

● 3角形の重心の周辺

重心は古典力学に由来する概念です。

慣性座標系で等速運動する質点系(や剛体)にとって特別な物理学的意味を有する点です。また、一様な重力場中の質点系(や剛体)でも特別な点です。重心と呼ばれる所以ですね。物理学では重心 (Center of Gravity) のことを慣性中心 (Center of Inertia) とも呼びます。質点系(や剛体)の慣性中心は次のように定義されます。

慣性中心の定義

質点系の i 番目の質点の位置Vectorを a_i , その質量を m_i とするとき、この質点系の慣性中心 C_I は次式を満たすものとして定義されます。

$$\sum_i m_i (a_i - C_I) = 0 \quad .1)$$

C_I について解けば

$$C_I = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i a_i \quad .2)$$

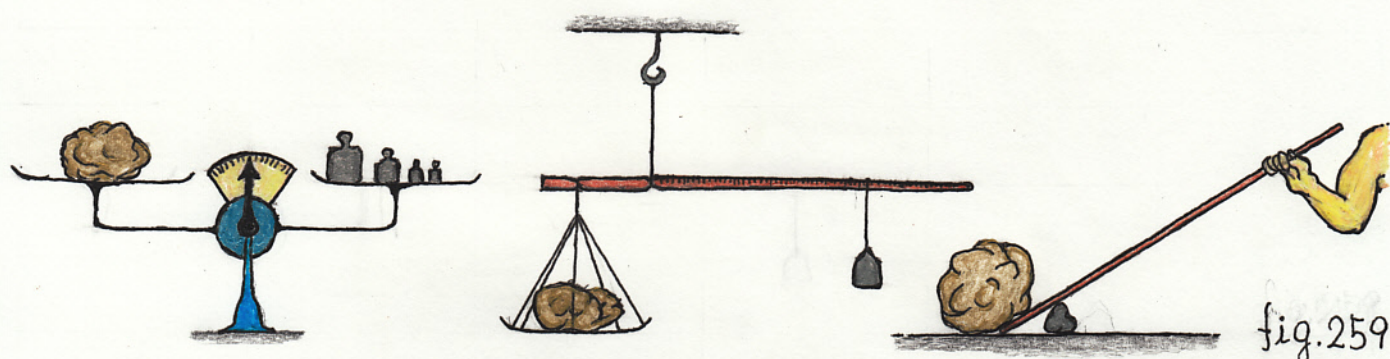
剛体 S の場合は、点 x における密度を $\rho(x)$ とすれば、

$$C_I = \frac{1}{\iiint_{x \in S} \rho(x) dx_1 dx_2 dx_3} \iiint_{x \in S} \rho(x) x dx_1 dx_2 dx_3 \quad .3)$$

但し、.1), .2), .3)において用いられる座標系は(任意の)正規直交座標系です。

.3)の右辺の分母の積分の絶対値は S の質量を表わしています。

慣性中心のもつ力学的性質に関する議論は当節の埒外です。
唯貴方も御存じのとおり、天秤、竿秤、挺子などは、慣性中心の性質を利用しているということを指摘するに留めることにします。



当節の主題の1つは、幾何学的重心、とりわけ3角形の重心です。
(195.3)において、 $\rho(x) = \text{constant} = 1$ とし、さらに3次元に限らず、1, 2, 4次元,..., 一般に n 次元に拡張すれば、幾何学的重心の定義が得られます。但し、怠け者の定義とします。何故怠け者の定義なのか？ それは n 次元体積の定義(167)を行った際と同じ事情があるからです。

怠け者の幾何学的重心の定義

n 次元Euclidean空間 R^n 上の有界凸閉集合 S の幾何学的重心 C_G を次式で定義します。

$$C_G = \frac{1}{\iint \dots \int_{x \in S} 1 \, dx_1 dx_2 \dots dx_n} \iint \dots \int_{x \in S} x \, dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad .1)$$

但し..1)において用いられる座標系は(任意の)正規直交座標系です。

定義(196)

(196.1)式の右辺の分母の絶対値は S の n 次元体積です。従って、重心の定義は次元数 n に依存し、その n 次元体積が0でない有界凸集合に対してのみ行うことが出来、正確を期すならば“ n 次元重心”とも呼ぶべきものです。例えば、縮退した3角形の2次元重心は無意味ですが、それを線分と見做すならば、その1次元重心の定義は出来ます。

A_0 を始頂点とし、 $\{v_1, v_2\}$ を単体要素集合とする、縮退していない2次元単体 $\Delta_2(A_0; v_1, v_2)$, つまり3角形 $A_0A_1A_2$ の2次元重心 C_G について考察しよう。但し、3角形 $A_0A_1A_2$ は鋭角3角形(Acute Angled Triangle)であるとして。つまり頂点 A_0, A_1, A_2 における内角は全て $\frac{\pi}{2}$ 未満だとします。鈍角3角形(Obtuse Angled Triangle)については、鋭角3角形の場合とほとんど同じ議論が可能なので省略します。重心 C_G を A_0, v_1, v_2 で表現する式を求めるのが目標です。

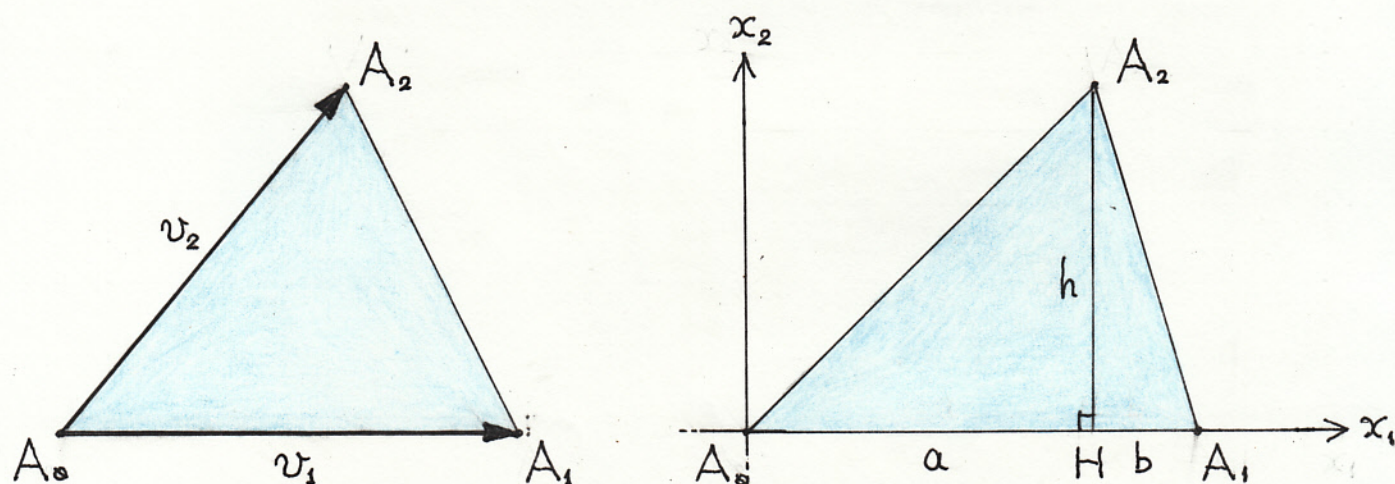
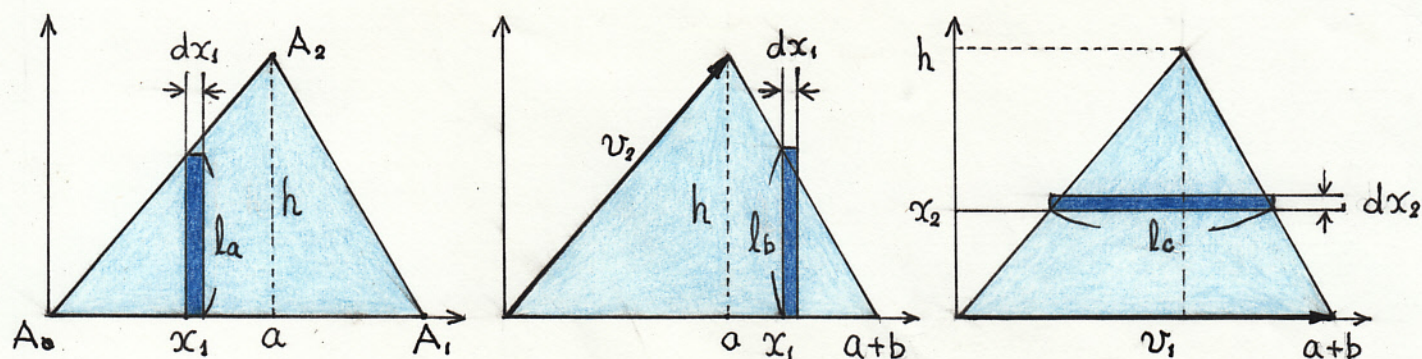


fig.260

頂点 A_2 から辺 A_0A_1 に降した垂線の足を H とします。 h, a, b を、 $h = \overline{A_2H}$, $a = \overline{A_0H}$, $b = \overline{HA_1}$ とします。また、正規直交座標系は、 A_0 を原点とし、 v_1 方向を x_1 軸方向とし、 $\vec{HA_2}$ 方向が x_2 軸方向となるように定めます。この座標系を用いて C_G を計算します。

【P573】3 角形の重心の周辺 (続き)



$$l_a = \frac{h}{a} x_1$$

$$l_b = \frac{h}{b} (a+b-x_1)$$

$$l_c = \frac{a+b}{h} (h-x_2)$$

fig.261

$\mathcal{S}_2$ の面積を $\mathcal{V}_2$ とおきます。 C_G の定義式 (196.1) 及び fig.261 の l_a, l_b, l_c を用いて、 $C_G|_1, C_G|_2$ を求めます。丁寧に計算しましょう。

$$\mathcal{V}_2 C_G|_1 = \iint_{x \in \mathcal{S}_2} x_1 dx_1 dx_2 = \int_a^a x_1 l_a dx_1 + \int_a^{a+b} x_1 l_b dx_1$$

$$= \int_a^a x_1 \frac{h}{a} x_1 dx_1 + \int_a^{a+b} x_1 \frac{h}{b} (a+b-x_1) dx_1$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{h} \mathcal{V}_2 C_G|_1 &= \frac{b}{a} \int_a^a x_1^2 dx_1 + (a+b) \int_a^{a+b} x_1 dx_1 - \int_a^{a+b} x_1^2 dx_1 \\ &= \frac{b}{a} \left[\frac{1}{3} x_1^3 \right]_a^a + (a+b) \left[\frac{1}{2} x_1^2 \right]_a^{a+b} - \left[\frac{1}{3} x_1^3 \right]_a^{a+b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{6b}{h} \mathcal{V}_2 C_G|_1 &= 2a^2b + 3(a+b)^3 - 3a^2(a+b) - 2(a+b)^3 + 2a^3 \\ &= 2a^2(a+b) + (a+b)^3 - 3a^2(a+b) \\ &= (a+b)^3 - a^2(a+b) \\ &= (a+b)((a+b)^2 - a^2) \\ &= (a+b)(a+b-a)(a+b+a) \end{aligned}$$

$$\frac{6b}{h} \mathcal{V}_2 C_G|_1 = b(a+b)(2a+b)$$

(W1)

ところで S_2 の面積 sV_2 は

$$sV_2 = \frac{1}{2}(a+b)h \quad (W2)$$

(W1), (W2) より

$$\frac{6b(a+b)h}{h} C_G|_1 = b(a+b)(2a+b)$$

$$C_G|_1 = \frac{1}{3}(2a+b) \quad (W3)$$

次に $C_G|_2$ を計算します。

$$sV_2 C_G|_2 = \iint_{x \in S_2} x_2 dx_1 dx_2 = \int_0^h x_2 l_c dx_2 = \int_0^h x_2 \frac{a+b}{h} (h-x_2) dx_2$$

$$= (a+b) \int_0^h x_2 dx_2 - \frac{a+b}{h} \int_0^h x_2^2 dx_2$$

$$= (a+b) \left[\frac{1}{2} x_2^2 \right]_0^h - (a+b) \frac{1}{h} \left[\frac{1}{3} x_2^3 \right]_0^h$$

$$= \frac{1}{2}(a+b)h^2 - \frac{1}{3}(a+b)h^2$$

$$sV_2 C_G|_2 = \frac{1}{6}(a+b)h^2 \quad (W4)$$

(W2), (W4) より

$$\frac{1}{2}(a+b)h C_G|_2 = \frac{1}{6}(a+b)h^2$$

$$C_G|_2 = \frac{1}{3}h \quad (W5)$$

$C_G|_1, C_G|_2$ を a, b, h で表現する式 (W3), (W5) が得られました。目標は、 v_1, v_2 で表現することでしたね。 v_1, v_2 は、 a, b, h で表わすと

$$v_1 = \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} a \\ h \end{pmatrix} \quad (W6)$$

(W3), (W5), (W6)より

$$C_G = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a+b \\ h \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ h \end{pmatrix} \right)$$

$$C_G = \frac{1}{3}(v_1 + v_2) \quad (W7)$$

任意の正規直交座標系で表わせば

$$C_G = A_0 + \frac{1}{3}(v_1 + v_2) \quad (W8)$$

v_1, v_2 の代わりに A_1, A_2 で表わすと

$$C_G = A_0 + \frac{1}{3}(A_1 - A_0) + \frac{1}{3}(A_2 - A_0)$$

$$C_G = \frac{1}{3}(A_0 + A_1 + A_2) \quad (W9)$$

v_1, v_2 に対して (W7) で表わされる点 C_G をいくつか描いてみましょう。

C_G の幾何学的特性を見い出せるかもしれません。

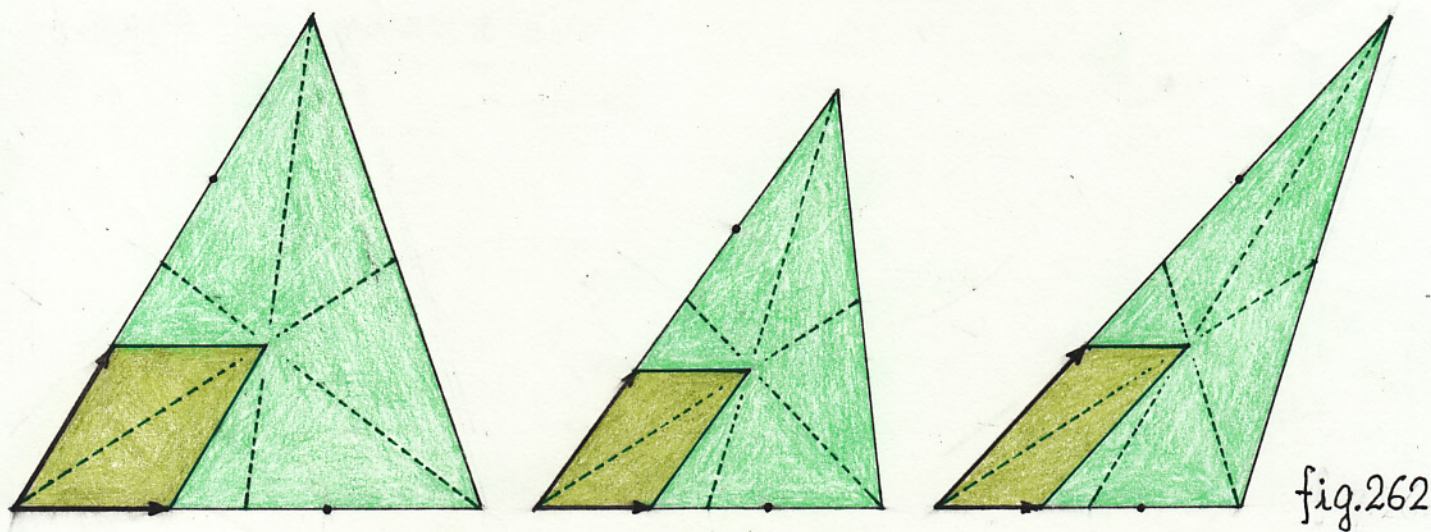


fig.262

【P576】3 角形の重心の周辺 (続き)

貴方はもう気付きましたね。というより、知っているはずだと云うべきでしょうか？ 下図の 3 個の Vector v_{G1}, v_{G2}, v_{G3} を用いて確認しましょう。

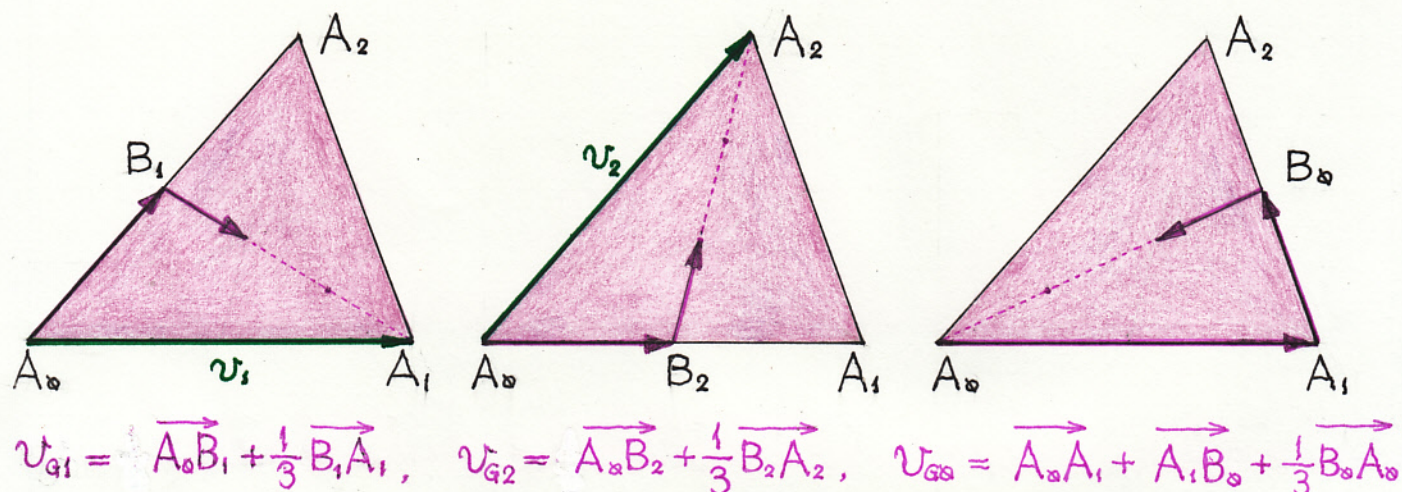


fig.263

上図で、点 B_1, B_2, B_3 はそれぞれ、辺 A_2A_0, A_0A_1, A_1A_2 の中点です。

v_{G1}, v_{G2}, v_{G3} をそれぞれ、 v_1, v_2 で表現しよう。予想通りでしょうか？

$$\begin{aligned} v_{G1} &= \overrightarrow{A_0B_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{A_0B_1} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_0A_1} - \overrightarrow{A_0B_1}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{A_0A_1} + (1 - \frac{1}{3})\overrightarrow{A_0B_1} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{A_0A_1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_2} \end{aligned}$$

$$v_{G1} = \frac{1}{3}(v_1 + v_2) \quad (W10)$$

$$\begin{aligned} v_{G2} &= \overrightarrow{A_0B_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B_2A_2} = \overrightarrow{A_0B_2} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_0A_2} - \overrightarrow{A_0B_2}) \\ &= (1 - \frac{1}{3})\overrightarrow{A_0B_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A_0A_2} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A_0A_2} \end{aligned}$$

$$v_{G2} = \frac{1}{3}(v_1 + v_2) \quad (W11)$$

$$\begin{aligned}
 v_{G0} &= \overrightarrow{A_0 A_1} + \overrightarrow{A_1 B_0} + \frac{1}{3} \overrightarrow{B_0 A_0} \\
 &= \overrightarrow{A_0 A_1} + \overrightarrow{A_1 B_0} - \frac{1}{3} (\overrightarrow{B_0} - \overrightarrow{A_0}) \\
 &= \overrightarrow{A_0 A_1} + \overrightarrow{A_1 B_0} - \frac{1}{3} ((\overrightarrow{B_0} - \overrightarrow{A_1}) + (\overrightarrow{A_1} - \overrightarrow{A_0})) \\
 &= \overrightarrow{A_0 A_1} + \overrightarrow{A_1 B_0} - \frac{1}{3} \overrightarrow{A_1 B_0} - \frac{1}{3} \overrightarrow{A_0 A_1} \\
 &= (1 - \frac{1}{3}) \overrightarrow{A_0 A_1} + (1 - \frac{1}{3}) \overrightarrow{A_1 B_0} \\
 &= \frac{2}{3} v_1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (v_2 - v_1)
 \end{aligned}$$

$$v_{G0} = \frac{1}{3} (v_1 + v_2) \quad (W12)$$

(W10), (W11), (W12)より, fig.263の v_{G1}, v_{G2}, v_{G0} は, 予想通り

$$v_{G1} = v_{G2} = v_{G0} = \frac{1}{3} (v_1 + v_2) \quad (W13)$$

(W8), (W9), (W13)を定理として再記しておきます。

3角形の重心

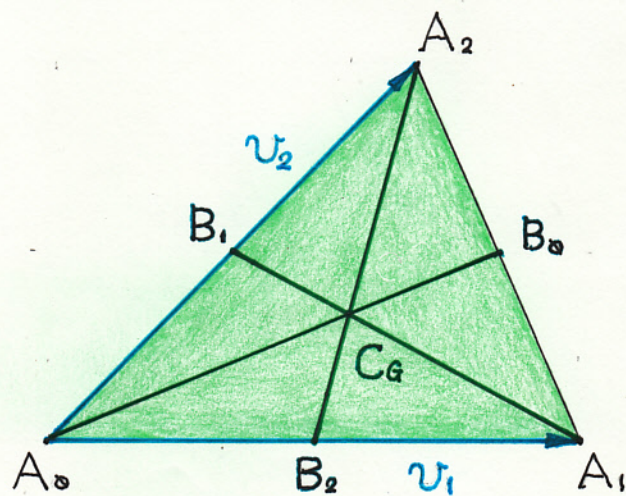


fig. 264

縮退していない2次元単体 $\mathcal{S}_2(A_0; v_1, v_2)$ (3角形 $A_0A_1A_2$)の

【P578】 3 角形の重心の周辺 (続き)

重心を C_G とします。辺 A_0A_1 , 辺 A_1A_2 , 辺 A_2A_0 の中点をそれぞれ B_2 , B_0 , B_1 とします。このとき次が成り立ちます。

線分 A_0B_0 , 線分 A_1B_1 , 線分 A_2B_2 は 1 点で交わり、
その交点は 重心 C_G に一致します。 .1)

$$\overline{A_0C_G} : \overline{C_GB_0} = \overline{A_1C_G} : \overline{C_GB_1} = \overline{A_2C_G} : \overline{C_GB_2} = 2 : 1 \quad .2)$$

$$C_G = A_0 + \frac{1}{3}(v_1 + v_2) \quad .3)$$

$$C_G = \frac{1}{3}(A_0 + A_1 + A_2) \quad .4)$$

定理(197)

線分 A_0B_0 , A_1B_1 , A_2B_2 が同一点で交わることを直観的に理解するため
だけならば 下図で十分でしょう。説明はしません。

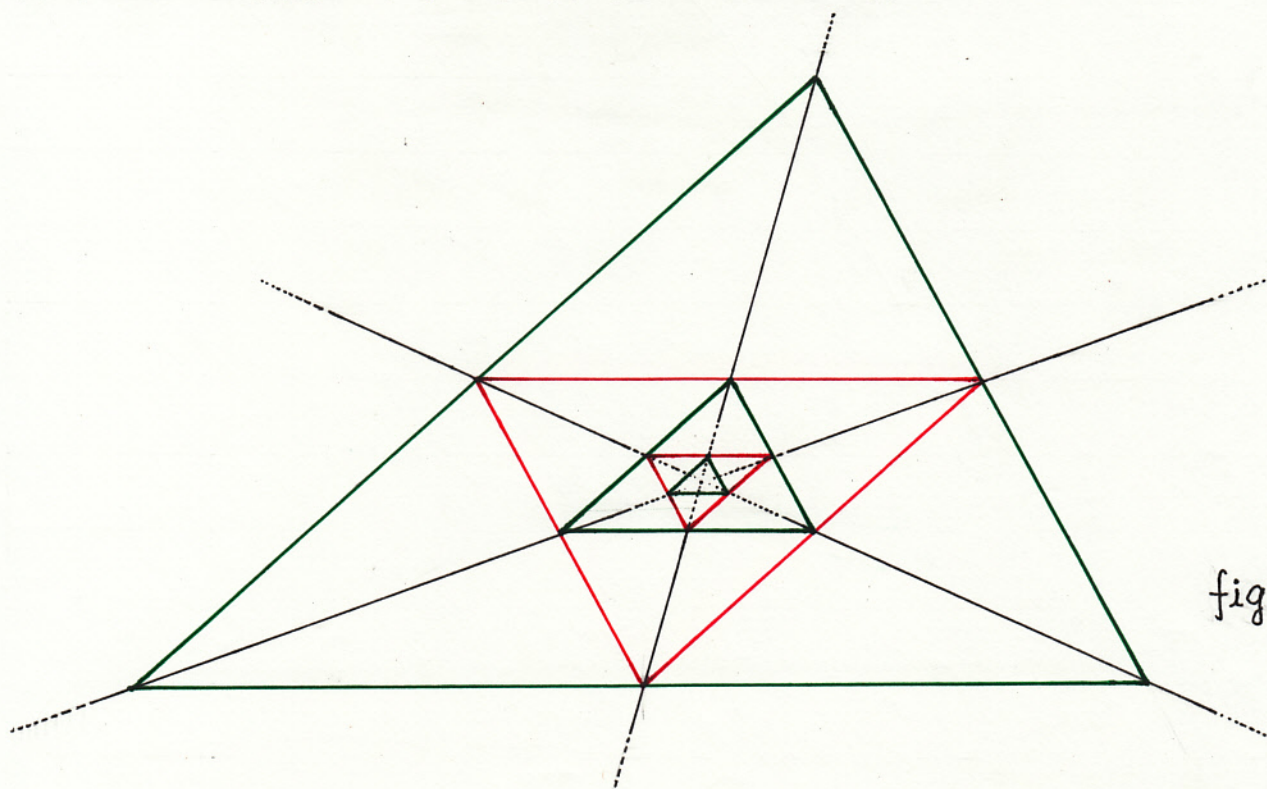
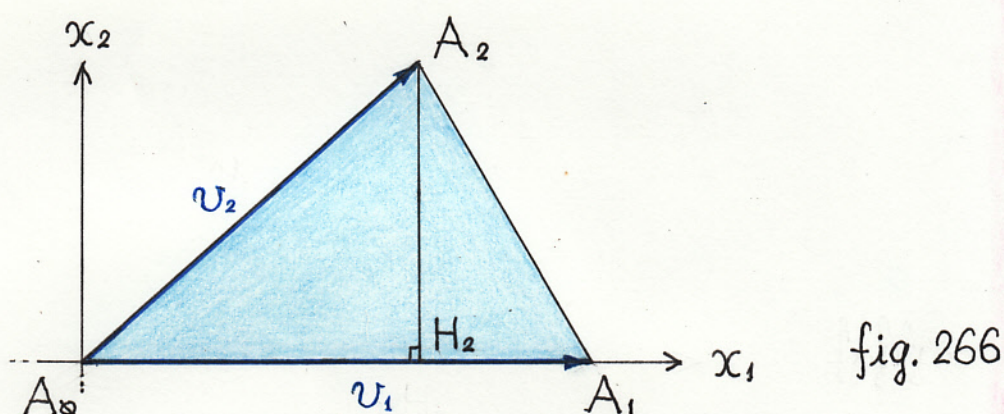


fig. 265

3角形 $A_0A_1A_2$ の垂心 C_P について考察しましょう。 C_P の添字“P”はPerpendicularの“P”のもりです。Verticalの“V”にしようかとも迷いましたが“P”を選びました。

重心 C_G を議論した際、fig.260の右図の正規直交座標系を(一時的にではありますが)用いましたね。今回もそうしましょう。この座標系を3角形 $A_0A_1A_2$ の標準座標系と呼ぶことにします。後々の議論でも用いられるかもしれません。定義しておきます。

3角形の標準座標系の定義

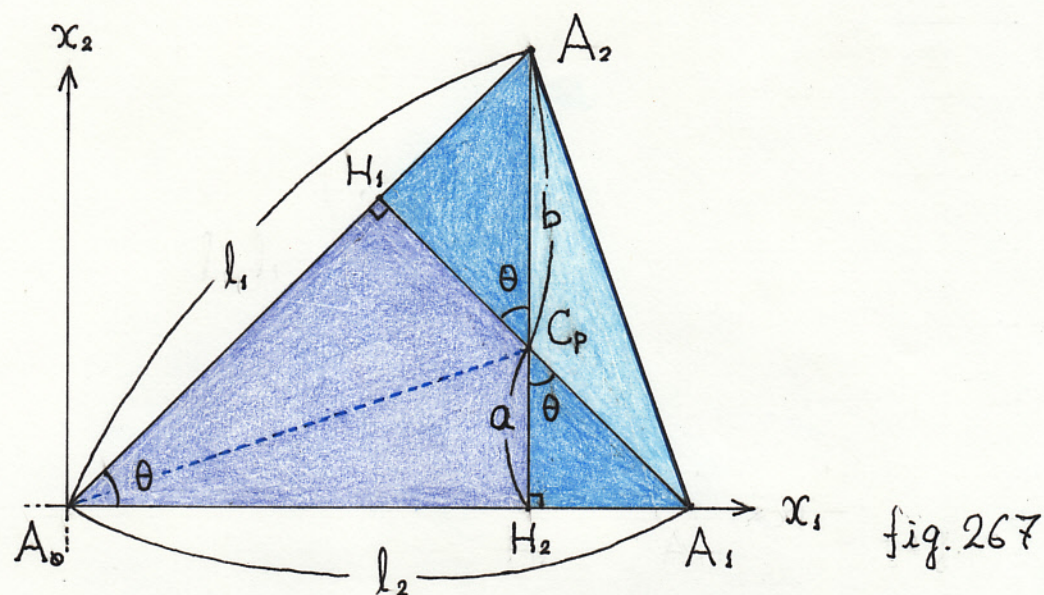


上図の2次元単体 $\mathcal{S}_2(A_0; v_1, v_2)$ (3角形 $A_0A_1A_2$)において、頂点 A_2 から辺 A_0A_1 (の延長線)上に降ろした垂線の足を H_2 とします。始頂点 A_0 を原点とし、Vector v_1 方向を x_1 方向とし、Vector $\vec{H_2A_2}$ 方向を x_2 方向とする、正規直交座標系を、3角形 $A_0A_1A_2$ の標準座標系と呼びます。

定義(198)

上記の定義は縮退していない3角形を前提にしていることに注意しよう。標準座標系は一般の n 次元単体においても拡張定義できます。そしてそれは既に、『 n 次元平行体, 単体の体積』で用いられてきたね。

【P580】 3 角 形 の 重 心 の 周 辺 (続 き)



3 角 形 $A_0A_1A_2$ は 縮 退 し て い な い 鋭 角 3 角 形 で あ る と し ま す 。 鈍 角 3 角 形 の 場 合 も ほ と ん ど 同 じ 議 論 に な る は ず で す か ら 省 略 し ま す 。

頂 点 A_1 から 辺 A_2A_0 に 降 ろ し た 垂 線 の 足 を H_1 と し 、 頂 点 A_2 から 辺 A_0A_1 に 降 ろ し た 垂 線 の 足 を H_2 と し ま す 。 線 分 A_1H_1 と 線 分 A_2H_2 の 交 点 を C_p と し ま す 。 辺 A_2A_0 , 辺 A_0A_1 の 長 さ を そ れ ぞ れ l_1 , l_2 と し ま す 。 線 分 H_2C_p , 線 分 C_pA_2 の 長 さ を そ れ ぞ れ a , b と し ま す 。 3 角 形 $A_0A_1A_2$ の 始 頂 点 A_0 に お け る 内 角 を θ と し ま す 。 a を l_1, l_2, θ で 表 わ す 式 を 求 め ま う 。 次 が 云 え ま す 。

4 つ の 直 角 3 角 形 、 $\triangle A_1H_1A_0$, $\triangle A_2H_2A_0$, $\triangle A_1H_2C_p$, $\triangle A_2H_1C_p$ は 、 全 て 互 い に 相 似 で す 。 (W14)

こ れ は 自 明 で す ね 。 各 頂 点 は 上 記 の 順 で (相 似) 対 応 し ま す 。 従 っ て 、

$$\angle A_2A_0H_2 = \angle A_1C_pH_2 = \angle A_2C_pH_1 = \theta \quad (W15)$$

直 角 3 角 形 $A_2H_2A_0$ に 注 目 す れ ば 、

$$l_1 \sin \theta = \overline{H_2A_2} = \overline{H_2C_p} + \overline{C_pA_2} = a + b \quad (W16)$$

直 角 3 角 形 $A_1H_1A_0$ と 小 さ い 2 つ の 直 角 3 角 形 $A_1H_2C_p$, $A_2H_1C_p$ に 注 目 し て 、

【P581】 3 角形の重心の周辺 (続き)

$$l_2 \sin \theta = \overline{H_1 A_1} = \overline{H_1 C_P} + \overline{C_P A_1} = b \cos \theta + a \frac{1}{\cos \theta} \quad (W17)$$

(W16) の b を (W17) に代入し、 b を消去し、 a に関して整理します。

$$\begin{aligned} l_2 \sin \theta &= (l_1 \sin \theta - a) \cos \theta + a \frac{1}{\cos \theta} \\ &= a \left(\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta \right) + l_1 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} a = l_2 \sin \theta - l_1 \sin \theta \cos \theta$$

$$a = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (l_2 \sin \theta - l_1 \sin \theta \cos \theta)$$

$$a = l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - l_1 \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \quad (W18)$$

3 頂点 A_0, A_1, A_2 、及び点 C_P の座標値を標準座標系で表現すると、

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta \\ l_1 \sin \theta \end{pmatrix} \quad (W19)$$

$$C_P = \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta \\ l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - l_1 \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \end{pmatrix} \quad (W20)$$

2つのVector、 $\overrightarrow{A_1 A_2}$ 、 $\overrightarrow{A_0 C_P}$ の内積を計算すれば、

$$\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_0 C_P} = (l_1 \cos \theta - l_2, l_1 \sin \theta) \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta \\ l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - l_1 \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \end{pmatrix}$$

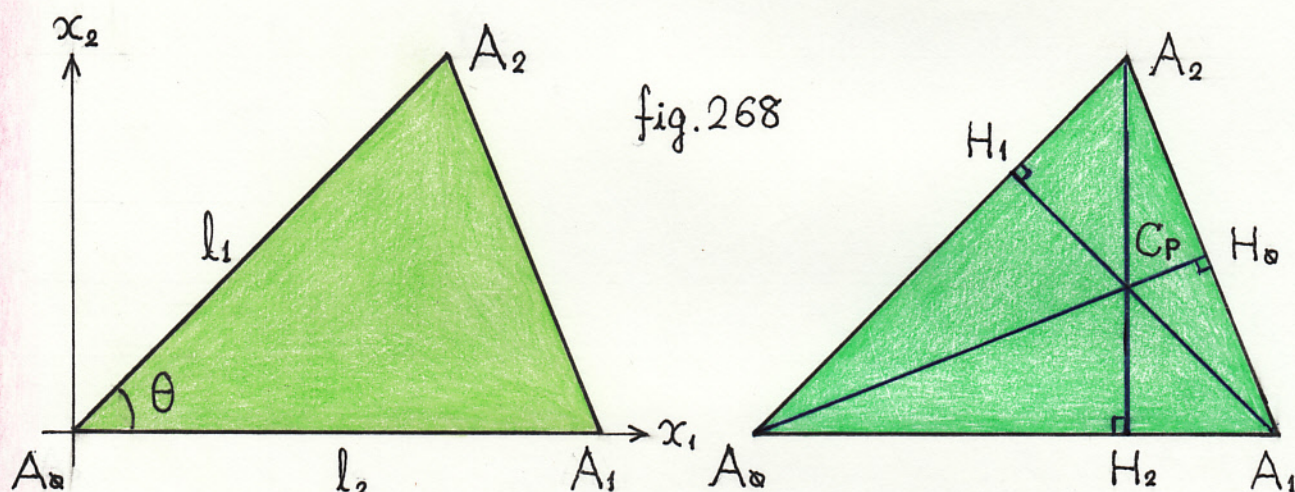
【P582】3角形の重心の周辺 (続き)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_0C_P} &= (l_1 \cos \theta - l_2)(l_1 \cos \theta) + (l_1 \sin \theta)(l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - l_1 \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}) \\ &= l_1^2 \cos^2 \theta - l_1 l_2 \cos \theta + l_1 l_2 \cos \theta - l_1^2 \cos^2 \theta\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_0C_P} = 0 \quad (W21)$$

(W21) が求めたかった式です。この幾何学的意味は、直線 A_1A_2 と直線 A_0C_P が直交することです。定理としてまとめておきましょう。

3角形の垂心



縮退していない3角形 $A_0A_1A_2$ において、頂点 A_0 から直線 A_1A_2 に降ろした垂線の足を H_0 とします。 H_1, H_2 も同様に定めます。 fig.268 の右の絵を参照して下さい。このとき、3直線 A_0H_0, A_1H_1, A_2H_2 は同一点 C_P で交わります。 C_P を3角形 $A_0A_1A_2$ の垂心と呼びます。

l_1, l_2, θ を fig.268 の左の絵のように定めるとき、標準座標系での C_P は、

$$C_P = {}^t \left(l_1 \cos \theta, l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - l_1 \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right) \quad .1)$$

定理(199)

【P583】 1月10日(月) 3角形の重心の周辺(続き)

垂心 C_P が存在すること、つまり3直線 A_0H_0, A_1H_1, A_2H_2 が1点で交わるということ、直観的に納得させてくれる絵が存在します。下図です。3角形 $B_0B_1B_2$ の外接円の中心は、3角形 $A_0A_1A_2$ の垂心に一致します。3角形 $A_0A_1A_2$ と3角形 $B_0B_1B_2$ の関係は説明する必要は無いでしょう。

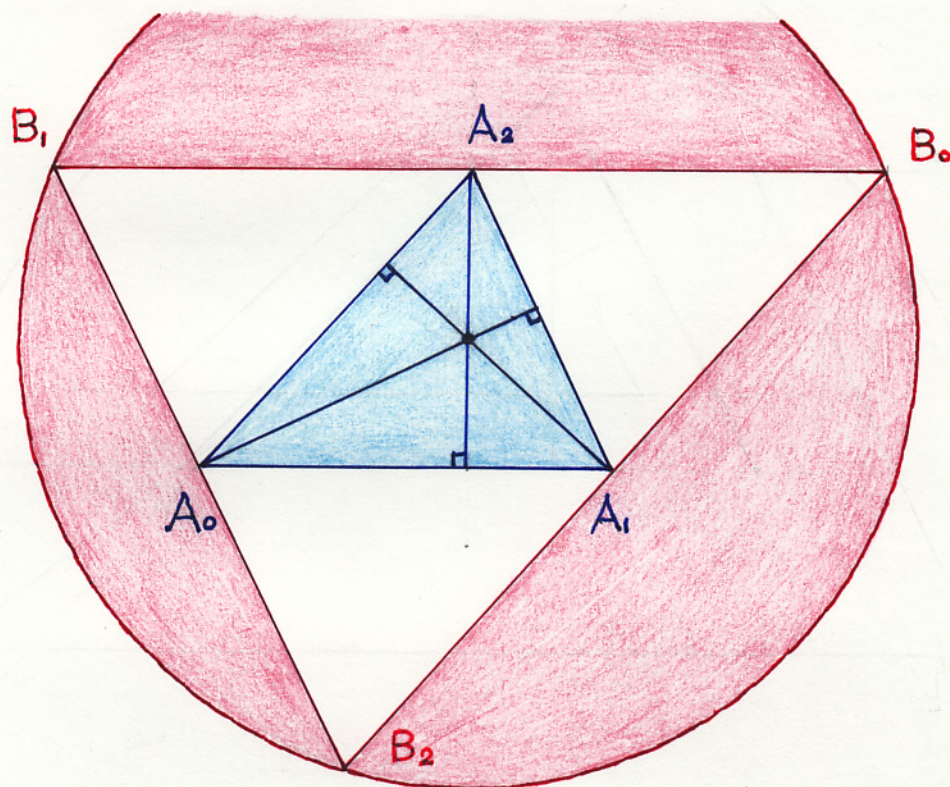


fig. 269

fig. 268の左図を御覧下さい。3角形 $A_0A_1A_2$ に関する諸量を、標準座標系において、 l_1, l_2, θ を用いて表現することを

l_1, l_2, θ 表現

と呼ぶことにします。(199.1)は垂心 C_P の l_1, l_2, θ 表現です。

3角形 $A_0A_1A_2$ の面積 S_{Δ} や外接円の半径 R_0 などのようなScalar量であっても、 l_1, l_2, θ で表わされているならば l_1, l_2, θ 表現と呼びます。

S_{Δ} と R_0 の l_1, l_2, θ 表現を求めてみましょう。

sV_2 は自明ですね。Heronの公式と、才2余弦公式から導くのが筋でしょうが、学校で教えられた“底辺掛け高さ割る2”を用いることにします。これは既にP574の(W2)で用いてしまっているのです。

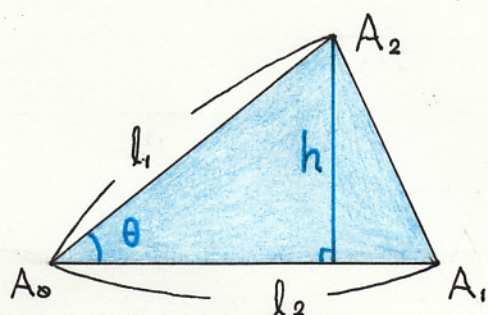


fig.270

$$sV_2 = \frac{1}{2} l_2 h = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin \theta \quad (W22)$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ ですから $\sin \theta \geq 0$ です。上記の sV_2 が非負であることは保証されています。

Heronの公式(190.1)と上記の(W22)を比べると、どちらも一長一短があります。Heronの表現は l_0, l_1, l_2 に関する対称式ですから頂点 A_0, A_1, A_2 を平等に扱っていますが、やや複雑です。それに対して(W22)は A_0 を特別扱いしていますが、とても単純です。解析関数 $\sin \theta$ を用いたのが簡明になったのでしょうか。大げさに云えば“解析幾何学”です。 $l_1 l_2 \theta$ 表現は全て、解析幾何学的表現と云うことになります。

次に、外接円の半径 R_0 の $l_1 l_2 \theta$ 表現を求めます。但し3角形 $A_0 A_1 A_2$ は縮退していないものとします。 $\sin \theta > 0$ です。(194.3), (W22), 才2余弦公式(92.4)より、

$$R_0 = \frac{l_0 l_1 l_2}{4 sV_2} = \frac{l_0 l_1 l_2}{4} \cdot \frac{2}{l_1 l_2 \sin \theta} = \frac{l_0}{2 \sin \theta}$$

$$R_0 = \frac{1}{2 \sin \theta} \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos \theta} \quad (W23)$$

【P585】 3 角形の重心の周辺 (続き)

ついでに、3 角形 $A_0A_1A_2$ の内接円の半径 R_1 の l_1, l_2, θ 表現も求めてみましょう。(194.1), (W22), 才2 余弦公式より、

$$R_1 = \frac{sV_2}{r_0 + r_1 + r_2} = \frac{2}{l_0 + l_1 + l_2} \cdot \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin \theta$$

$$R_1 = \frac{l_1 l_2 \sin \theta}{l_1 + l_2 + \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \theta}} \quad (W24)$$

分母に $\sqrt{\quad}$ が現われないように整理することも出来ますが、今はこのまゝにしておきます。 R_0, R_1 と l_1, l_2, θ 表現とあまり相性がよくないですね。(W22), (W23), (W24) を定理として再記しておきましょう。

sV_2, R_0, R_1 の l_1, l_2, θ 表現

$$sV_2 = \frac{1}{2} l_1 l_2 \sin \theta \quad .1)$$

$$R_0 = \frac{1}{2 \sin \theta} \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \theta} \quad .2)$$

$$R_1 = \frac{l_1 l_2 \sin \theta}{l_1 + l_2 + \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \theta}} \quad .3)$$

定理(200)

縮退していない 3 角形 $A_0A_1A_2$ の重心 C_G , 外接円の中心 C_0 , 内接円の中心 C_1 の l_1, l_2, θ 表現を求めよう。まず C_G は、

$$C_G = \frac{1}{3}(v_2 + v_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} l_1 \cos \theta + \frac{1}{3} l_2 \\ \frac{1}{3} l_1 \sin \theta \end{pmatrix} \quad (W25)$$

【P586】 1月12日(水) 3角形の重心の周辺(続き)

C_o は、

$$C_o = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} l_2 \\ a \end{bmatrix}$$

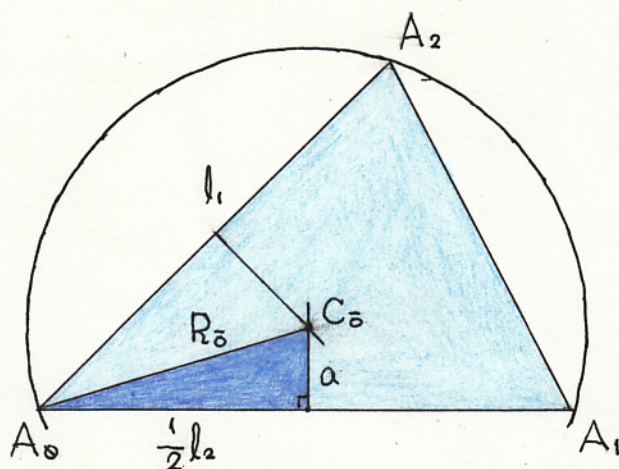


fig.271

$$\begin{aligned} a^2 &= R_o^2 - \left(\frac{1}{2} l_2\right)^2 \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 \theta} (l_1^2 + l_2^2 - 2 l_1 l_2 \cos \theta) - \frac{1}{4} l_2^2 \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 \theta} (l_1^2 - 2 l_1 l_2 \cos \theta + (1 - \sin^2 \theta) l_2^2) \\ &= \frac{1}{4 \sin^2 \theta} (l_1 - l_2 \cos \theta)^2 \end{aligned}$$

ところで、鋭角3角形の場合 $l_1 - l_2 \cos \theta$ は正だから

$$a = \frac{1}{2 \sin \theta} (l_1 - l_2 \cos \theta)$$

$$C_o = {}^t \left[\frac{1}{2} l_2, \frac{1}{2 \sin \theta} (l_1 - l_2 \cos \theta) \right] \quad (W26)$$

C_I は、

$$C_I = \begin{bmatrix} r_o \\ R_I \end{bmatrix}$$

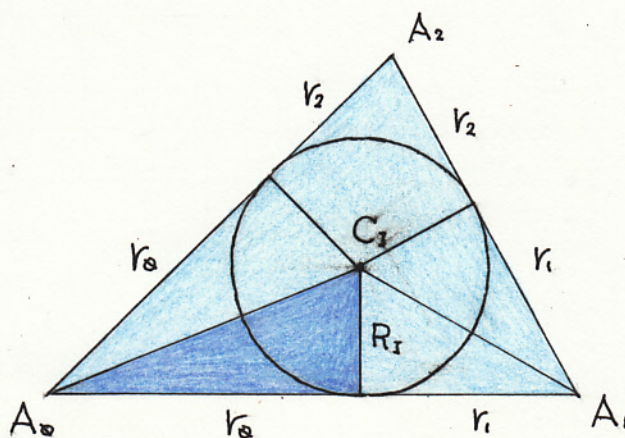


fig.272

【P587】 3 角形の重心の周辺 (続き)

$$r_o = \frac{1}{2} (l_1 + l_2 - l_o)$$

$$C_I = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} (l_1 + l_2 - \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \theta}) \\ \frac{l_1l_2 \sin \theta}{l_1 + l_2 + \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \theta}} \end{array} \right] \quad (W27)$$

(W25), (W26), (W27) を定理として再記しておきます。 C_P も再記します。

C_P, C_G, C_o, C_I の l_1, l_2, θ 表現

$$C_P = {}^t \left[l_1 \cos \theta, l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - l_1 \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right] \quad .0)$$

$$C_G = {}^t \left[\frac{1}{3} l_1 \cos \theta + \frac{1}{3} l_2, \frac{1}{3} l_1 \sin \theta \right] \quad .1)$$

$$C_o = {}^t \left[\frac{1}{2} l_2, \frac{1}{2 \sin \theta} (l_1 - l_2 \cos \theta) \right] \quad .2)$$

$$C_I = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2} (l_1 + l_2 - \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \theta}) \\ \frac{l_1l_2 \sin \theta}{l_1 + l_2 + \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \theta}} \end{array} \right] \quad .3)$$

定理(201)

C_I の x_2 成分、つまり R_I はやはり、分母の $\sqrt{\quad}$ を消去しておくべきで
 くれぬ。

(201) を用いて、2つの Vector $\overrightarrow{C_G C_P}, \overrightarrow{C_G C_o}$ を計算しよう。

【P588】 3 角形の重心の周辺 (続き)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C_G C_P} &= \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta - \frac{1}{3} l_1 \cos \theta - \frac{1}{3} l_2 \\ l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - l_1 \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{3} l_1 \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} l_2 + \frac{2}{3} l_1 \cos \theta \\ l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{3} l_1 \frac{1}{\sin \theta} (3 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{C_G C_P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} l_2 + \frac{2}{3} l_1 \cos \theta \\ l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{3} l_1 \frac{1 + 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta} \end{pmatrix} \quad (W28)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{C_G C_{\bar{O}}} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} l_2 - \frac{1}{3} l_1 \cos \theta - \frac{1}{3} l_2 \\ \frac{1}{2 \sin \theta} (l_1 - l_2 \cos \theta) - \frac{1}{3} l_1 \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} l_2 - \frac{1}{3} l_1 \cos \theta \\ -\frac{1}{2} l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{6} l_1 \frac{1}{\sin \theta} (3 - 2 \sin^2 \theta) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{C_G C_{\bar{O}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} l_2 - \frac{1}{3} l_1 \cos \theta \\ -\frac{1}{2} l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{6} l_1 \frac{1 + 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta} \end{pmatrix} \quad (W29)$$

(W28), (W29) を比較すれば

$$\overrightarrow{C_G C_P} = -2 \overrightarrow{C_G C_{\bar{O}}} \quad (W30)$$

C_O, C_G, C_P の関係

縮退していない3角形 $A_0 A_1 A_2$ の、外接円の中心を C_O 、重心を C_G 、垂心を C_P とします。また、3角形 $A_0 A_1 A_2$ は正3角形でもないとします。このとき、2つのVector $\overrightarrow{C_G C_P}, \overrightarrow{C_G C_O}$ の l_1, l_2, θ 表現は、

$$\overrightarrow{C_G C_P} = -2 \overrightarrow{C_G C_O} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} l_2 + \frac{2}{3} l_1 \cos \theta \\ l_2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{3} l_1 \frac{1 + 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta} \end{pmatrix} \quad .1)$$

従って、3点 C_O, C_G, C_P は、この順で同一直線上にあり、 .2)

$$\overline{C_O C_G} : \overline{C_G C_P} = 1 : 2 \quad .3)$$

定理(202)

Acute Case

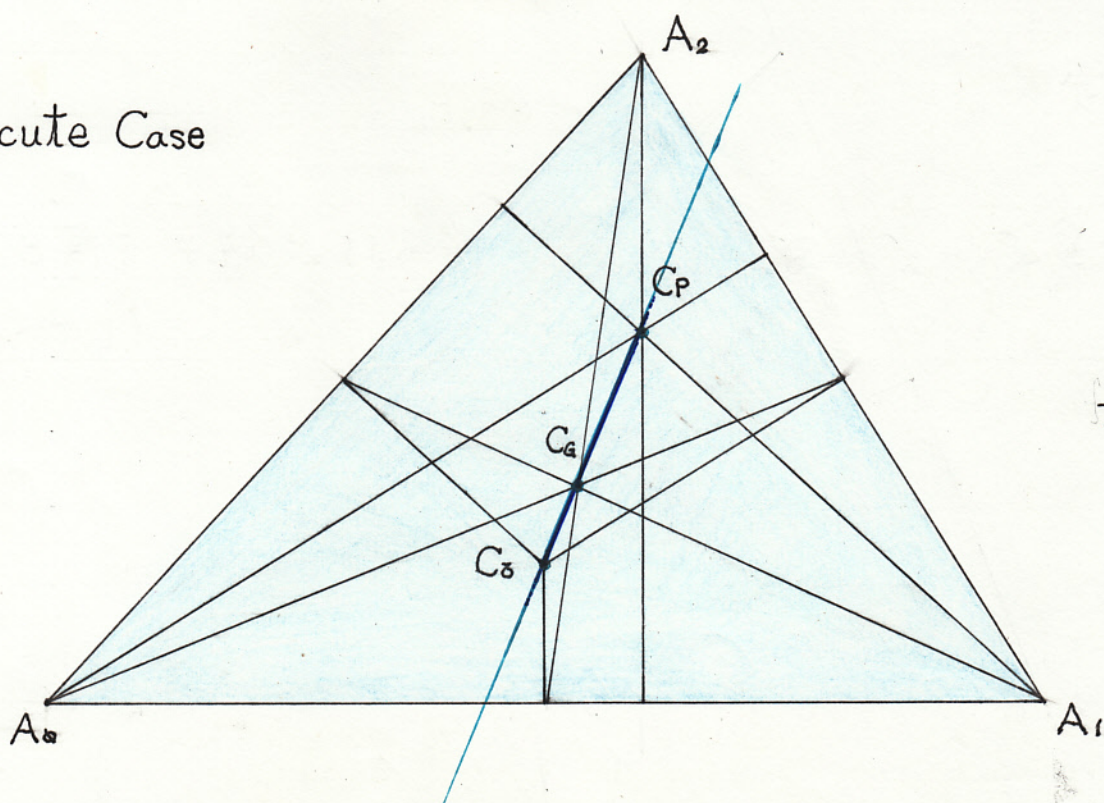


fig.273.1

【P590】 3 角形の重心の周辺 (続き)

Obtuse Case1

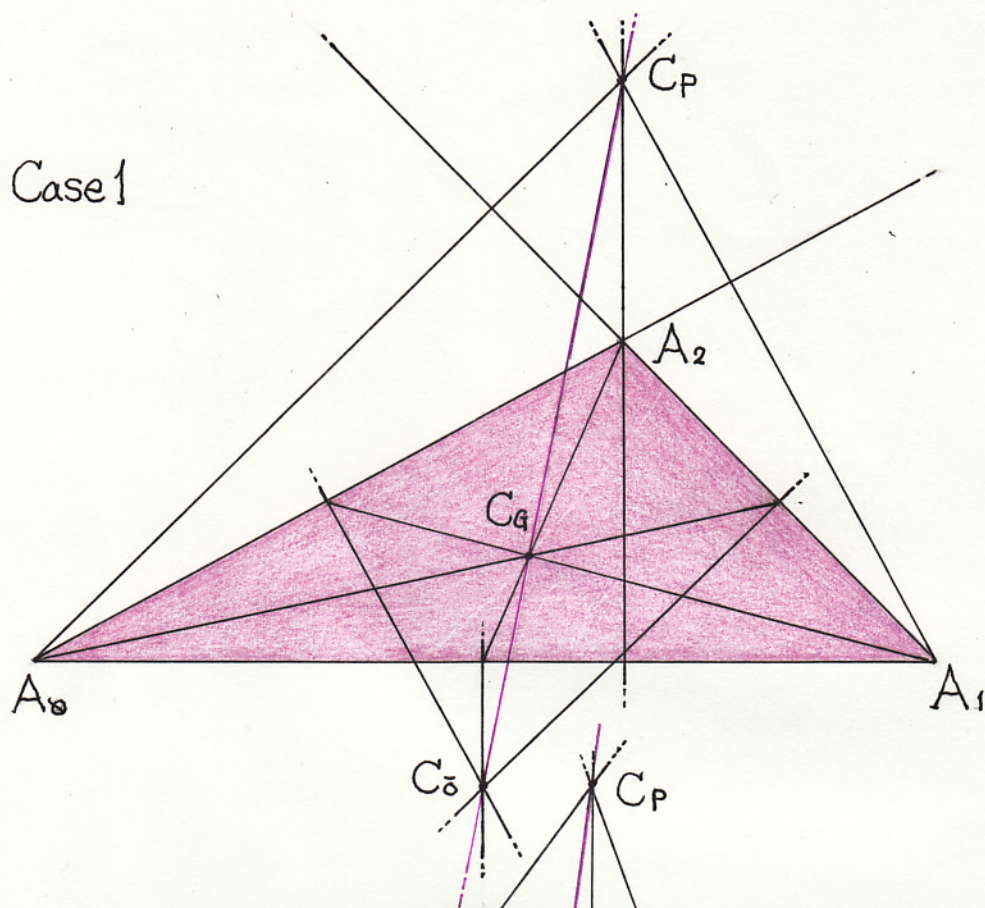


fig.273.2

Obtuse Case2

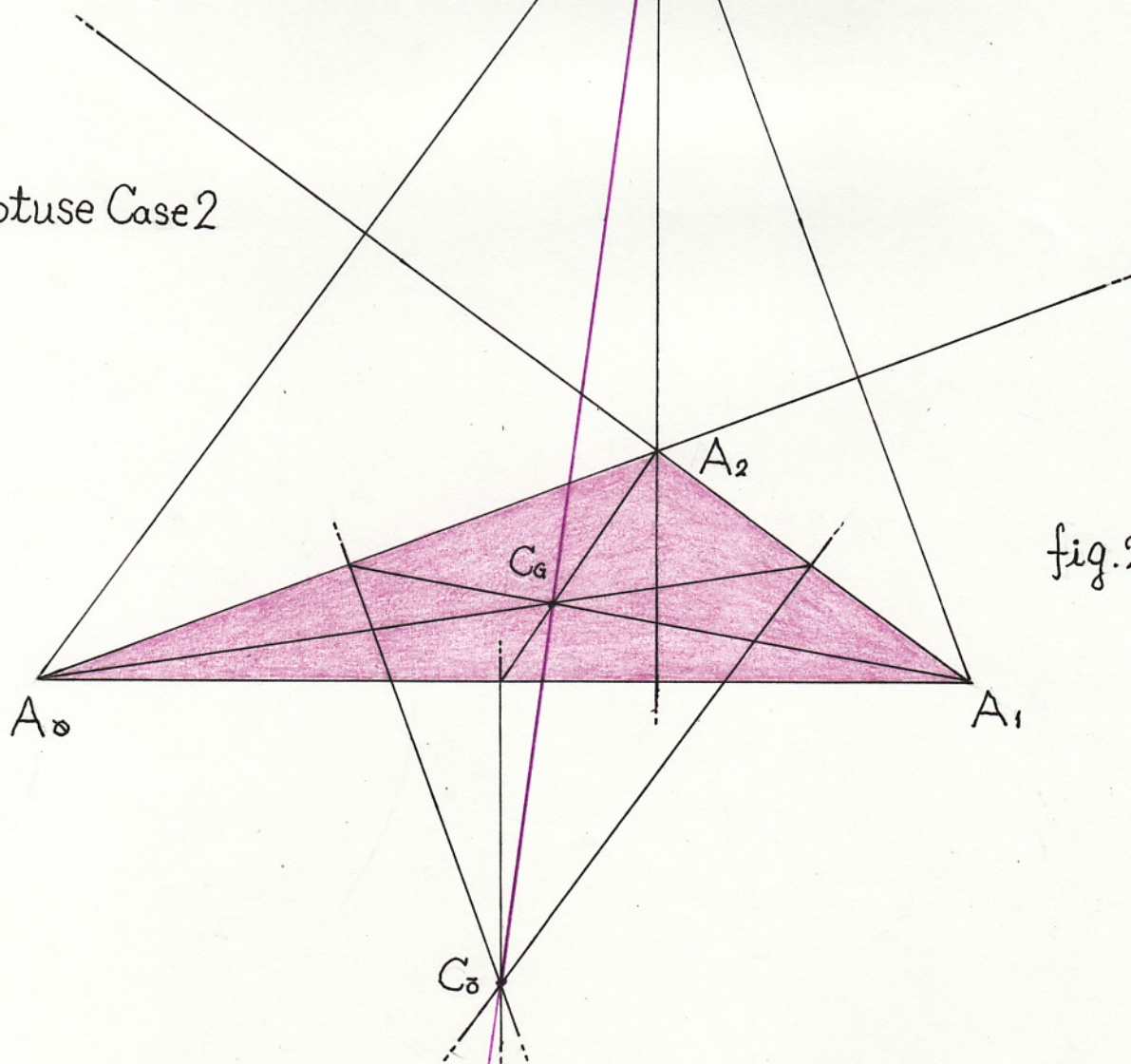


fig.273.3

3角形 $A_0A_1A_2$ の傍心の議論をしましょう。

傍心は3角形の内接円の中心と似た概念です。重心とはあまり関係が無さそうです。本来ならば、『3角形の面積の周辺』で論じるべきだったか、さもなくば、それ自身を主題とした『3角形の傍心の周辺』として論じるべきだと思われるかもしれません。でも、傍心は垂心とも関連します。そこで、当節で論じることに決めました。

3角形 $A_0A_1A_2$ に対して、Vector v_1, v_2 、Scalar l_0, l_1, l_2 を、今までと同じように、下図のように定義します。これは確認です。これらを用いて傍心の位置や、傍接円の半径を論じることになります。



$$l_0 = |v_2 - v_1|, \quad l_1 = |v_2|, \quad l_2 = |v_1| \text{ です。}$$

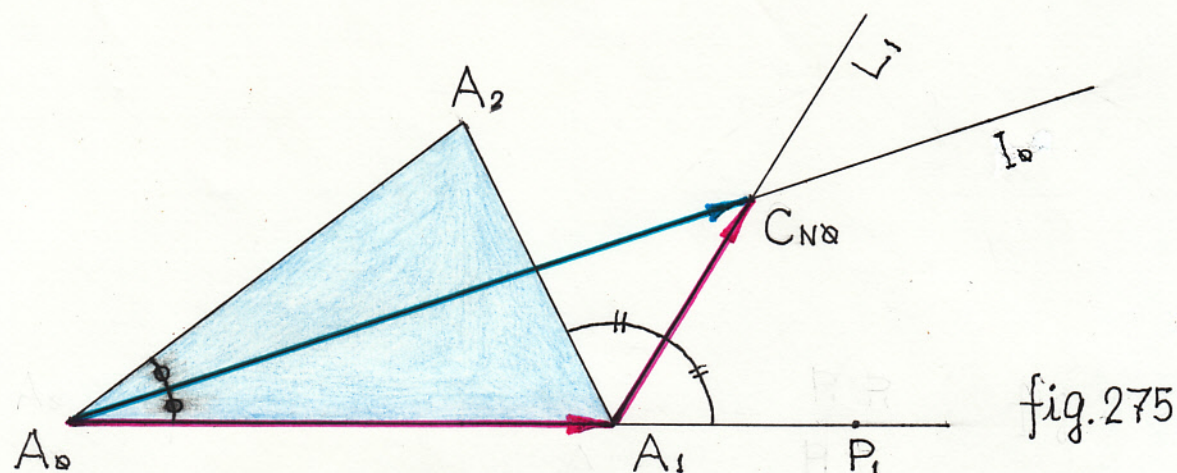
これまでと同じように、3角形 $A_0A_1A_2$ は縮退していないものとします。つまり $\{v_1, v_2\}$ は1次独立だとします。このことは、

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \beta_1 \text{ and } \alpha_2 = \beta_2 \quad (W31)$$

が成り立つということです。(W31)は実際 利用されます。

1つの3角形 $A_0A_1A_2$ に対して傍心は3個存在します。それぞれ、“頂点 A_0 に^{あいたい}相対する傍心”、“頂点 A_1 に相対する傍心”、“頂点 A_2 に相対する傍心”と呼ぶことにします。

まず、頂点 A_0 に相対する傍心について考案しよう。



$\angle A_2 A_0 A_1$ の 2 等分線を I_0 とします。直線 $A_0 A_1$ 上の A_1 側のかたな 1 点を P_1 とします。 $\angle A_2 A_1 P_1$ の 2 等分線を L_1 とします。2 直線 I_0, L_1 の交点を C_{N0} とします。 C_{N0} を求めましょう。

$$\overrightarrow{A \otimes C_{N\emptyset}} = \overrightarrow{A \otimes A_1} + \overrightarrow{A_1 \otimes C_{N\emptyset}} \quad (W32)$$

$$\overrightarrow{A \otimes C_{No}} = \alpha \left(\frac{v_1}{|v_1|} + \frac{v_2}{|v_2|} \right)$$

$$\overrightarrow{A_{OC_{No}}} = \frac{\alpha}{l_2} v_1 + \frac{\alpha}{l_1} v_2 \quad (W33)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0 A_1} + \overrightarrow{A_1 C_{N0}} &= v_1 + \beta \left(\frac{v_1}{|v_1|} + \frac{v_2 - v_1}{|v_2 - v_1|} \right) \\ &= v_1 + \frac{\beta}{l_2} v_1 + \frac{\beta}{l_0} v_2 - \frac{\beta}{l_0} v_1 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{A_0 A_1} + \overrightarrow{A_1 C_{N0}} = \left(1 + \frac{\beta}{l_2} - \frac{\beta}{l_0}\right) v_1 + \frac{\beta}{l_0} v_2 \quad (W34)$$

(W32), (W33), (W34) 及び (W31) より、 α, β に関する連立 1 次方程式が得られます。

【P593】 3 角形の重心の周辺 (続き)

$$\frac{\alpha}{l_2} = 1 + \frac{\beta}{l_2} - \frac{\beta}{l_0}, \quad \frac{\alpha}{l_1} = \frac{\beta}{l_0}$$

これを解けば、

$$\alpha = \frac{l_1 l_2}{-l_0 + l_1 + l_2} \quad (W35)$$

(W33), (W35) より、

$$\overrightarrow{A_0 C_{N0}} = \frac{l_1}{-l_0 + l_1 + l_2} v_1 + \frac{l_2}{-l_0 + l_1 + l_2} v_2 \quad (W36)$$

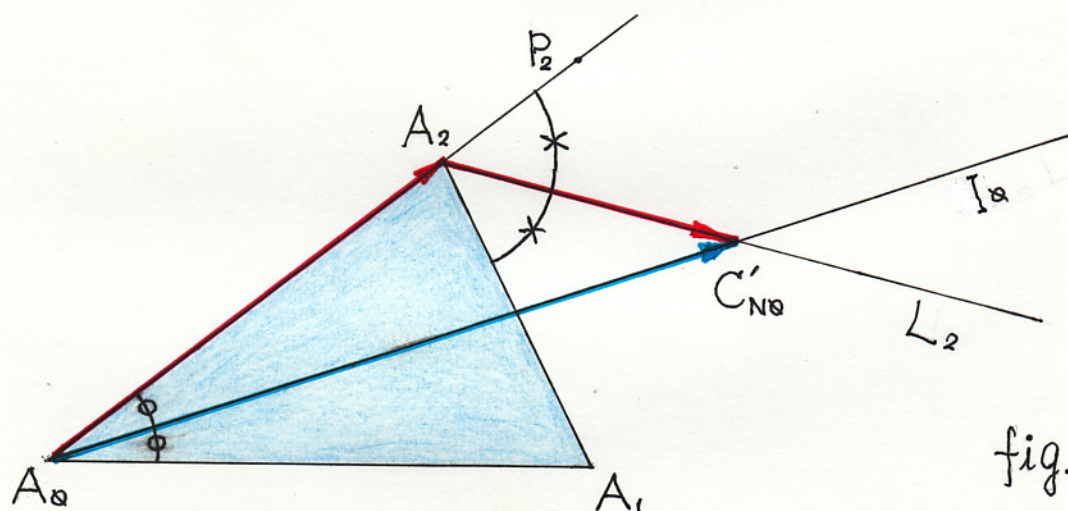


fig.276

直線 A_0A_2 の A_2 側のかってな 1 点を P_2 とします。 $\angle A_1A_2P_2$ の 2 等分線を L_2 とします。 2 直線 I_0, L_2 の交点を C'_{N0} とします。 C'_{N0} を求めよう。

$$\overrightarrow{A_0 C'_{N0}} = \overrightarrow{A_0 A_2} + \overrightarrow{A_2 C'_{N0}} \quad (W37)$$

$$\overrightarrow{A_0 C'_{N0}} = \gamma \left(\frac{v_1}{|v_1|} + \frac{v_2}{|v_2|} \right)$$

$$\overrightarrow{A_0 C'_{N0}} = \frac{\gamma}{l_2} v_1 + \frac{\gamma}{l_1} v_2 \quad (W38)$$

$$\overrightarrow{A_0 A_2} + \overrightarrow{A_2 C'_{N0}} = v_2 + \delta \left(\frac{v_2}{|v_2|} + \frac{v_1 - v_2}{|v_1 - v_2|} \right)$$

【P594】3角形の重心の周辺 (続き)

$$\overrightarrow{A_0 A_2} + \overrightarrow{A_2 C'_{N0}} = v_2 + \frac{\delta}{l_1} v_2 + \frac{\delta}{l_0} v_1 - \frac{\delta}{l_0} v_2$$

$$\overrightarrow{A_0 A_2} + \overrightarrow{A_2 C'_{N0}} = \frac{\delta}{l_0} v_1 + \left(1 + \frac{\delta}{l_1} - \frac{\delta}{l_0}\right) v_2 \quad (W39)$$

(W37), (W38), (W39) 及び (W31) より

$$\frac{\gamma}{l_2} = \frac{\delta}{l_0}, \quad \frac{\gamma}{l_1} = 1 + \frac{\delta}{l_1} - \frac{\delta}{l_0}$$

これを解けば、

$$\gamma = \frac{l_1 l_2}{-l_0 + l_1 + l_2} \quad (W40)$$

(W35), (W40) より $\alpha = \gamma$. 従って, (W33), (W38) より,

$$\overrightarrow{A_0 C_{N0}} = \overrightarrow{A_0 C'_{N0}} \quad (W41)$$

よって $C_{N0} = C'_{N0}$. つまり 3直線 I_0, L_1, L_2 は同一点 C_{N0} で交わります. C_{N0} を 3角形 $A_0 A_1 A_2$ の頂点 A_0 に相対する傍心と呼びます.

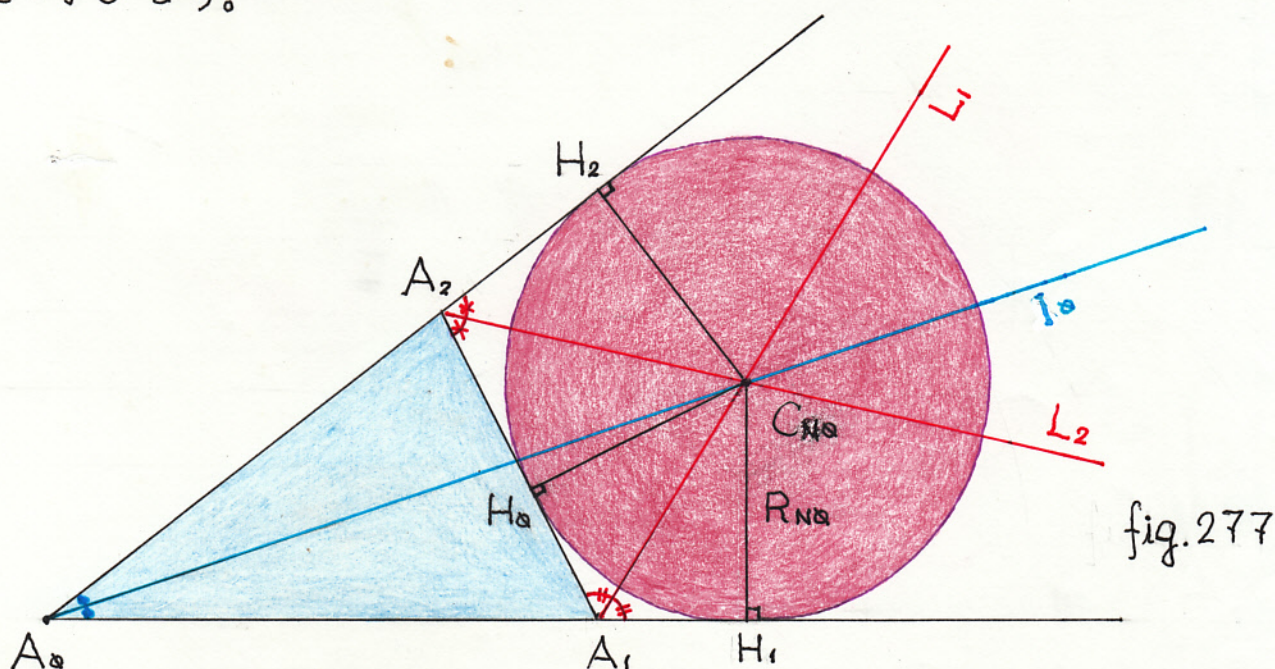


fig.277を御覧下さい。 C_{NO} から、直線 A_0A_1, A_1A_2, A_2A_0 に降ろした垂線の足を、それぞれ H_1, H_0, H_2 とします。 $\overline{C_{NO}H_1} = R_{NO}$ とします。

直角3角形 $A_1H_1C_{NO}, A_1H_0C_{NO}$ は互いに合同です。また、直角3角形 $A_2H_0C_{NO}, A_2H_2C_{NO}$ も互いに合同です。従って、

$$R_{NO} = \overline{C_{NO}H_1} = \overline{C_{NO}H_0} = \overline{C_{NO}H_2} \quad (W42)$$

このことは、 C_{NO} を中心とし R_{NO} を半径とする円は、3直線 A_0A_1, A_1A_2, A_2A_0 全てに接することを意味しています。この円のことを、頂点 A_0 に相対する傍接円と呼びます。 R_{NO} を求めよう。

3角形 $A_0A_1A_2$ の標準座標系を用いると、

$$R_{NO} = \overline{C_{NO}H_1} = C_{NO}|_2$$

ここで、 $P|_2$ は点 P の、標準座標系でのオ2座標値を意味することとします。よって、(W36)より

$$R_{NO} = \frac{1}{-l_0 + l_1 + l_2} (l_1 v_1|_2 + l_2 v_2|_2)$$

ここで、 $\angle A_2A_0A_1 = \theta$ とおくと、

$$v_1|_2 = 0, \quad v_2|_2 = l_1 \sin \theta$$

従って、

$$R_{NO} = \frac{l_1 l_2}{-l_0 + l_1 + l_2} \sin \theta \quad (W43)$$

また、オ2余弦公式より、

$$l_0^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos \theta \quad (W44)$$

(W43), (W44) 及び、 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ より、

【P596】3角形の重心の周辺(続き)

$$\left(\frac{-l_0+l_1+l_2}{l_1l_2}R_{No}\right)^2 + \left(\frac{l_1^2+l_2^2-l_0^2}{2l_1l_2}\right)^2 = 1$$

面積 S_2 のHeronの公式を求めたときとほとんど同じ計算になりますが、省略しないで実行しましょう。

$$\begin{aligned} 2^2(-l_0+l_1+l_2)^2R_{No}^2 &= 4l_1^2l_2^2 - (l_1^2+l_2^2-l_0^2)^2 \\ &= (2l_1l_2+l_1^2+l_2^2-l_0^2)(2l_1l_2-l_1^2-l_2^2+l_0^2) \\ &= ((l_1+l_2)^2-l_0^2)(l_0^2-(l_1-l_2)^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^2(-l_0+l_1+l_2)^2R_{No}^2 &= (l_0+l_1+l_2) \\ &\quad \cdot (-l_0+l_1+l_2)(l_0-l_1+l_2)(l_0+l_1-l_2) \end{aligned}$$

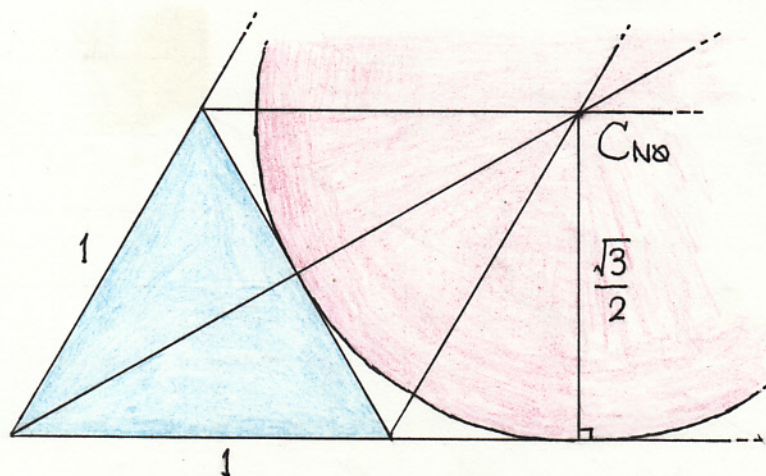
一方、(190.1)より、

$$\begin{aligned} 2^4S_2^2 &= (l_0+l_1+l_2) \\ &\quad \cdot (-l_0+l_1+l_2)(l_0-l_1+l_2)(l_0+l_1-l_2) \end{aligned}$$

従って、

$$R_{No} = \frac{2S_2}{-l_0+l_1+l_2} \quad (W45)$$

1辺の長さが1の正3角形の場合について、(W45)を確認しよう。



$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R_{No} = \frac{2}{-1+1+1}S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

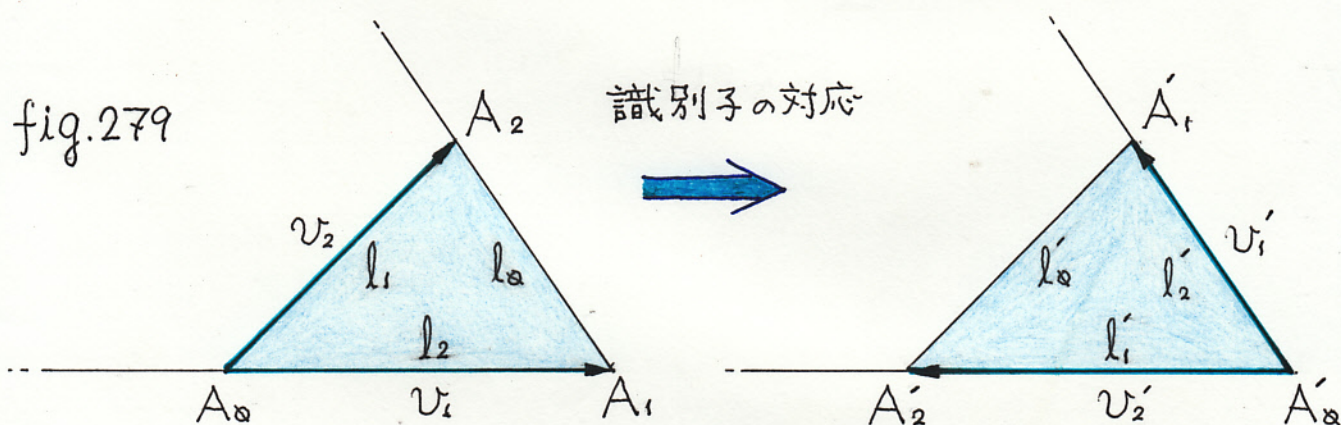
fig. 278

頂点 A_1 に相対する傍心を C_{N1} 、その傍接円の半径を R_{N1} とします。 C_{N2} , R_{N2} も同様に定めます。 C_{N1} , R_{N1} , C_{N2} , R_{N2} を求めよう。

C_{N0} , R_{N0} を求めたのと全く同じ理屈を展開することも出来ますが、それでは長くなるだけで退屈で、誰も読んでくれないでしょう。かといって、結果だけを呈示するというのも、納得し難いことでしょう。

そこで、“識別子の操作”とでも云うべき方法を用いましょう。

$A_0, A_1, A_2, v_1, v_2, l_0, l_1, l_2$ に対して、 $A'_0, A'_1, A'_2, v'_1, v'_2, l'_0, l'_1, l'_2$ を下図のように対応付けることにします。



式で表わすと、

$$v'_1 = v_2 - v_1, \quad v'_2 = -v_1, \quad l'_0 = l_1, \quad l'_1 = l_2, \quad l'_2 = l_0 \quad (W46)$$

3角形 $A'_0A'_1A'_2$ の頂点 A'_0 に相対する傍心を C'_{N0} 、その傍接円の半径を R'_{N0} とすれば

$$C_{N1} = C'_{N0}, \quad R_{N1} = R'_{N0} \quad (W47)$$

これは上図より自明です。従って、(W36), (W45), (W46) より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0 C_{N1}} &= \overrightarrow{A_0 A_1} + \overrightarrow{A_1 C_{N1}} = v_1 + \overrightarrow{A'_0 C'_{N0}} \\ &= v_1 + \frac{1}{-l'_0 + l'_1 + l'_2} (l'_1 v'_1 + l'_2 v'_2) \end{aligned}$$

【P598】 3 角形の重心の周辺 (続き)

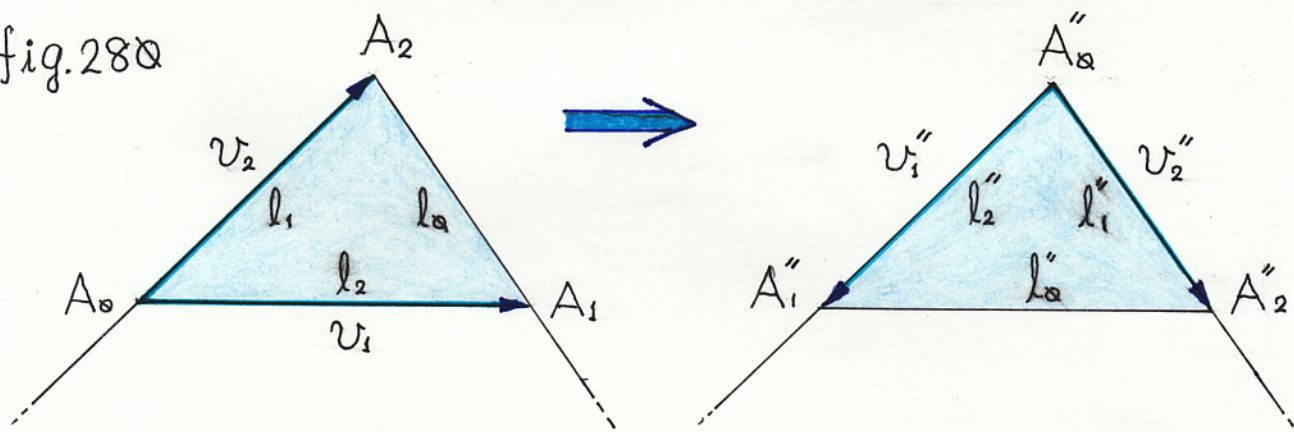
$$\overrightarrow{A_0 C_{N1}} = v_1 + \frac{1}{-l_1 + l_2 + l_0} (l_2(v_2 - v_1) - l_0 v_1)$$

$$\overrightarrow{A_0 C_{N1}} = \frac{-l_1}{l_0 - l_1 + l_2} v_1 + \frac{l_2}{l_0 - l_1 + l_2} v_2 \quad (W48)$$

$$R_{N1} = R'_{N0} = \frac{2sV_2}{-l'_0 + l'_1 + l'_2}$$

$$R_{N1} = \frac{2sV_2}{l_0 - l_1 + l_2} \quad (W49)$$

fig.280



$$v''_1 = -v_2, \quad v''_2 = v_1 - v_2, \quad l''_0 = l_2, \quad l''_1 = l_0, \quad l''_2 = l_1 \quad (W50)$$

$$C_{N2} = C''_{N0}, \quad R_{N2} = R''_{N0} \quad (W51)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_0 C_{N2}} &= \overrightarrow{A_0 A_2} + \overrightarrow{A_2 C_{N2}} = v_2 + \overrightarrow{A''_0 C''_{N0}} \\ &= v_2 + \frac{1}{-l''_0 + l''_1 + l''_2} (l''_1 v''_1 + l''_2 v''_2) \end{aligned}$$

$$= v_2 + \frac{1}{-l_2 + l_0 + l_1} (l_0(-v_2) + l_1(v_1 - v_2))$$

$$\overrightarrow{A_0 C_{N2}} = \frac{l_1}{l_0 + l_1 - l_2} v_1 + \frac{-l_2}{l_0 + l_1 - l_2} v_2 \quad (W52)$$

【P599】 1月19日(水) 3角形の重心の周辺(続き)

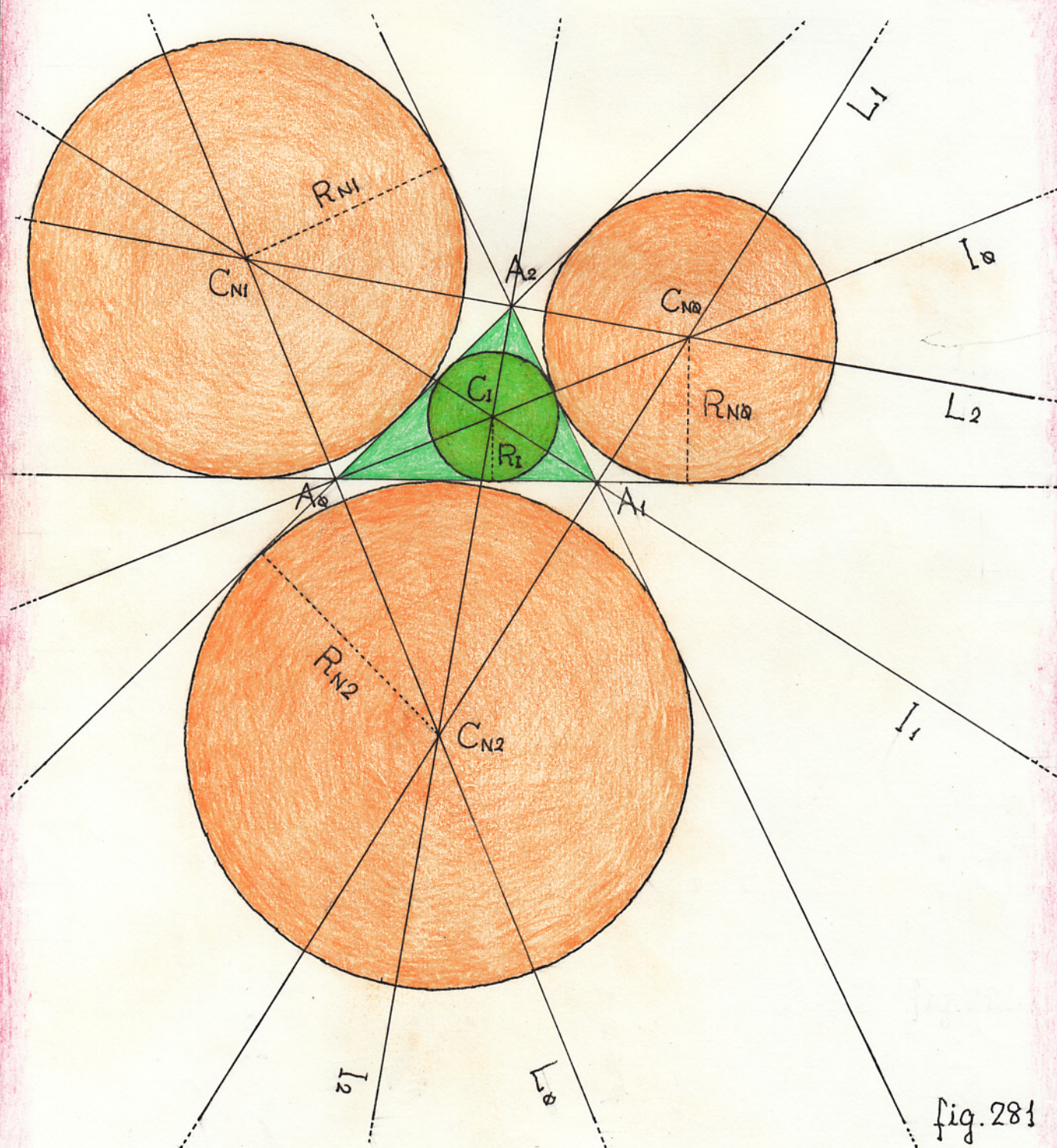
$$R_{N2} = R''_{N0} = \frac{2sV_2}{-l''_0 + l''_1 + l''_2}$$

$$R_{N2} = \frac{2sV_2}{l_0 + l_1 - l_2}$$

(W53)

これまでに得られた結果を定理としてまとめておきましょう。

3角形の傍心と傍接円



【P600】3 角形の重心の周辺 (続き)

2次元単体 $\mathcal{S}_2(A_0; v_1, v_2)$ (3 角形 $A_0 A_1 A_2$) に関して、諸量 v_1, v_2, l_0, l_1, l_2 は、fig. 274 (fig. 279 や fig. 280 の左図 でも同じ) で定義されるものとします。3 角形 $A_0 A_1 A_2$ は縮退していないものとします。

頂点 A_i ($i=0, 1, 2$) における、内角の 2 等分線を I_i とし、外角 (内角の補角) の 2 等分線を L_i とします。次が成り立ちます。

3 直線 I_0, L_1, L_2 は同 1 点 (C_{N0} とします) で交わります。 .1)

3 直線 I_1, L_2, L_0 は同 1 点 (C_{N1} とします) で交わります。 .2)

3 直線 I_2, L_0, L_1 は同 1 点 (C_{N2} とします) で交わります。 .3)

点 C_{Ni} ($i=0, 1, 2$) を頂点 A_i に ^{あいたい} 相対する傍心と呼びます。これらは 次式 を満たします。

$$\overrightarrow{A_0 C_{N0}} = \frac{l_1}{-l_0 + l_1 + l_2} v_1 + \frac{l_2}{-l_0 + l_1 + l_2} v_2 \quad .4)$$

$$\overrightarrow{A_0 C_{N1}} = \frac{-l_1}{l_0 - l_1 + l_2} v_1 + \frac{l_2}{l_0 - l_1 + l_2} v_2 \quad .5)$$

$$\overrightarrow{A_0 C_{N2}} = \frac{l_1}{l_0 + l_1 - l_2} v_1 + \frac{-l_2}{l_0 + l_1 - l_2} v_2 \quad .6)$$

正数 R_{Ni} ($i=0, 1, 2$) を次のように定義します。

$$R_{N0} = \frac{2s\sqrt{2}}{-l_0 + l_1 + l_2} \quad .7)$$

$$R_{N1} = \frac{2s\sqrt{2}}{l_0 - l_1 + l_2} \quad .8)$$

$$R_{N2} = \frac{2s\sqrt{2}}{l_0 + l_1 - l_2} \quad .9)$$

【P601】 3 角形の重心の周辺 (続き)

ここで $s\sqrt{2}$ は 3 角形 $A_0A_1A_2$ の面積です。次が云えます。

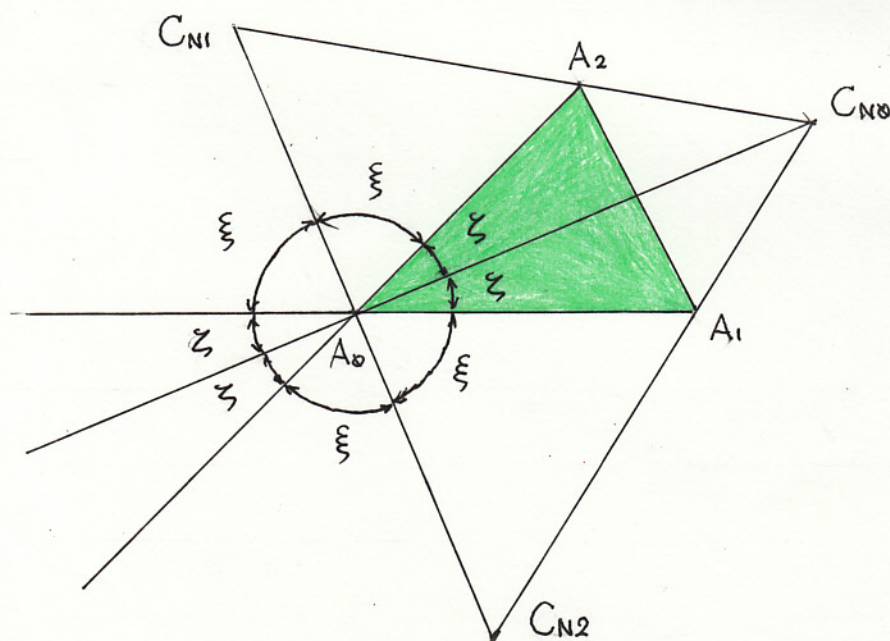
$C_{Ni} (i=0, 1, 2)$ を中心とし、 R_{Ni} を半径とする円は .10)
3 本の直線 A_0A_1, A_1A_2, A_2A_0 全てと接します。

これら 3 つの円をそれぞれ、頂点 A_i に相対する傍接円と呼びます。

3 角形 $A_0A_1A_2$ の内接円の中心 C_I は .11)
3 角形 $C_{N0}C_{N1}C_{N2}$ の垂心と一致します。

定理 (203)

.11) は下図より明らかです。



$$4\zeta + 4\xi = 2\pi$$

$$\zeta + \xi = \frac{\pi}{2}$$

fig.282

【P602】1月20(木) 3角形の重心の周辺(続き)

内接円と傍接円を併記して比べてみましょう。傍接円が内接円だとしたら、その3角形とは如何なる図形なのでしょう？

$$R_I = \frac{2s\sqrt{2}}{l_0 + l_1 + l_2}$$

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = \pi$$

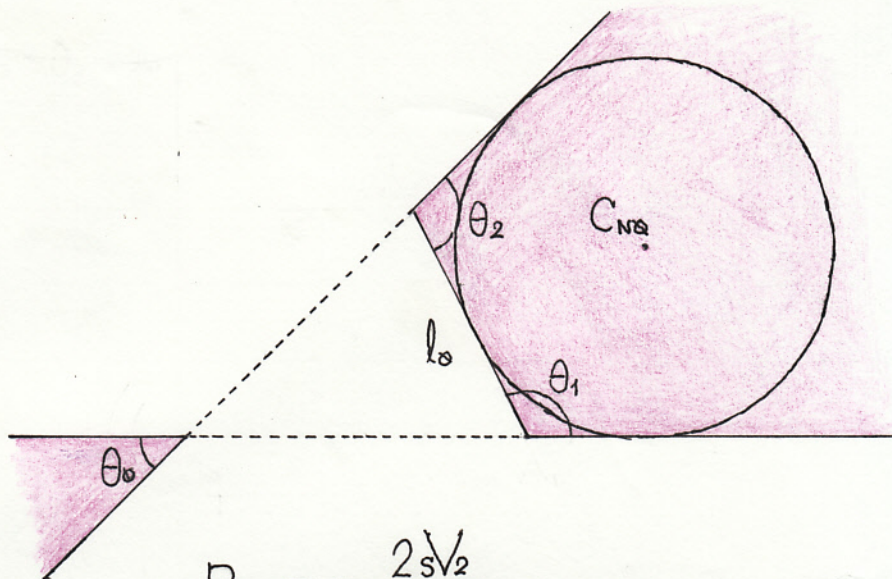
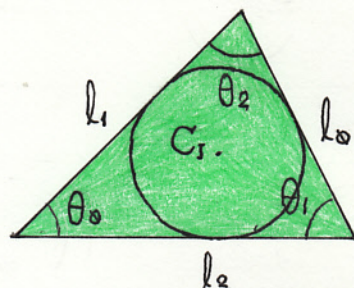
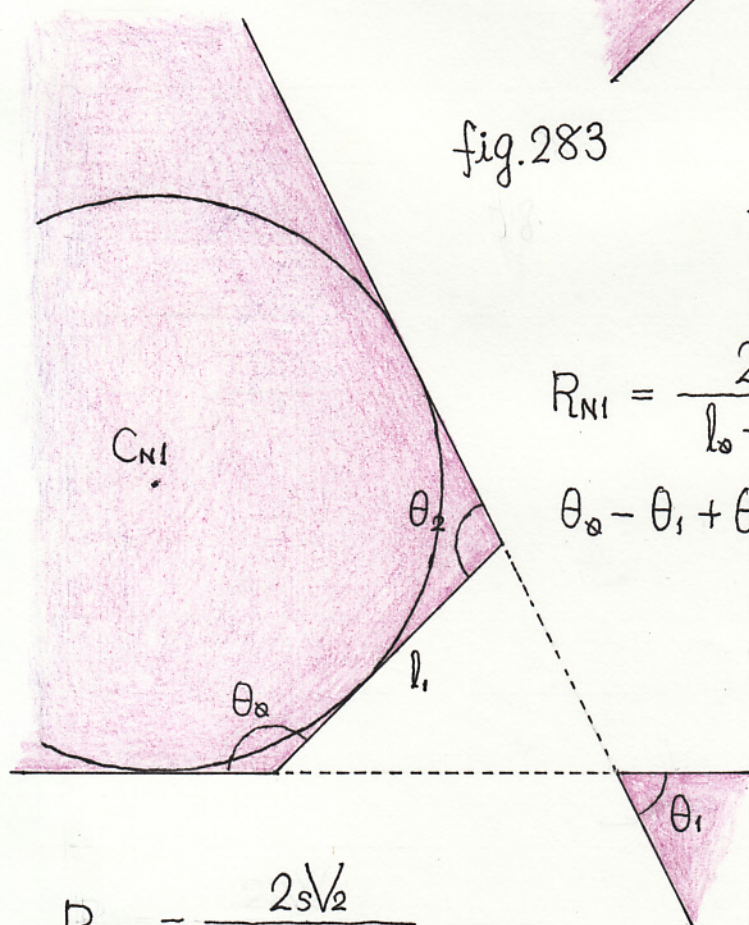


fig.283

$$R_{N0} = \frac{2s\sqrt{2}}{-l_0 + l_1 + l_2}$$

$$-\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = \pi$$

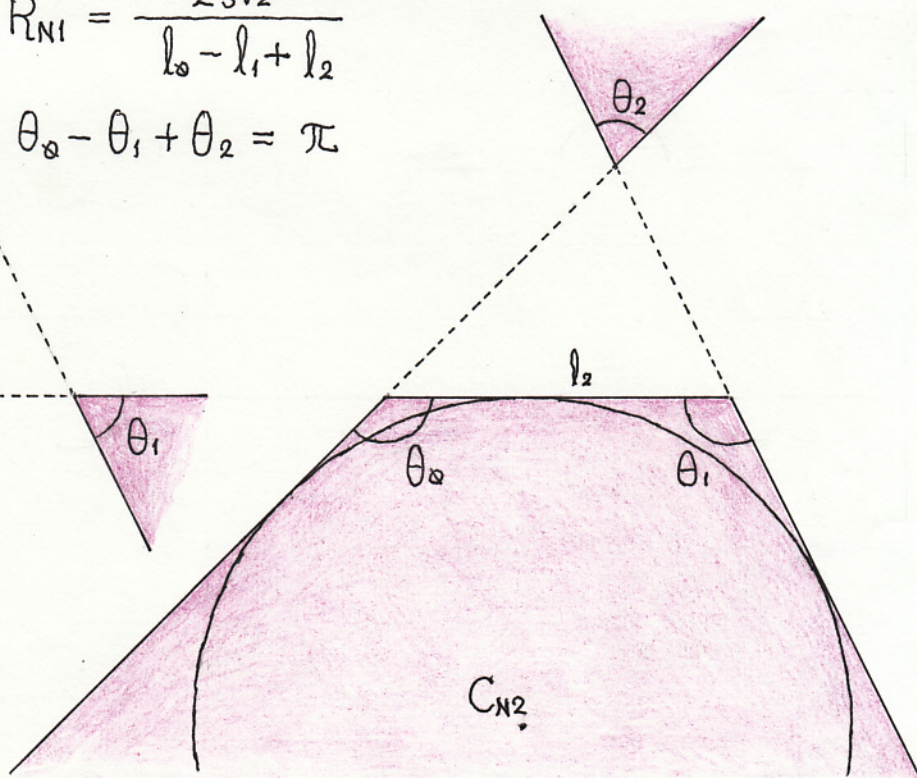


$$R_{N1} = \frac{2s\sqrt{2}}{l_0 - l_1 + l_2}$$

$$\theta_0 - \theta_1 + \theta_2 = \pi$$

$$R_{N2} = \frac{2s\sqrt{2}}{l_0 + l_1 - l_2}$$

$$\theta_0 + \theta_1 - \theta_2 = \pi$$



辺の長さや内角の大きさが負なる3角形を許容するならば、全て整合するのですが、どう考えますか？

【P603】 1月22日(土) 小休止: Zero Fighter

● 小休止: Zero Fighter

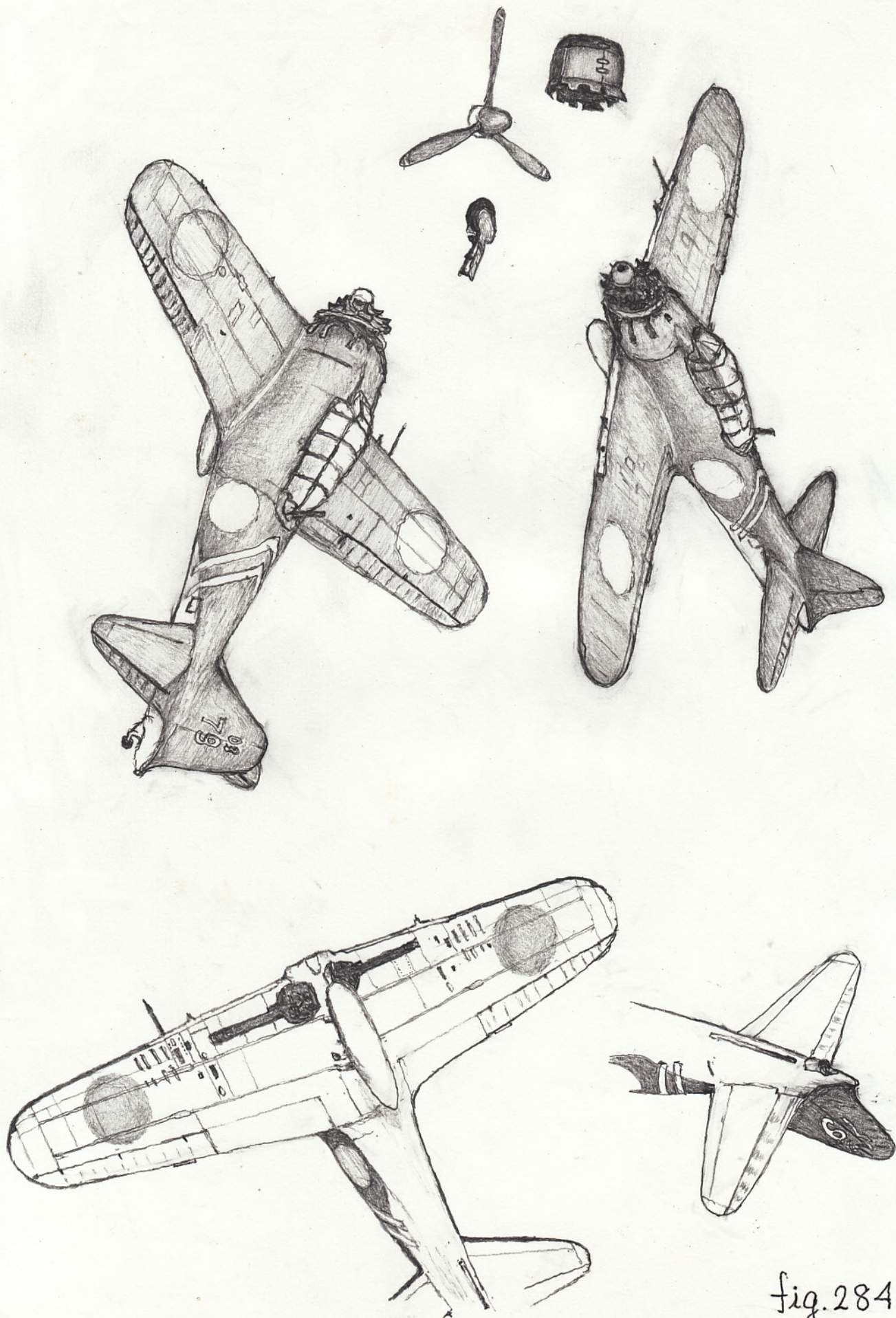


fig.284