得られます。さらに、(263)式が $z=0$ の場合でも成り立つと仮定すれば

$$\varphi(0) = (1-2)\,\zeta(0) = -\zeta(0)$$

これは、$\varphi(0) = \dfrac{1}{2}$, $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$ と整合しています。一方が成り立てば他方も成り立つことを示唆しています(Suggest)。これも予想として明記しておきます。

$\zeta(0)$ の値

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \qquad \text{予想(268)}$$

【P703】 Bernoulli Numbers（続き）

次式が成り立ちます。

$\xi(z)$ と $\zeta(z)$

$$\xi(z) = (1-2^{-z})\zeta(z) \qquad \text{定理(269)}$$

証明します

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2m-1)^z} + \frac{1}{(2m)^z} \right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^z} + \frac{1}{2^z}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^z}$$

$$= \xi(z) + \frac{1}{2^z}\zeta(z) \,〃 \qquad \text{Q.E.D}$$

$$\xi(2) = \frac{3}{4}\zeta(2) \qquad \xi(4) = \frac{15}{16}\zeta(4)$$

$$\xi(6) = \frac{63}{64}\zeta(6) \qquad \xi(8) = \frac{255}{256}\zeta(8)$$

$$\xi(10) = \frac{1023}{1024}\zeta(10)$$

fig. 315

$\xi(z)$ と $\zeta(z)$ の関係と、$\zeta(2m)$ と B_{2m} の関係（262）から、$\xi(2m)$ と B_{2m} の関係が得られるのは自明です。$\varphi(2m)$ の場合と同様の

【P704】Bernoulli Numbers（続き）

計算を実践することにします。次式が成り立ちます。

$\xi(2m)$ と $x\tan x$

$$x\tan x = 2\sum_{m=1}^{\infty}\xi(2m)\frac{(2x)^{2m}}{\pi^{2m}}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

定理(270)

証明します。$f(x)$, a_k を次のようにおきます。

$$f(x) = \cos x, \quad a_k = \frac{1}{2}(2k-1)\pi, \ (k=1,2,3,\cdots)$$

(211.2)より

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a_k^2}\right)$$

これに(240.2)を適用すれば

$$x\tan x = -x\frac{f'(x)}{f(x)} = -x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\frac{2x}{a_k^2}}{1-\frac{x^2}{a_k^2}}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^2}{a_k^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{a_k^2}\right)^m, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{a_k^2}\right)^m$$

$$x\tan x = 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2m}}\right)\frac{(2x)^{2m}}{\pi^{2m}}$$

$$= 2\sum_{m=1}^{\infty}\xi(2m)\frac{(2x)^{2m}}{\pi^{2m}} \quad \text{Q.E.D.}$$

(256)と(270)を見比べましょう。両式の右辺のx^{2m}の係数は一致しますから、次式が得られます。

$\xi(2m)$とB_{2m}

$$\xi(2m) = (1-2^{-2m})\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}\cdot(-1)^{m-1}B_{2m}, \quad (m=1,2,3,\cdots)$$

定理(271)

(270)の右辺の和が$m=0$から始まると仮定すれば、左辺の$x\tan x$は$x=0$で0ですから、$\xi(0)=0$と予想されます。また、(271)式が$m=0$の場合でも成り立つとすれば、やはり$\xi(0)=0$が得られます。

さらに、(269)式が$z=0$の場合でも成り立つと仮定すれば

$$\xi(0) = (1-1)\zeta(0)$$

となりますが、$\zeta(0) = -\frac{1}{2} \neq \pm\infty$と予想されますから

$\xi(0)$の値

$$\xi(0) = 0$$

予想(272)

【P706】4月22日（金）Bernoulli Numbers（続き）

数列$\beta_0, \beta_2, \beta_4, \cdots$を指数型母関数で次のように定義します。

β_{2m}の定義

$$\frac{1}{\cos x} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m} \frac{x^{2m}}{(2m)!} \qquad \text{定義}(273)$$

β_{2m}自身ではなく、$E_{2m} = (-1)^m \beta_{2m}$なる$E_{2m}$をEuler Numbersと呼ぶそうです（Eulerは忙しい）。

β_{2m}の定義式(273)の両辺に$\cos x$を掛け$\cos x$を展開すれば

$$1 = \cos x \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \beta_{2k}}{(2m)!(2k)!} x^{2(m+k)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} \beta_{2k}}{(2n-2k)!(2k)!} \right) x^{2n}$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{2n}{2k} \beta_{2k} \right) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (W13)$$

この式の両辺のx^{2n}の係数は一致しますから、次式が得られます。

Bernoulli Numbers（続き）

β_{2n} の初期値と差分恒等式

$$\beta_0 = 1 \qquad .1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{2n}{2k} \beta_{2k} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \qquad .2)$$

定理(274)

これを用いれば、β_{2n} を順次計算することが出来ます。初めの幾つかの β_{2n} を計算してみましょう。

$$-\binom{2}{0}\beta_0 + \binom{2}{2}\beta_2 = 0, \qquad \beta_2 = 1$$

$$\binom{4}{0}\beta_0 - \binom{4}{2}\beta_2 + \binom{4}{4}\beta_4 = 0, \qquad \beta_4 = 5$$

以下計算過程は省略します。信頼できる資料によると

$\beta_0 = 1$ $\qquad$ $\beta_2 = 1$

$\beta_4 = 5$ $\qquad$ $\beta_6 = 61$

$\beta_8 = 1385$ $\qquad$ $\beta_{10} = 50521$

$\beta_{12} = 2702765$ $\qquad$ $\beta_{14} = 199360981$

$\beta_{16} = 19391512145$ $\qquad$ $\beta_{18} = 2404879675441$

fig.316

【P708】4月23日(土) Bernoulli Numbers(続き)

fig.316をじっくり観察しよう。気付きましたか? 1桁目の数字に注目すれば、1, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, 5, 1, …. です。これは偶然ではないそうです。でも、当節では論じません。余裕があれば別途考察することにしましょう。

次式が成り立ちます。

arctan x の積分表現

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x \qquad \text{定理}(275)$$

証明します。左辺の積分において $t=\tan\tau$ とおけば

$$dt = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\sin\tau}{\cos\tau}\right)d\tau$$

$$= \left(\cos\tau\cdot\frac{1}{\cos\tau} + \sin\tau\cdot\frac{-\sin\tau}{-\cos^2\tau}\right)d\tau$$

$$dt = (1+\tan^2\tau)\,d\tau$$

$$\tau = \arctan t$$

よって

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^{\arctan x} \frac{1+\tan^2\tau}{1+\tan^2\tau}\,d\tau$$

$$= \int_0^{\arctan x} 1\,d\tau = \arctan x \quad \text{Q.E.D.}$$

【P709】Bernoulli Numbers（続き）

次式が成り立ちます。

Gregory-Leibnitz Formula

$$\psi(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4} \qquad \text{定理}(276)$$

証明します。(275)を用います。

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \int_0^1 \frac{1}{1-(-t^2)}\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

$$= \psi(1) \quad // \qquad \text{Q.E.D.}$$

(276)は有名な公式ですが、πを計算するための式としては使えません。とても収束が遅いのです。でも、やはり(275)と同様の式を用いて得られるさまざまの実用的な公式が知られています。例えば

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \qquad .1)$$

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \qquad (W14.2)$$

.1)は Euler (in 1738) によるものだそうです。余談でした。

【P710】4月24日（日） Bernoulli Numbers（続き）

次式が成り立ちます。

$\psi(2m+1)$ と $\dfrac{1}{\cos x}$

$$\frac{1}{\cos x} = 2\sum_{m=0}^{\infty}\psi(2m+1)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1}x^{2m}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

定理(277)

証明します。 $a_k = \dfrac{1}{2}(2k-1)\pi$ とおきます。(209.2), (276) より

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{a_k}\cdot\frac{x^2}{x^2-a_k^2} \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^2}{a_k^3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{a_k^2}} \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^2}{a_k^3}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{a_k^2}\right)^{m}, \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{a_k^{2m+1}} \\
&= 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+1}}\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1}x^{2m} \\
&= 2\psi(1)\frac{2}{\pi} + 2\sum_{m=1}^{\infty}\psi(2m+1)\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m+1}x^{2m} \;//
\end{aligned}$$

Q.E.D.