

● Mittag-Leffler Expansion

複素関数論における重要な公式 Mittag-Leffler 展開について論じます。

Mittag-Leffler Expansion は後述予定の Weierstrass Factor Theorem の導出に不可欠です。Weierstrass Factor Theorem は三角関数や Gamma 関数に関する重要な式を提供してくれます。Gamma 関数は n 次元単位球の体積や Zeta 関数を論じるためには必須です。

複素関数論の復習も兼ねて、留数定理 (Residue Theorem) から始めましょう。但し、極は 1 位の極 (Simple Pole) だけからなる関数の Residue Theorem とします。Cauchy's Integral Theorem は既知とします。

Residue Theorem

複素関数 $f(z)$ が、単一閉曲線 C の内部に n 個の孤立した 1 位の極 (isolated first-order poles)、 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ をもつとします。また $f(z)$ は、これら以外の、 C の内部および C 上のいかなる点でも正則である (analytic) とします。次式が成り立ちます。

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n A_k \quad .1)$$

ここで A_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$) は極 a_k における $f(z)$ の留数 (Residue) と呼ばれる量で、次式で求まります。

$$A_k = \lim_{z \rightarrow a_k} f(z)(z - a_k) \quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \quad .2)$$

定理(204)

【P605】 Mittag-Leffler Expansion (続き)

証明します。 $n=1$ の場合について示せば十分です。 $a_1 = a$, $A_1 = A$ と記すことにします。 極 a を中心とする、微小半径 r の円を K とします。 下図のような単一閉曲線を考えます。

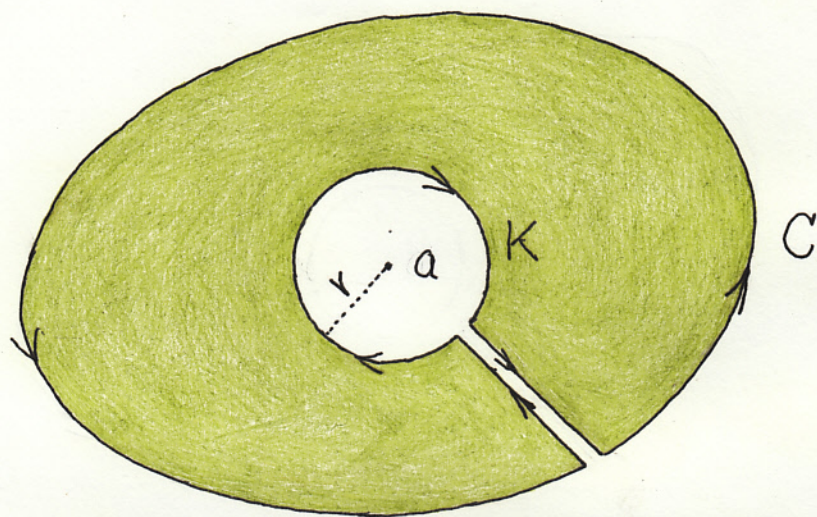


fig.285

C と K に囲まれた領域 (緑色の領域) では $f(z)$ は正則ですから Cauchy's Integral Theorem が適用できます。従って、

$$\oint_C f(z) dz + \oint_K f(z) = 0 \quad (W1)$$

また K 上の点 z 及び dz は、

$$z - a = r e^{i\theta}, \quad dz = i r e^{i\theta} d\theta = i(z - a) d\theta \quad (W2)$$

r はいくらでも小さくすることが出来ます。 (W1), (W2) より、

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= - \oint_K f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \oint_K f(z) dz \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(z) i(z - a) d\theta \end{aligned}$$

$$\oint_C f(z) dz = i \int_0^{2\pi} \left(\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z-a) \right) d\theta$$

$$= iA \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i A \quad "$$

Residue Theorem を巧妙に用いれば、次の公式を得ることが出来ます。

Mittag-Leffler Expansion

複素関数 $f(z)$ が、孤立した1位の極 $a_1, a_2, a_3, \dots$ をもつとします。 $a_k \neq 0$ ($k=1, 2, 3, \dots$) とします。 $f(z)$ はこれら以外の点では正則であるとします。また $f(z)$ は次を満たすとします。

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 0 \quad \text{注) 有り} \Rightarrow \text{P610} \quad .1)$$

このとき $f(z)$ は正則点 z において次式を満たします。

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k} \right) \quad .2)$$

ここで A_k は点 a_k における $f(z)$ の留数です。

$$A_k = \lim_{z \rightarrow a_k} f(z)(z-a_k) \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad .3)$$

定理(205)

証明します。定理自身が簡明な割にはやや長めの証明です。

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots \quad (W3)$$

【P607】 Mittag-Leffler Expansion (続き)

とします。(W3)を要請しても一般性を失いません。必要ならば並び換えて採番し直せば良いのです。

原点を中心とする円 C_n を考えます。 C_n の内部には $f(z)$ の n 個の極 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ が含まれ、 $a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots$ は C_n の外部にあるものとします。すべての正整数 n に対してこのような円 C_n を定めることが出来るとは限りません。原点からの距離が等しい2個以上の極が存在し得るからです。しかし、いくらでも大きい n に対してこのような円 C_n を定めることは可能です。 $n \rightarrow \infty$ とするとき $|a_n| \rightarrow \infty$ であることに注意しよう。何故ならば、もしそうでないとするならば、 $f(z)$ は有界の領域に無限個の極をもつことになり、従って、集積特異点をもつことになりますが、これは $f(z)$ の仮定に反します。よって、 $n \rightarrow \infty$ とするとき C_n の半径はいくらでも大きくなります。(205.2)は、 $f(z)$ が有限個の1位の極しかもたない場合でも成り立つのですが、その場合でも最後の C_n の半径をいくらでも大きくすることが出来ます。(そうします。)

円 C_n 内の正則点 z をかってに選び固定します。この固定された z に対して、複素変数 ζ の関数 $g(\zeta)$ を次式で定義します。

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \quad (W4)$$

$g(\zeta)$ は C_n の内部に1位の極 $z, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ をもちます。またこれら以外の、 C_n の内部及び C_n 上のいかなる点 ζ でも $g(\zeta)$ は正則です。よって、Residue Theorem (204) より、

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} g(\zeta) d\zeta = B_z + \sum_{k=1}^n B_k \quad (W5)$$

ここで、 B_z は $g(\zeta)$ の極 z における留数で、 B_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$) は

【P608】1月27日(木) Mittag-Leffler Expansion (続き)

$g(z)$ の極 a_k における留数です。これらの留数を計算します。

$$B_z = \lim_{z \rightarrow z} g(z)(z-z) = \lim_{z \rightarrow z} \frac{f(z)}{z-z} (z-z) = f(z)$$

$$\begin{aligned} B_k &= \lim_{z \rightarrow a_k} g(z)(z-a_k) = \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{f(z)}{z-z} (z-a_k) \\ &= \frac{1}{a_k-z} \lim_{z \rightarrow a_k} f(z)(z-a_k) \\ &= \frac{A_k}{a_k-z} \end{aligned}$$

$$B_z = f(z), \quad B_k = \frac{A_k}{a_k-z} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n) \quad (W6)$$

(W4), (W5), (W6) より,

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z-a_k} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(z)}{z-z} dz \quad (W7)$$

この式に $z=0$ を代入すると,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(z)}{z} dz = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{a_k} \quad (W8)$$

ところで,

$$\frac{1}{z-z} = \frac{1}{z} + \frac{z}{z(z-z)} \quad (W9)$$

よって、(W7) の右辺が2項の積分は,

【P609】 1月28日(金) Mittag-Leffler Expansion (続き)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(z)}{z-z} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(z)}{z} dz + \frac{z}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(z)}{z(z-z)} dz \quad (W10)$$

(W7), (W10), (W8)より,

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^n A_k \left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k} \right) + \frac{z}{2\pi i} \oint_{C_n} \frac{f(z)}{z(z-z)} dz \quad (W11)$$

これで(205.2)が見えてきましたね。後は(W11)右辺の3項の積分が0に収束すること、つまり次式を示せば(205)の証明は完了です。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{C_n} \frac{f(z)}{z(z-z)} dz = 0 \quad (W12)$$

しかしこれはほとんど自明です。 $n \rightarrow \infty$ で C_n の半径はいくらでも大きくなります。(W12)の z は C_n 上の点であり、命題の前提条件.1)より、 $|z| \rightarrow \infty$ とすると、 $f(z)/z^2$ は $1/|z|$ よりも速く0に収束するからです。確認しましょう。 C_n 上の点 z を $z = re^{i\theta}$ と表わせれば、 C_n 上の dz は $dz = ire^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ です。従って、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{C_n} \frac{f(z)}{z(z-z)} dz &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z(z-z)} iz d\theta \\ &= i \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z-z} d\theta \\ &= i \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{z}} d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Q.E.D.

【P610】 Mittag-Leffler Expansion (続き)

注)

Mittag-Leffler Expansion の前提条件 (205.1) と後述予定の Weierstras Factor Theorem の前提条件は ちょっと厳し過ぎます。証明における (205.1) の用いられ方から明らかのように、(205.1) における $|z| \rightarrow \infty$ は 次のように見做すべきです。即ち、

$z_n = r_n e^{i\theta}$ とするとき、無限大に発散するある数列 $\{r_n\}$ が存在し、この数列に対して、 **θ によらずに、**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n)}{z_n} = 0 \quad .1)$$

後述予定の Weierstras Factor Theorem の前提条件も同様で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(z_n)}{z_n f(z_n)} = 0 \quad .2)$$

と見做すべきです。

注(206)

Mittag-Leffler Expansion も、それを巧みに適用することによって得られる Weierstras Factor theorem も、三角関数ととても相性が良いと感じます。でもそれは単に、僕がこれらの応用例の Variation に関する知識が乏しいだけのことかもしれません。いずれにせよ、 $\sin z$, $\cos z$ の複素関数としての挙動に関して若干の考察を行っておくべきでしょう。例えば、 $|z| \rightarrow \infty$ とするときの $\sin z$ を含む関数の挙動や、 $\sin z$, $\cos z$ の零点の分布状況などです。

【P611】1月29日(土) Mittag-Leffler Expansion (続き)

$z = re^{i\theta}$ とおきます。 r は非負実数, θ も実数とします。 このとき、
 $\sin z, \cos z$ を r と θ で表現しましょう。 Euler の公式を使います。

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(re^{i\theta}) \\ &= \sin(r\cos\theta + ir\sin\theta) \\ &= \sin(r\cos\theta)\cos(ir\sin\theta) + \cos(r\cos\theta)\sin(ir\sin\theta)\end{aligned}$$

ここで

$$\cos(ix) = \frac{1}{2}(e^{i(ix)} + e^{-i(ix)}) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^x)$$

$$\cos(ix) = \cosh x \quad (W13)$$

$$\sin(ix) = \frac{1}{2i}(e^{i(ix)} - e^{-i(ix)}) = \frac{-i}{2}(e^{-x} - e^x)$$

$$\sin(ix) = i \sinh x \quad (W14)$$

よって、

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(r\cos\theta)\cosh(r\sin\theta) \\ &\quad + i \cos(r\cos\theta)\sinh(r\sin\theta)\end{aligned} \quad (W15)$$

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(r\cos\theta + ir\sin\theta) \\ &= \cos(r\cos\theta)\cos(ir\sin\theta) - \sin(r\cos\theta)\sin(ir\sin\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos(r\cos\theta)\cosh(r\sin\theta) \\ &\quad - i \sin(r\cos\theta)\sinh(r\sin\theta)\end{aligned} \quad (W16)$$

$|\sin z|^2, |\cos z|^2$ を r と θ で表現します。 (W15), (W16) を使います。

$$\begin{aligned}|\sin z|^2 &= \sin^2(r\cos\theta)\cosh^2(r\sin\theta) \\ &\quad + \cos^2(r\cos\theta)\sinh^2(r\sin\theta)\end{aligned}$$

【P612】 Mittag-Leffler Expansion (続き)

ところで、(W13), (W14) より、

$$1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x \quad (W17)$$

よって、

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2(r \cos \theta) (1 + \sinh^2(r \sin \theta)) \\ &\quad + (1 - \sin^2(r \cos \theta)) \sinh^2(r \sin \theta) \end{aligned}$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2(r \cos \theta) + \sinh^2(r \sin \theta) \quad (W18)$$

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2(r \cos \theta) \cosh^2(r \sin \theta) \\ &\quad + \sin^2(r \cos \theta) \sinh^2(r \sin \theta) \\ &= \cos^2(r \cos \theta) (1 + \sinh^2(r \sin \theta)) \\ &\quad + (1 - \cos^2(r \cos \theta)) \sinh^2(r \sin \theta) \end{aligned}$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2(r \cos \theta) + \sinh^2(r \sin \theta) \quad (W19)$$

ここまでの計算結果を定理としてまとめて再記しておきます。

Sin z の r, θ 表現など

$$\cos(ix) = \cosh x, \quad \sin(ix) = i \sinh(x) \quad .1)$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad .2)$$

非負実数 r , 実数 θ を用いて、 $z = r e^{i\theta}$ とおけば、

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(r \cos \theta) \cosh(r \sin \theta) \\ &\quad + i \cos(r \cos \theta) \sinh(r \sin \theta) \end{aligned} \quad .3)$$

$$\begin{aligned} \cos Z &= \cos(r \cos \theta) \cosh(r \sin \theta) \\ &\quad - i \sin(r \cos \theta) \sinh(r \sin \theta) \end{aligned} \quad .4)$$

$$|\sin Z|^2 = \sin^2(r \cos \theta) + \sinh^2(r \sin \theta) \quad .5)$$

$$|\cos Z|^2 = \cos^2(r \cos \theta) + \sinh^2(r \sin \theta) \quad .6)$$

.5), .6) より.

$\sin Z$, $\cos Z$ の零点は実軸上にしか存在しません。 .7)

定理(207)

$$g_s(z) = \frac{1}{|z|^2 |\sin z|^2}$$

の $|z| \rightarrow \infty$ における挙動を調べよう。問題となるのは $|\sin z|^2$ です。(207.5) を用います。 .5) の右辺は $\cos \theta$, $\sin \theta$ の偶関数ですから、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の θ について考えれば十分です。まず、 $\theta \neq 0$ の場合は、 $\sin \theta \neq 0$ だから、 $r \rightarrow \infty$ で $\sinh^2(r \sin \theta) \rightarrow \infty$ です。従ってこの場合は $|z| \rightarrow \infty$ で $g_s(z) \rightarrow 0$ です。次に $\theta = 0$ の場合は、 $z_n = r_n$ とし、 $r_n = (n - \frac{1}{2})\pi$, $(n = 1, 2, 3, \dots)$ とすれば $|\sin z_n| = 1$ ですから、 $|z_n| \rightarrow \infty$ で $g_s(z_n) \rightarrow 0$ です。いずれにしても

無限大に発散する数列 $\{r_n\}$ が存在し、 $z_n = r_n e^{i\theta}$ とするとき、 $n \rightarrow \infty$ とするとき、 θ によらずに、 $g_s(z_n) \rightarrow 0$ です。

$$g_c(z) = \frac{1}{|z|^2 |\cos z|^2}$$

に関しても同様の議論が出きます。ただし、 $r_n = n\pi$ です。

【P614】 Mittag-Leffler Expansion (続き)

これらも定理としてまとめておきましょう。

Well-Behaved $\sin z, \cos z$

$z_n = r_n e^{i\theta}$ とします。 $r_n = (n - \frac{1}{2})\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とします。
 $\{r_n\}$ は無限大に発散します。このとき、 θ によらずに次が成り立ちます。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|z_n|^2 |\sin z_n|^2} = 0 \quad .1)$$

$z_n = r_n e^{i\theta}$ とします。 $r_n = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とします。
 $\{r_n\}$ は無限大に発散します。このとき、 θ によらずに次が成り立ちます。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|z_n|^2 |\cos z_n|^2} = 0 \quad .2)$$

定理(208)

Mittag-Leffler Expansion の具体的な関数への適用例を(とらえず) 2つだけ示しましょう。まず次式の $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$$

を考えましょう。 $f(z)$ の 1 位の極は、

$$a_k = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

です。 $f(z)$ は上記以外のすべての点 z で正則です。また、

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{z \sin z} - \frac{1}{z^2}$$

【P615】 1月31日(月) Mittag-Leffler Expansion (続き)

従って、(208.1)より、 $f(z)$ はMittag-Leffler Expansionの前提条件(206.1)を満たします。 $f(0)$ は、

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - \sin z}{z \sin z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(z - \sin z)'}{(z \sin z)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z + z \cos z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos z)'}{(\sin z + z \cos z)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2 \cos z - z \sin z} \\ &= 0 \end{aligned}$$

1位の極 $a_k = k\pi$ における留数 A_k は、

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{z \rightarrow a_k} f(z)(z - a_k) \\ &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{z - k\pi}{\sin z} - \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{z - k\pi}{z} \\ &= \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{(z - k\pi)'}{(\sin z)'} = \lim_{z \rightarrow k\pi} \frac{1}{\cos z} = (-1)^k \end{aligned}$$

よって、(205.2)より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z + k\pi} - \frac{1}{k\pi} \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z}{z^2 - k^2 \pi^2} \end{aligned}$$

【P616】 2月1日(火) Mittag-Leffler Expansion (続き)

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^2}{z^2 - k^2 \pi^2} \quad (W20)$$

次に、下記の $f(z)$ について考えましょう。

$$f(z) = \frac{1}{\cos z}$$

$f(z)$ の1位の極は、下記の a_k と b_k です。

$$a_k = \frac{2k-1}{2} \pi, \quad b_k = -a_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$f(z)$ は上記以外のすべての点 z で正則です。また、

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{z \cos z}$$

従って、(208.2)より、 $f(z)$ は Mittag-Leffler Expansion の前提条件 (206.1) を満たします。 $f(0)$ は、

$$f(0) = 1$$

a_k における $f(z)$ の留数 A_k は、

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{z \rightarrow a_k} f(z)(z - a_k) = \lim_{z \rightarrow \frac{2k-1}{2}\pi} \frac{z - \frac{2k-1}{2}\pi}{\cos z} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{2k-1}{2}\pi} \frac{(z - \frac{2k-1}{2}\pi)'}{(\cos z)'} = \lim_{z \rightarrow \frac{2k-1}{2}\pi} \frac{-1}{\sin z} \\ &= (-1)^k \end{aligned}$$

b_k における $f(z)$ の留数 B_k は、

【P617】 Mittag-Leffler Expansion (続き)

$$\begin{aligned}
 B_k &= \lim_{z \rightarrow b_k} f(z)(z-b_k) = \lim_{z \rightarrow \frac{1-2k}{2}\pi} \frac{z - \frac{1-2k}{2}\pi}{\cos z} \\
 &= \lim_{z \rightarrow \frac{1-2k}{2}\pi} \frac{(z - \frac{1-2k}{2}\pi)'}{(\cos z)'} = \lim_{z \rightarrow \frac{1-2k}{2}\pi} \frac{-1}{\sin z} \\
 &= (-1)^{k+1} = -A_k
 \end{aligned}$$

よって、(205.2)より

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\cos z} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{z + a_k} - \frac{1}{a_k} \right) \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(-\frac{2a_k}{z^2 - a_k^2} + \frac{2}{a_k} \right) \\
 &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{a_k} \frac{z^2}{z^2 - a_k^2}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\cos z} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{2k-1}{2}\pi} \frac{(-1)^k z^2}{z^2 - \left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)^2} \quad (W21)$$

Mittag-Leffler Expansion の適用例

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^2}{z^2 - (k\pi)^2} \quad .1)$$

$$\frac{1}{\cos z} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\frac{2k-1}{2}\pi} \frac{z^2}{z^2 - \left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)^2} \quad .2)$$

定理(209)

● うずまき曲線群の追加作図

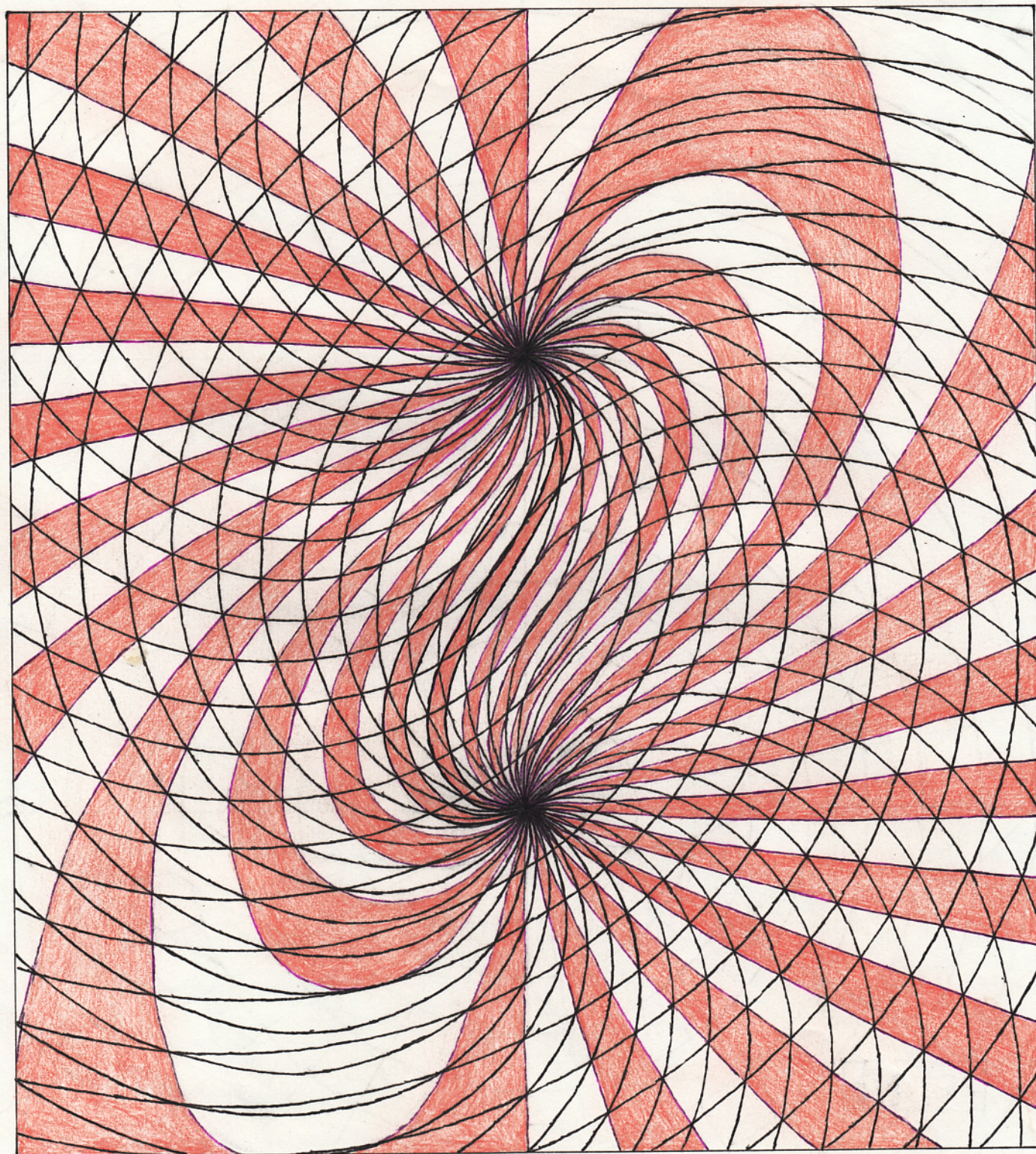


fig.286

中央上側の点は 荷値+36, 源値+10のうずまき点(荷極かつ波源)
で中央下側の点は 荷値-36, 源値-10のうずまき点です。

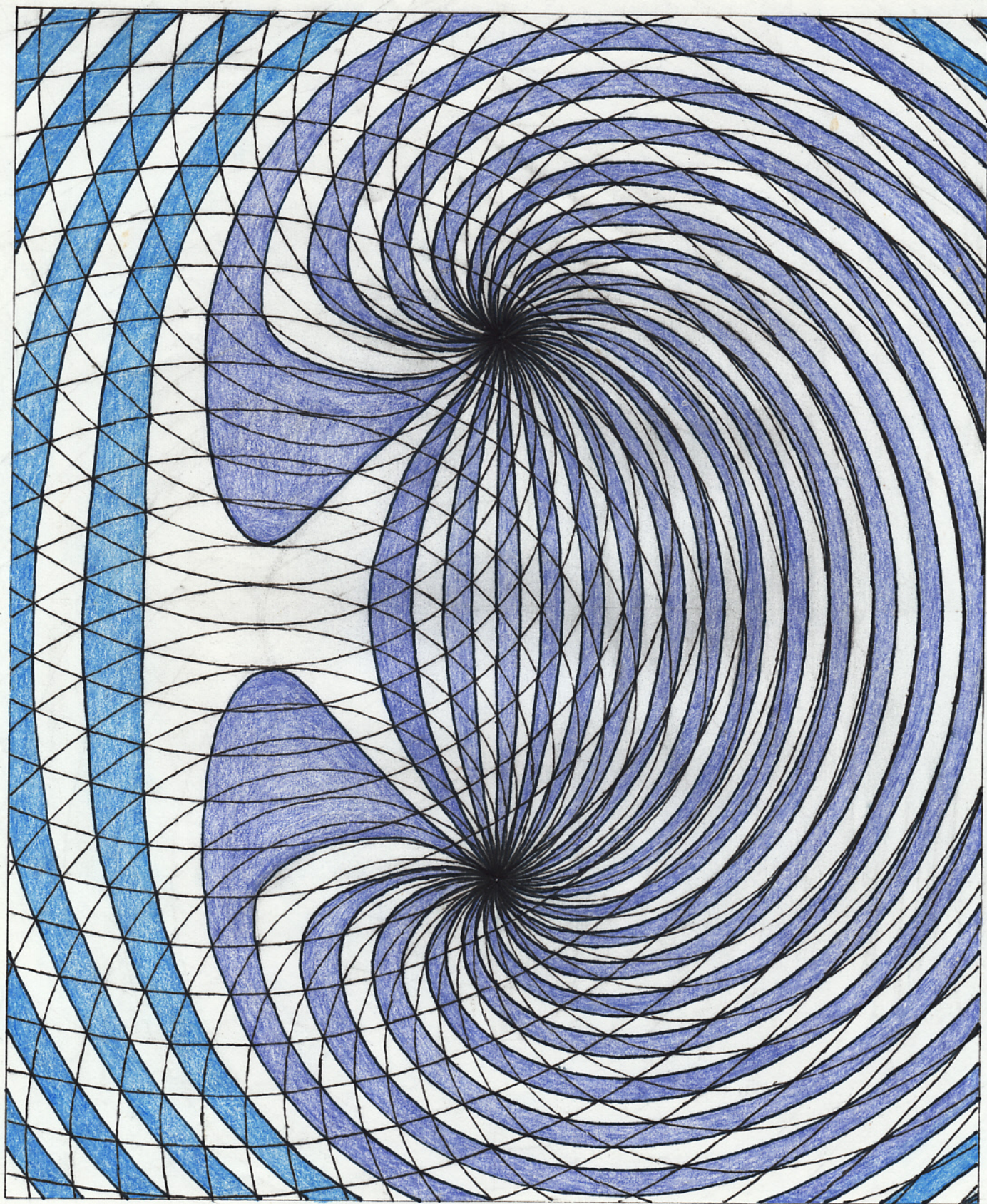


fig.287

上側の点は荷値+36, 源値+10のうずまき点で、下側の点は荷値-36, 源値+10のうずまき点です。

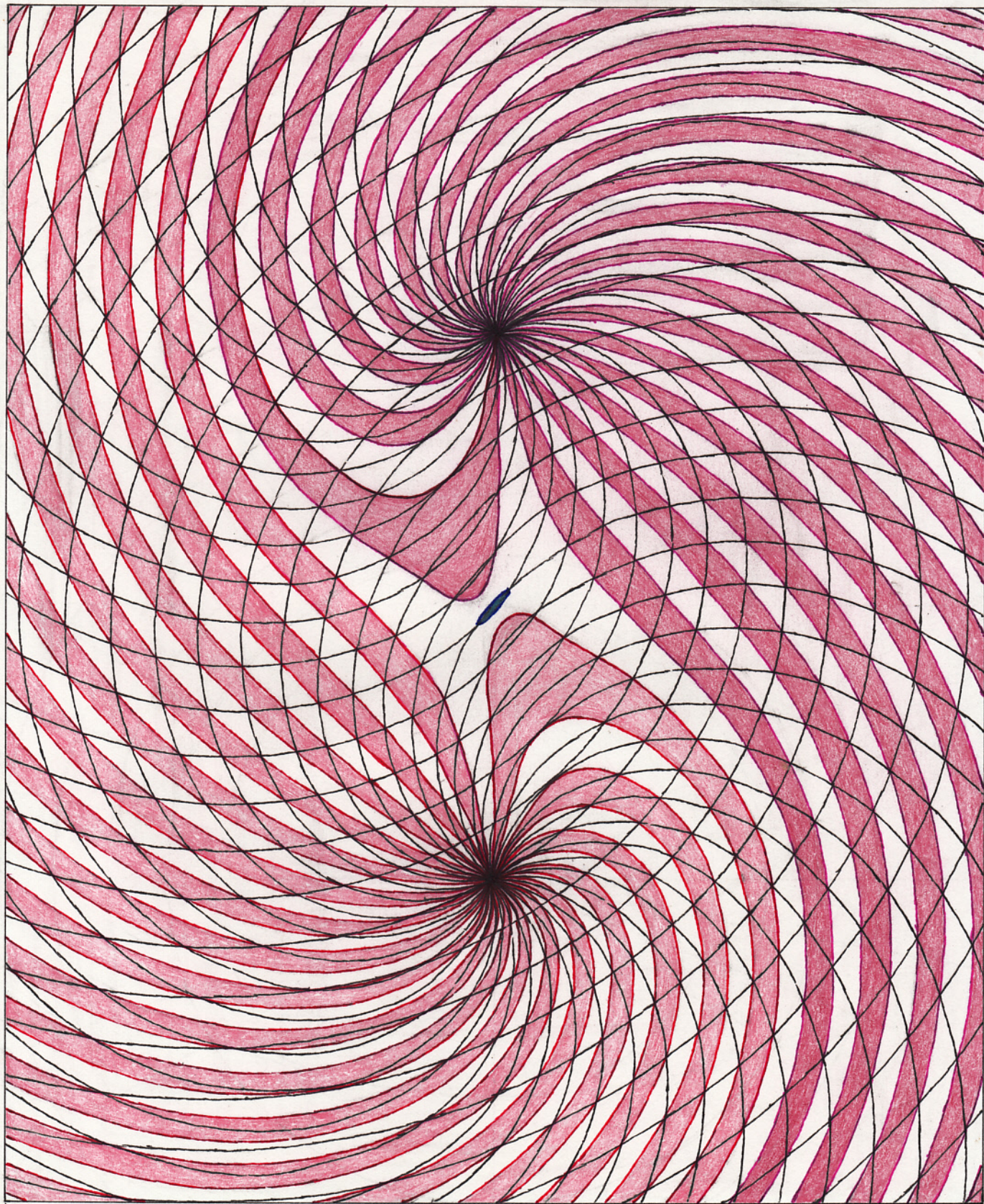


fig.288

上側の点は荷値+36, 源値+10のうずまき点です。下側の点も、荷値+36, 源値+10のうずまき点です。中央の小さな閉曲線については自信がありません。

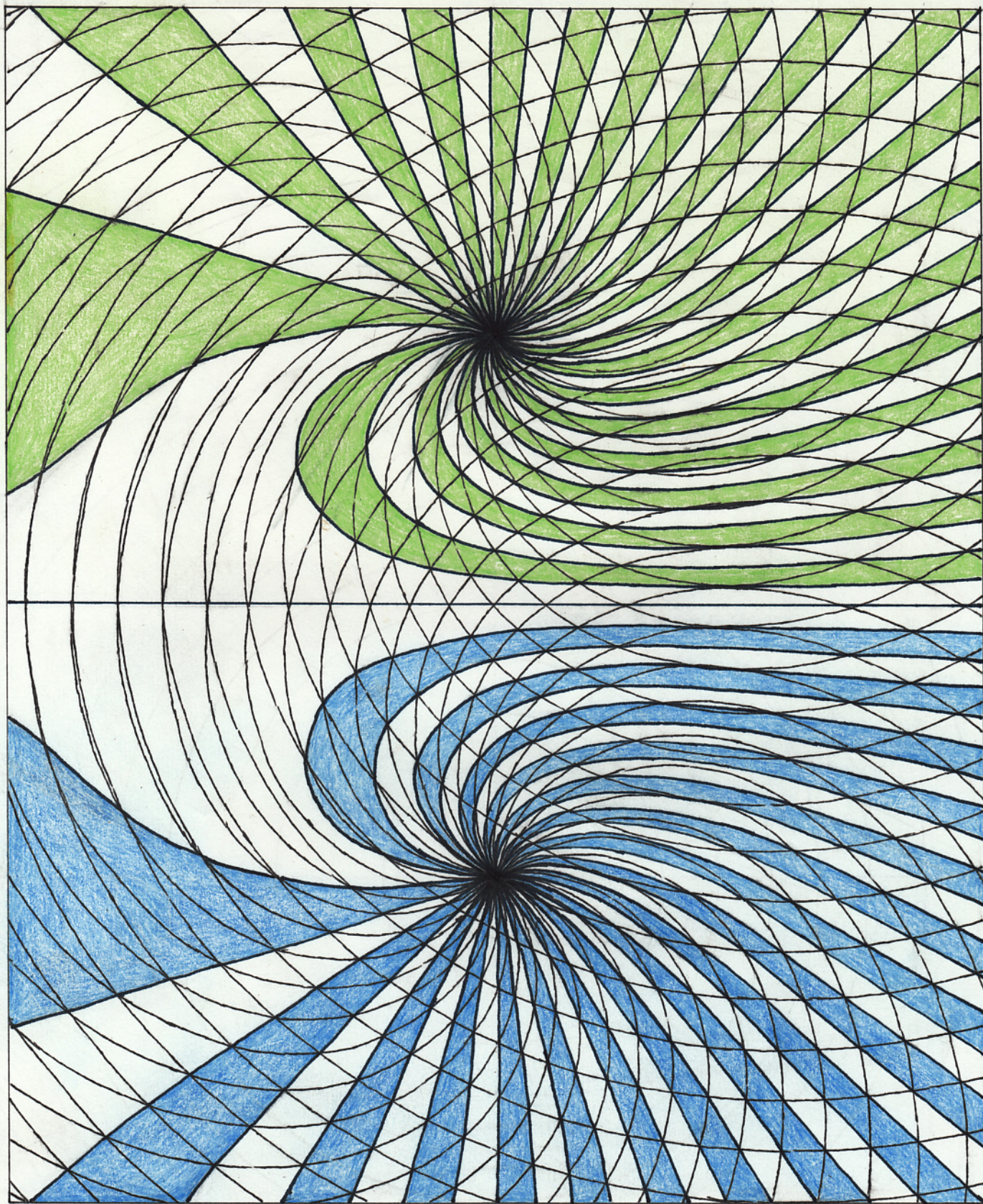


fig.289

上側の点は荷値+36, 源値-10のうずまき点です。下側の点は、荷値+36, 源値+10のうずまき点です。

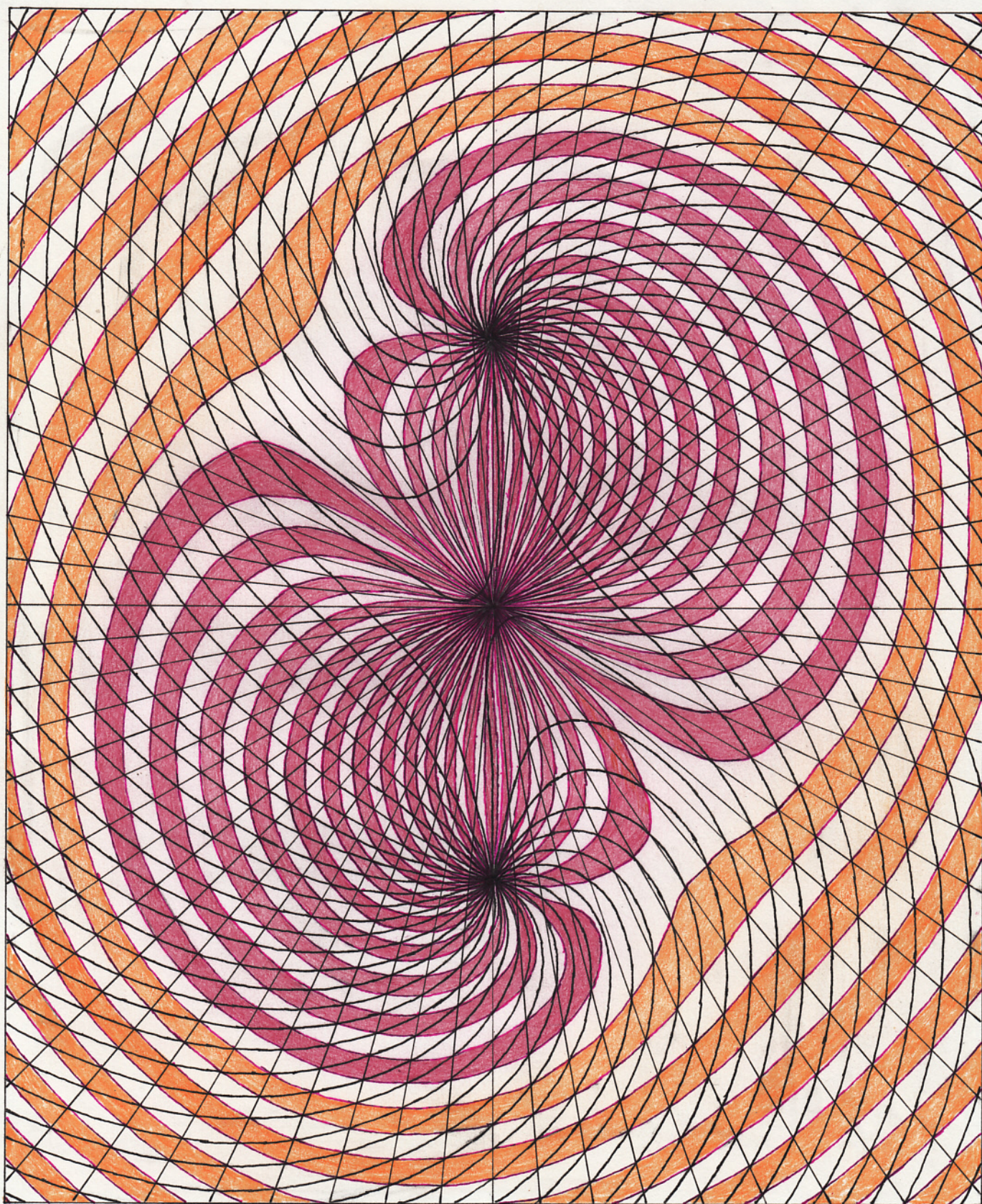


fig.290

fig.288に、荷値-72の荷極を追加しました。

まるで、中性子(Neutron)の内部を見ているかのような絵です。

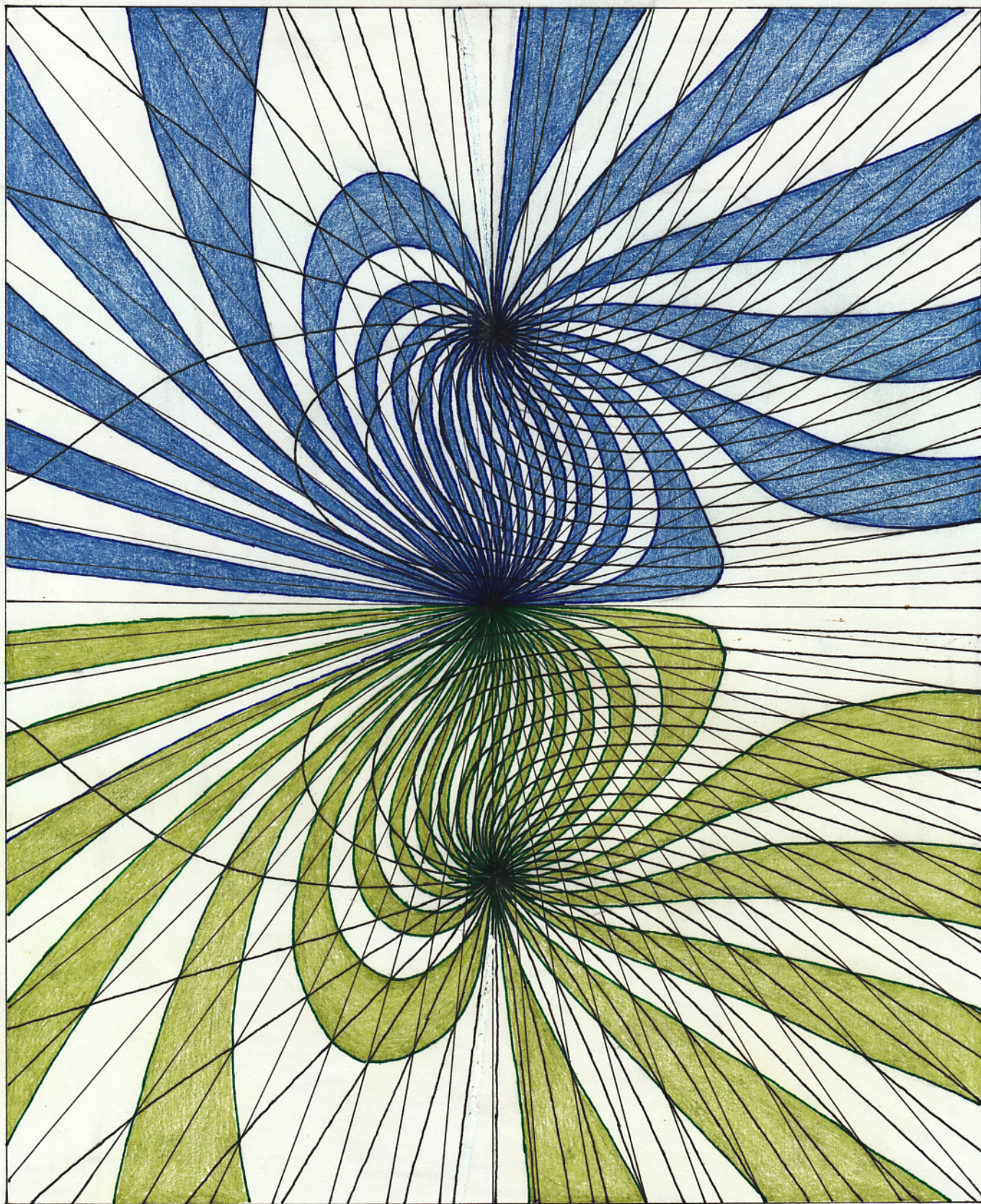


fig.291

fig.289に 荷値-72の荷極を追加しました。

● Weierstrass Factor Theorem

Mittag-Leffler Expansion を巧如に (Cleverly, Skillfully) に用いることによって、下記の Weierstrass の乗積定理 (Factor Theorem) を導出することが出来ます

Weierstrass Factor Theorem

$f(z)$ は 無限遠点を除く全複素平面上で正則であるとします。 $f(z)$ は孤立した (Isolated) 1位の零点 $a_1, a_2, a_3, \dots$ をもつとします。 $a_k \neq 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) とします。また $f(z)$ は次を満たすとします。

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f'(z)}{zf(z)} = 0 \quad \text{注) 有り} \Rightarrow \text{P610} \quad .1)$$

このとき 次式が成り立ちます。

$$f(z) = f(0) \exp\left(\frac{f'(0)}{f(0)} z\right) \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \exp\left(\frac{z}{a_k}\right)\right] \quad .2)$$

定理(210)

Mittag-Leffler は、Sonya Kovalevskaja と同様に、Karl Weierstrass の弟子だったそうです。Weierstrass は Mittag-Leffler Expansion を用いて上記の定理を導出したのでしょうか？自信はありませんが、そうではないと思います。もっと複雑な計算を経て導出したと思われます。それを学んだ Mittag-Leffler がもっと簡単

【P625】 Weierstrass Factor Theorem (続き)

な証明方法がないだろうかと考えた結果、Mittag-Leffler Expansionを発見したのかもしれない。

(210.2)を証明します。 $g(z)$ を次式で定義します。

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (W1)$$

$f(z)$ は無限遠点を除く複素平面上の全ての点で正則ですから、 $f'(z)$ も無限遠点を除く複素平面上の全ての点で正則です。 $f(z)$ の零点は全て1位の零点だから $f'(z)$ の零点と $f(z)$ の零点が一致することはありません。従って、 $g(z)$ は孤立した1位の極 $a_1, a_2, a_3, \dots$ をもち、これら以外の点では正則です。

また、(210.1)より

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{z} = 0 \quad (W2)$$

よって、Mittag-Leffler Expansionを $g(z)$ に適用することが出来ます。

$$g(z) = g(\infty) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(\frac{1}{z-a_k} + \frac{1}{a_k} \right) \quad (W3)$$

ここで B_k ($k=1, 2, 3, \dots$) は $g(z)$ の1位の極 a_k における留数です。 B_k を計算しましょう。

a_k は $f(z)$ の1位の零点だから、 $f(z)$ を点 a_k のまわりで Taylor Expansionを行えば、 $f(z)$ は次のように表わすことが出来ます。

$$f(z) = C_1(z-a_k) + C_2(z-a_k)^2 + \dots \quad (W4)$$

【P626】 2月22日(火) Weierstrass Factor Theorem (続き)

ここで、 $C_1 \neq 0$ です。よって B_k は

$$\begin{aligned} B_k &= \lim_{z \rightarrow a_k} g(z) (z - a_k) = \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} (z - a_k) \\ &= \lim_{z \rightarrow a_k} \frac{C_1 + 2C_2(z - a_k) + \dots}{C_1 + C_2(z - a_k) + \dots} = \frac{C_1}{C_1} \end{aligned}$$

$$B_k = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (W5)$$

(W1), (W3), (W5) より

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f'(\infty)}{f(\infty)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right) \quad (W6)$$

この式の両辺を ∞ から z まで積分します。

$$\left[\log f(z) \right]_{\infty}^z = \frac{f'(\infty)}{f(\infty)} z + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left[\log(z - a_k) \right]_{\infty}^z + \frac{z}{a_k} \right)$$

$$\begin{aligned} \left[\log(z - a_k) \right]_{\infty}^z &= \log(z - a_k) - \log(-a_k) \\ &= \log\left(\frac{z - a_k}{-a_k}\right) = \log\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) \end{aligned}$$

$$\log f(z) = \log f(\infty) + \frac{f'(\infty)}{f(\infty)} z + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\log\left(1 - \frac{z}{a_k}\right) + \frac{z}{a_k} \right] \quad (W7)$$

(W7) の両辺の $\exp(\cdot)$ をとれば (210.2) が得られます。

Q.E.D.

【P627】 2月23日(水) Weierstrass Factor Theorem (続き)

Weierstrass Factor Theorem の具体的な関数への適用例を (やはり、とりあえず) 2つだけ示しましょう。まず、次の $f(z)$ を考えましょう。

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \quad (W8)$$

どうして $\sin z$ そのものではなく z で割った関数を考察の対象とするのかは明らかですね。 $z=0$ が $f(z)$ の零点とならないことが 必須だからです。 $f(z)$ の零点は

$$a_k = k\pi \quad (k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (W9)$$

(207.7) より $f(z)$ はこれら以外の零点はもちません。また $z = a_k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) は全て1位の零点です。さらに、 $f(z)$ は無限遠点を除く全複素平面上で正則です。 $f'(z)$ は

$$f'(z) = \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} \quad (W10)$$

よって

$$\frac{f'(z)}{zf(z)} = \frac{1}{\sin z} \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} = \frac{\cos z}{z \sin z} - \frac{1}{z^2} \quad (W11)$$

$$\left(\frac{\cos z}{z \sin z} \right)^2 = \frac{\cos^2 z}{z^2 \sin^2 z} = \frac{1}{z^2 \sin^2 z} - \frac{1}{z^2} \quad (W12)$$

(W11), (W12), (208.1) より、 $f(z)$ は Weierstrass Factor Theorem の前提条件 注(206.2) を満たします。 $f(0)$, $f'(0)$ は

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{1} = 1 \quad (W13)$$

【P628】 Weierstrass Factor Theorem (続き)

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - z \sin z - \cos z}{2z} \\
 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin z - z \cos z}{2} = 0 \quad (W14)
 \end{aligned}$$

(W8), (W9), (W13), (W14), 及び (210.2) より

$$\begin{aligned}
 \frac{\sin z}{z} &= 1 \cdot \exp\left(\frac{0}{1} z\right) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{k\pi}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{k\pi}\right) \right] \\
 &\quad \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{k\pi}\right) \cdot \exp\left(-\frac{z}{k\pi}\right) \right] \\
 \frac{\sin z}{z} &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}\right) \quad (W15)
 \end{aligned}$$

次に、下記の $f(z)$ を考えましょう。

$$f(z) = \cos z \quad (W16)$$

$f(z)$ の1位の零点は、下記の a_k と b_k です。

$$a_k = \frac{2k-1}{2} \pi, \quad b_k = -a_k \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (W17)$$

(207.7)より $f(z)$ はこれら以外の零点はもちません。さらに $f(z)$ は無限遠点を除く全複素平面上で正則です。 $f'(z)$ は

$$f'(z) = -\sin z \quad (W18)$$

【P629】2月24日(木) Weierstrass Factor Theorem (続き)

より

$$\frac{f'(z)}{zf(z)} = \frac{-\sin z}{z \cos z} \quad (W19)$$

$$\left(\frac{-\sin z}{z \cos z}\right)^2 = \frac{\sin^2 z}{z^2 \cos^2 z} = \frac{1}{z^2 \cos^2 z} - \frac{1}{z^2} \quad (W20)$$

(W19), (W20), (208.2) より, $f(z)$ は Weierstrass Factor Theorem の前提条件 注(206.2) を満たします. $f(0), f'(0)$ は

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad (W21)$$

(W16), (W17), (W21), 及び (210.2) より

$$\begin{aligned} \cos z &= 1 \cdot \exp\left(\frac{0}{1} z\right) \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{2z}{(2k-1)\pi}\right) \exp\left(\frac{2z}{(2k-1)\pi}\right) \right] \\ &\quad \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{2z}{(2k-1)\pi}\right) \exp\left(\frac{-2z}{(2k-1)\pi}\right) \right] \\ \cos z &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2^2 z^2}{(2k-1)^2 \pi^2} \right) \end{aligned} \quad (W22)$$

Weierstrass Factor Theorem の 適用例

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2} \right) \quad .1)$$

$$\cos z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2^2 z^2}{(2k-1)^2 \pi^2} \right) \quad .2)$$

定理(211)

【P63Q】 2022年2月25日(金) 小休止：誕生石

● 小休止：誕生石

Jan.	Garnet	石榴石	珪酸塩鉱物。Mg, Fe, Mn, Ca, Al などを 含む。変成岩中に多い。12面体結晶がふつう。
Feb.	Amethyst	紫水晶	紫色の水晶。紫石英
Mar.	Aquamarine	藍玉	緑柱石。青緑色で透明。
	BloodStone	血石	濃緑色の玉髄。酸化鉄による赤色の 斑点がある。
Apr.	Diamond	金剛石	炭素の同素体。ふつう正8面体。無色透明。 硬度は最高。
May	Emerald	翠玉	緑柱石。濃緑色で透明。
June	Pearl	真珠	アコヤガイなどの体内にできる球状物質。 銀白色の光沢。
	MoonStone	月長石	長石。乳白色半透明。カットされた曲面か ら青色の閃光を放つ。
July	Ruby	紅玉	Corundum。微量のCrのため赤色。主産 地はミャンマーなど。
Aug.	Sardonyx	赤縞瑪瑙	瑪瑙。茶色を帯びた赤色に白色の縞 模様。
	Peridot	橄欖石	橄欖石。暗緑色で透明。
Sep.	Sapphire	青玉	Corundum。濃青色透明。
Oct.	Opale	蛋白石	含水珪酸塩鉱物。半透明で乳白色。不純 物により種々の色。主産地はオーストラリア、メキシコ。
	Tourmaline	電気石	珪酸塩鉱物。Fe, Al, B などを含む。黒、緑、 青、紅などでガラス光沢。摩擦や加熱で帯電。
Nov.	Topaz	黄玉	珪酸塩鉱物。Al, F を含む。斜方晶系。 無色または黄色の透明な柱状結晶。縦条線。
Dec.	Turquoise	トルコ石	磷酸塩鉱物。Cu, Al を含む。三斜晶系。 空色または青緑色。
	LapisLazuli	瑠璃	数種の鉱物の混合物。黄鉄鉱を含む。 藍青色。主産地はアフガニスタン。

珪酸塩 二酸化珪素 SiO_2 と金属酸化物からなる塩。

アルカリ塩以外は水に溶けず、一般に融点が高く、融解して冷却するとガラス状になることが多い。地殻を構成する大部分の造岩鉱物に存在。長石、雲母、角閃石、輝石、橄欖石など。

水晶 石英 (Quartz) のこと。二酸化珪素 SiO_2 からなる鉱物。ふっつうガラス光沢をもつ六方晶系の柱状か錐状の結晶で、透明なものを水晶 (Crystal) という。花崗岩、片麻岩などの主成分。

緑柱石 珪酸塩鉱物。Be, Al を含む。六方晶系に属し、六角柱状の結晶をなす。ガラス光沢があり、無色や緑色、青色など。

玉髄 石英の微小な結晶からなる鉱物。透明または半透明で、色は白、灰、淡褐、赤、緑など。

長石 珪酸塩鉱物。Al, K, Na, Ca などを含む。単斜晶系の正長石、三斜晶系の斜長石などに分類されている。

Corundum 酸化アルミニウム Al_2O_3 からなる鉱物。ダイヤモンドに次いで硬い。六方晶系。宝石、研磨剤に利用。

瑪瑙 石英の結晶の集合体 (玉髄) で、色や透明度の違いにより層状の縞模様をもつもの。色は白、灰、赤褐色など変化に富む。硬質なので乳鉢にも使われる。

橄欖石 珪酸塩鉱物。Fe, Mg を含む。黄緑色で、ふっつう短柱状の結晶をなす。斜方晶系。塩基性および超塩基性岩の主要な造岩鉱物。

磷酸塩 磷酸 H_3PO_4 の水素を金属あるいは塩素と置換してできる塩。

黄鉄鉱 Fe と S (Sulphur) からなる鉱物。金属光沢を帯びた淡黄色。等軸晶系。硫酸製造の硫黄の原料になる。

鉱物 Mineral. 地殻中に存在する無生物で、均質な固体物質。一定の物理的・化学的性質をもち、大部分は結晶質の無機物。