【P502】2021年10月23日(土) n次元平行体,単体の体積

● n次元平行体とn次元単体のn次元体積

A_0を始頂点とし$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$を平行要素集合とする$n$次元平行体$P_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$の$n$次元体積と、$A_0$を始頂点とし$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$を単体要素集合とする$n$次元単体$\mathcal{S}_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$の$n$次元体積を求めるのが当節の主題です。もう少し具体的に云えば、P_nと$\mathcal{S}_n$のn次元体積をそれらの要素集合$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$の$n$個のベクトルを用いて表現するのが当節の目標です。それが可能なのです。

1次元平行体の1次元体積とは線分の長さのことです。2次元平行体の2次元体積とは平行4辺形の面積のことです。3次元平行体の3次元体積とは平行6面体の所謂体積のことです。

1次元単体の1次元体積も線分の長さのことです。2次元単体の2次元体積とは3角形の面積のことです。3次元単体の3次元体積とは4面体の所謂体積のことです。

ここで、……等々と云って済ましたいところですが、そういう訳にはいきません。曲がりなりにもn次元体積の定義を与える必要があります。ところがこれが以外に難しいのです。2次元体積つまり面積ですらそうなのです。

下図のような2次元平面上の集合が存在します。

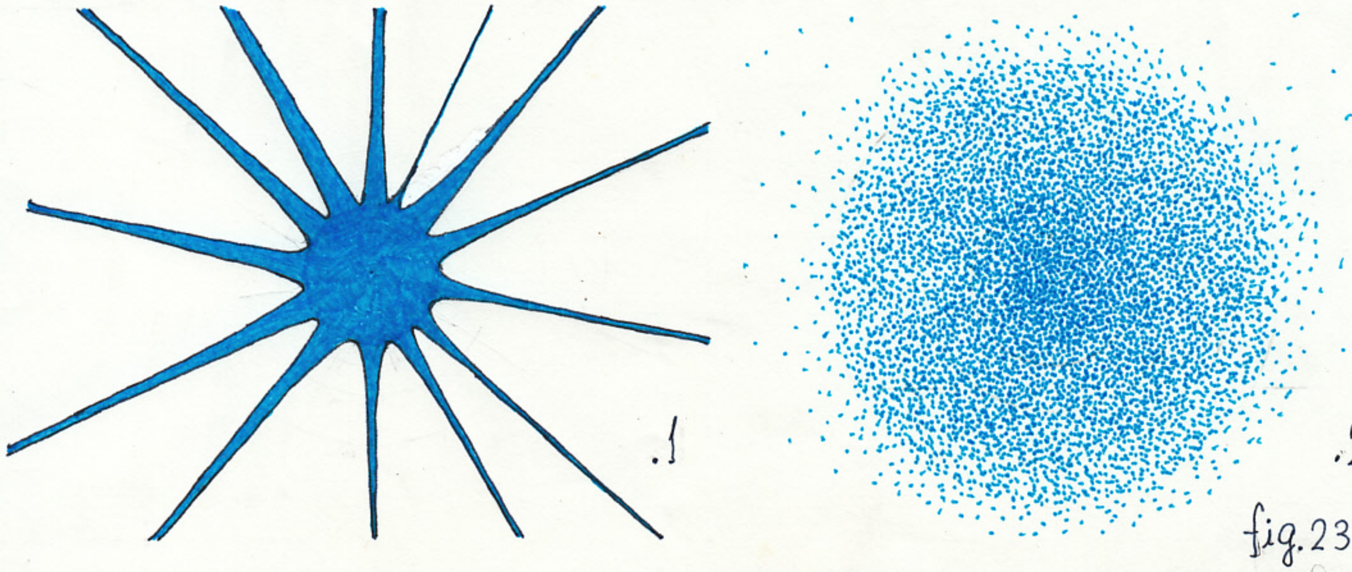

fig.232

【P503】10月24日(日) n次元平行体，単体の体積(続き)

fig.232の左図の集合は角が無限の彼方まで延びています。その面積は無限大かも知れません。右図の集合は3次元で云えば1つの雲のようなものです。その体積を求めることは、雲の中の水滴や水蒸気を全て集めると何l(Liter)になるのかを計るようなものです。濃度や測度のようなものが定義されている必要があります。

1次元体積でもそのような例を考えることが出来ますね。実数に対応する数直線上の線分[0, 1]です。この長さは1です。それではこの集合の無理数点だけからなる部分集合の長さは1でしょうか？だとしたら有理数点だけからなる部分集合の長さは0ということになるのでしょうか？

このように、より一般的な集合の体積を定義しようとすると、無限に起因する厄介な問題に直面することになります。このような問題に関しては Cantor や Lebesgue に任せることにしましょう。幸いなことに、僕がその n次元体積を論じようとしている n次元平行体と n次元単体はどちらも有界凸閉集合です。このような集合では上記のような問題は発生しません(しないはずです)。怠け者の体積の定義を試みましょう。

その前に、平行体や単体が乗っている Affine 空間そのものに計量を導入する必要があります。また、正規直行座標系たちの集合に関するある性質についても言及しておいた方が良いと思われます。

僕が行なった n次元平行体の定義，n次元単体の定義を精査すると Vector の内積に関する量が全く登場していないことに気付きます。このことは、計量が導入されていない Affine 空間上で平行体や単体が定義出来たと云うことです。ちょっと自慢。但し、平面3角法や球面3角法の議論では、辺の長さや角度を、得に球面3角形の定義では Vector の Norm を用いています。このことは Vector の内積を用いたと云うことです。

【P504】10月25日(月) n次元平行体，単体の体積(続き)

思い出して下さい。そもそも、内積を用いて回転を定義し、回転を用いて球面3角法を導出し、平面3角法は球面3角法から導出することが出来ることを示したのでした。

内積が定義されている(有限次元の) Vector 空間のことをユークリッドベクトル空間 (Euclidean Vector Space) と呼びます(呼ぶそうです)。

付随する Vector 空間が Euclidean Vector 空間である Affine 空間のことを単にユークリッド空間 (Euclidean Space) と呼びます。

Euclidean 空間には正規直交座標系を定義することが出来ます。1次元以上の Euclidean 空間では連続無限個の正規直交座標系が存在します(定義し得ます)。『3次元の回転と平行移動』の冒頭で述べたように、正規直交座標系については既知とします。それ自身の定義は行ないません。

n次元 Euclidean 空間 R^n にかってに正規直交座標系 $X=(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ を1つ定めます。この座標系を用いて、Euclidean 空間 R^n に(自然な)計量を次式で定めることにします。

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + \cdots + (dx_n)^2 \qquad (W1)$$

計量それ自身の定義も行いません。既知とします。Euclidean 空間ではPythagorasの定理が成り立つということです。でも、かってに定めた正規直交座標系 X でたまたま計量が(W1)で表現されただけで、任意の正規直交座標系 X' でも計量が(W1)と同じ式で表現されるとは限らないのでは？と思うかも知れません。尤もな疑問です。でもそうではありません。どんな正規直交座標系でも(W1)が成り立ちます。(W1)は正規直交座標系に依存しない**不変式**です。何故でしょうか？これについては後で明らかになるはずです。今は唯、ds が線素の長さであると指摘するだけに留めることにします。

正規直交座標系に関するささやかな(でも大切な)2つの命題を定理として呈示しておきましょう。

> **正規直交座標系の性質**
>
> - n次元Euclidean空間上のかってな$n-1$次元超平面Plane^{n-1}が与えられたとします。このとき、Plane^{n-1}上の全ての点の第n番目の座標値が0となるような正規直交座標系が存在します。 .1)
> - n次元Euclidean空間上の2つの正規直交座標系がかってに与えられたとします。このとき、適当な(適切な)平行移動と、適当な回転と、場合によっては鏡像変換も行うことによって、一方の座標系から他方の座標系へ変換することが(常に)可能です。 .2)
>
> 定理(166)

証明はしません。自明な命題として扱うことにします。というのも正規直交座標系の定義すら行なっていないからです。本音をいえば、僕が当文書の対象として期待している読者ならば、正規直交座標系の定義を行なうことが出来て、それを用いて(166)を証明出来るはずだ、と思うからです。ちょっと言い過ぎましたね。当文書は線形代数学や解析学の教科書ではありません。『はじめに』でも述べたように、当文書は、Simplexを通奏低音とした、数学的, 物理学的な随筆に過ぎないのです。正規直交座標系の定義や上記の定理の証明は、面倒なだけでなく退屈です。読者にとってもそうでしょう。上記の定理の証明が出来ない(したくない)読者は、正規直交座標系とはそういうものだと考えて下さればよいのです。

ただ、"正規直交座標系"以外の未定義用語が出現しましたね。"$n-1$次元超平面"と"鏡像変換"です。一応定義しておきます。

まず、$n-1$次元超平面の定義を行ないます。もっと一般化して、$m \leqq n$なる非負整数mに対して、m次元超平面を定義することにしましょう。

n次元Euclidean空間R^nに付随するEuclidean Vector空間をV^nとします。V^n上のm個のVector $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_m$がかってに与えられているとします。但し、$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_m\}$は1次独立であるとします。また$R^n$上の1点$A_0$もかってに与えられているとします。このとき、

$$\mathrm{Plane}^m = \left\{ x \in R^n \;\middle|\; x = A_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i , \quad -\infty < \lambda_i < +\infty \ (i=1,2,3,\cdots,m) \right\} \tag{W2}$$

で定まるR^nの部分集合Plane^mを、A_0, $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_m\}$で定まる(が張る)$m$次元超平面と呼びます。但し、$\mathrm{Plane}^0 = \{A_0\}$とします。$\mathrm{Plane}^n$は$R^n$そのものです。(W2)は平行体や単体の定義で用いられた式とそっくりですね。

次に、鏡像変換の定義を行ないます。1次元以上のn次元Euclidean空間R^nに正規直交座標系$X = (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$が与えられているとします。このとき、$R^n$上の全ての点$x$に対して、

$$x\text{の才1座標値}\ x_1\ \text{を}\ -x_1\ \text{に置き換える} \tag{W3}$$

変換を、正規直交座標系Xに関する鏡像変換と呼ぶことにします。

読者の中には、もっと一般化した定義をすべきではないのかと異議を唱える(Make an Objection)方もいるかもしれません。例えばPlane^{n-1}を鏡に見立てた変換として定義するとか。でもその必要は無いのです。Plane^{n-1}を用いた定義から、本質的でない部分を平行移動や回転に押し付けてしまえば、鏡像変換そのものが見えて来ます。それが(W3)です。

（W3）はSimpleですね。それだけでなくElegantですらあると、僕は思っています。自画自讃（Praise Myself）ですね。というのも、次元数"n"を用いることなく全てのR^nに通用する同じ文字列で鏡像変換を定義しているからです。第1番目の座標値を選んだところが味噌（Point）ですね。

さて（Well）、これでn次元体積を論じる準備が整ったと思われます。

怠け者のn次元体積の定義

n次元Euclidean空間R^nに正規直交座標系$X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$が与えられているとします。$R^n$上の有界凸閉集合$S$の$n$次元体積$V$を次式で定義します。

$$V = \mathrm{abs} \underset{x \in S}{\iint \cdots \int} 1 \, dx_1 dx_2 \cdots dx_n \qquad \text{定義(167)}$$

absは絶対値を採ることを意味します。貴方は凸集合に限定する必要はないのではないかと思うかも知れません。でもそういう訳にはいかないのです。Cheeseを思い浮べて下さい。無数の穴のあいたCheeseです。これもまた、雲を掴む話になってしまいますね。怠け者としてはそういう集合は避けたいのです。SのVに関する議論が有意義なものであるためには、VがSの固有の量で、座標系Xに依存しないことが望まれます。次が成り立ちます。

n次元Euclidean空間R^nに2つの正規直交座標系X，X'が与えられているとします。R^n上の有界凸集合Sに対して、X系を用いて(167)で求まる体積をVとし、X'系を用いて(167)で求まる体積をV'とするとき、常に、

$$V = V' \qquad \text{定理(168)}$$

証明します。定理(166.2)より、正規直交座標系の、平行移動，鏡像変換，回転で、(167)のVが不変であることを示せば証明したことになります。平行移動で(167)の右辺の積分が不変なことは自明です。また、(167)の右辺はabsが採られているので、鏡像変換で不変なことも明らかです。問題は回転だけです。回転変換によって積分変数を変換すると(167)の右辺の積分にはWronski行列式が重みFactorとして出現します。回転変換の場合はそれは回転行列の行列式そのものです。そしてそれは定理(80.2)より1です。 Q.E.D.

まず、平行4辺形つまり2次元平行体$P(A_0;v_1,v_2)$の面積(2次元体積)Vを、v_1, v_2で表わす式を求めてみましょう。ベクトル解析の公式(52.15), .12)をこの順で用いるので、ここで再記しておきます。

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{A}\times\mathbb{B}) = (AB\sin\theta)^2 \qquad .15)$$

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\cdot(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) = (\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{D}) - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{D})(\mathbb{B}\cdot\mathbb{C}) \qquad .12)$$

定理(52)の一部の再記

この公式を用いるということは、$P(A_0;v_1,v_2)$を3次元Euclidean空間内の2次元超平面上の図形として捉えるということです。

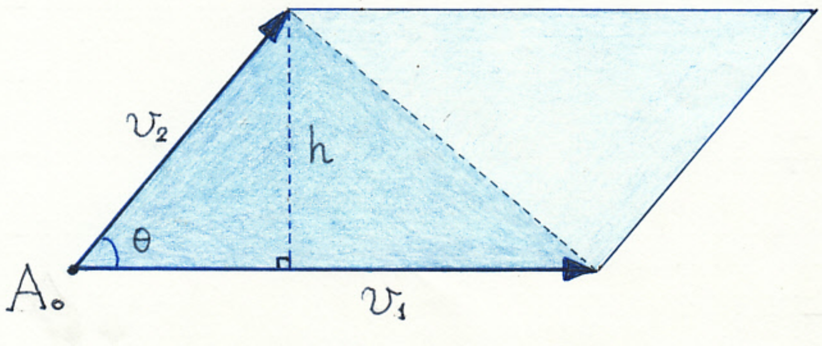

fig.233

【P509】10月31日(日) n次元平行体，単体の体積(続き)

$$V = |v_1|h = |v_1||v_2|\sin\theta$$

$$V^2 = (|v_1||v_2|\sin\theta)^2$$

$$= (v_1 \times v_2)\cdot(v_1 \times v_2)$$

$$= (v_1\cdot v_1)(v_2\cdot v_2) - (v_1\cdot v_2)(v_2\cdot v_1)$$

$$V^2 = \begin{vmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 \end{vmatrix} \tag{W4}$$

綺麗な式ですね。しかも右辺の行列式の各成分が内積で表現されているので座標系の回転で不変なことも明らかな式です。さらに一般のn次元平行体のV^2がどんな式になるのかも予想出来ます。

一般のn次元平行体，単体のn次元体積を求めるためには、n次元平行体の定義(その2)(6)，単体の定義(その2)(138)を用いると便利です。そのためには、合同(Congruence)と相似(Similarity)の定義と、それらのもつ若干の(Some)性質について論じておく必要がありそうですね。

相似と合同の定義

n次元Euclidean空間R^n上の2つの集合S, S'に対し全単射$f: S \to S'$が存在し、S上の任意の2点x, yに対し、x, yによらない正数ρが存在し、

$$\mathrm{Len}(f(x), f(y)) = \rho\,\mathrm{Len}(x, y) \tag{.1}$$

を満たすとき、SとS'は互いに相似であると呼びます。

ここで$\mathrm{Len}(a, b)$は2点a, bを2端点とする線分の長さを表わすとします。

ρをSに対するS'の**相似比**と呼びます。
特に$\rho=1$のときは、SとS'は互いに**合同**であると呼びます。
写像fをSからS'への**相似写像**と呼びます。

定義（169）

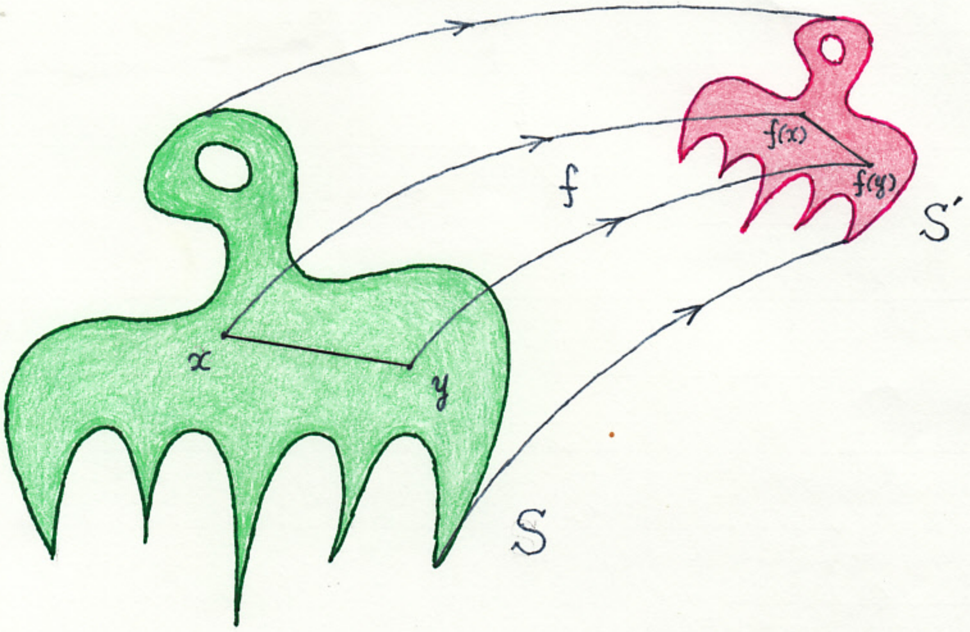

fig.234

fig.234は相似比ρが一意的に定まる例です。常にそうであるとは限りません。連続無限個の相似比を持つ場合もあります。下図は半直線の例です。直線の場合も同様です。

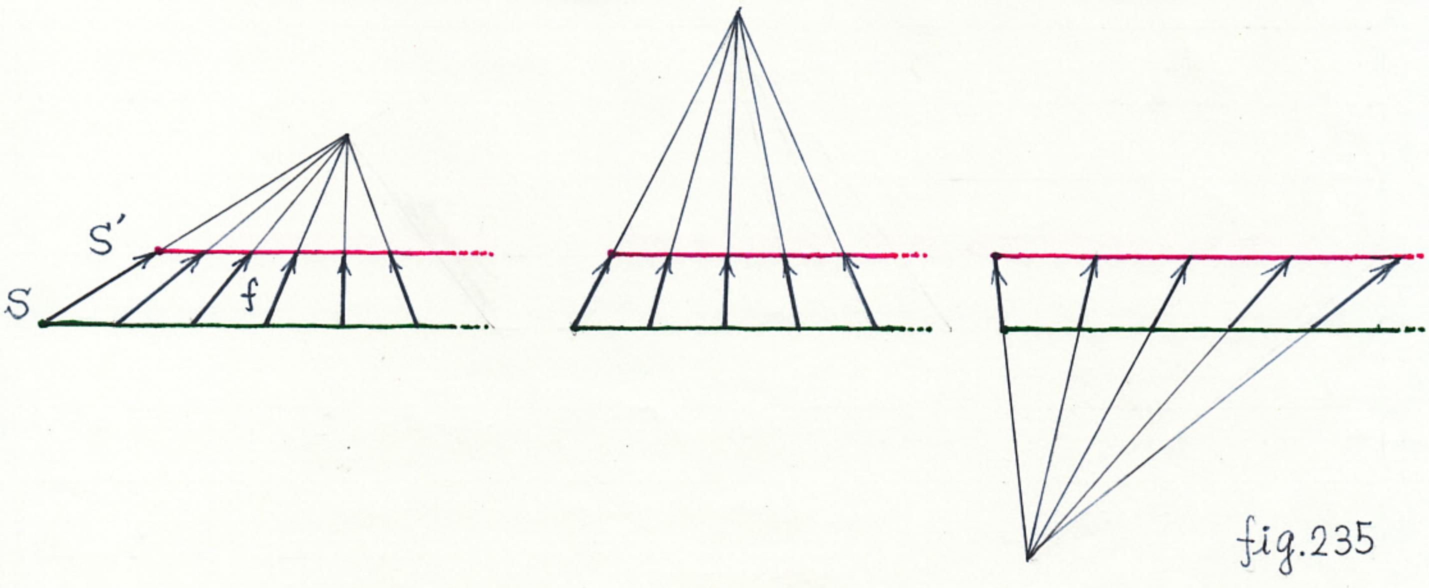

fig.235

【P511】11月2日(火) n次元平行体，単体の体積(続き)

下図は離散無限個の相似比を持つ 例です。

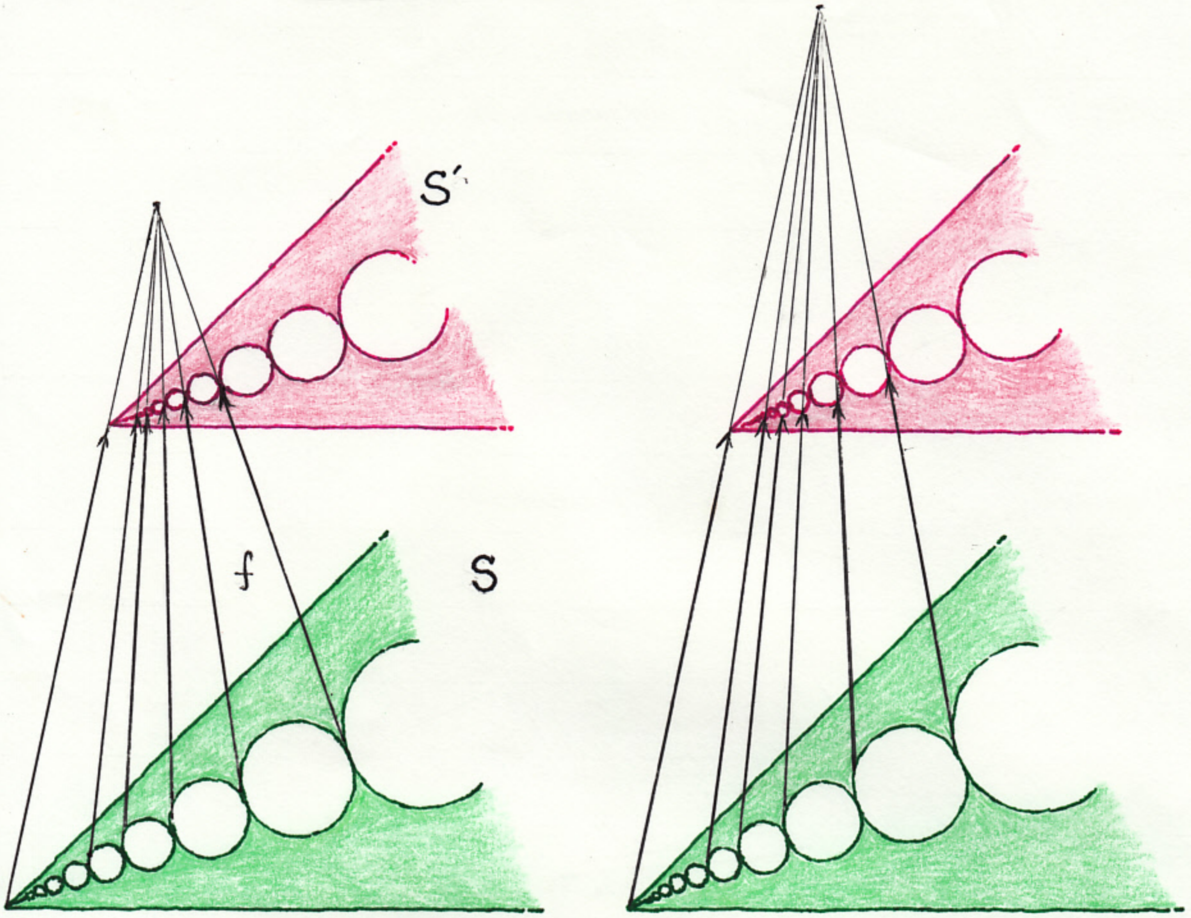

fig.236

非有界集合であっても相似比が一意的に定まる場合もあります。
例えば下図です。

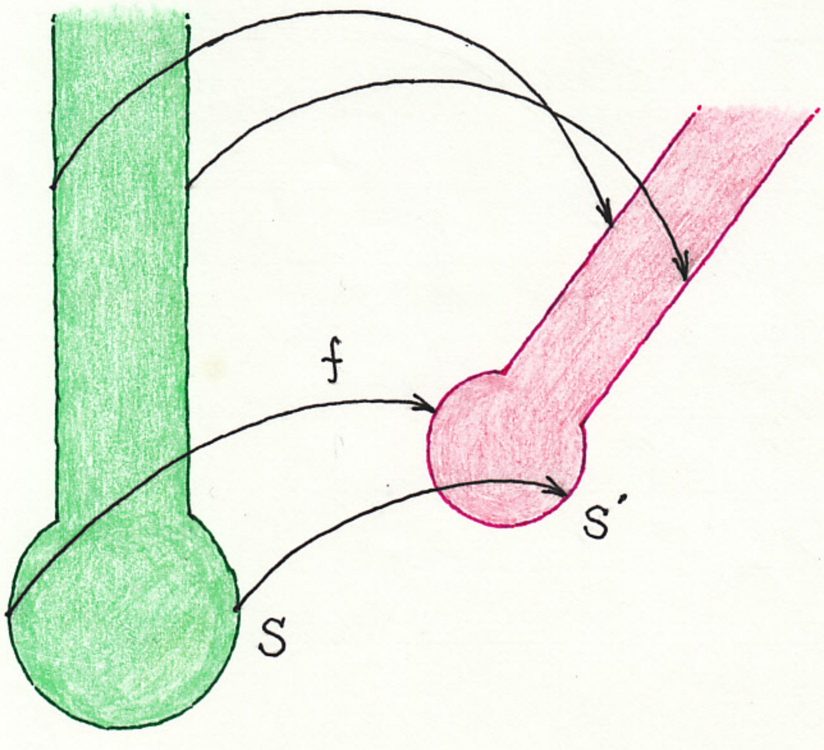

fig.237

【P512】11月3日(水) n次元平行体，単体の体積(続き)

これまでの例は全て、相似写像 f が定まれば f に対応して相似比が一意的に定まります。しかし、必ずしもそうであるとは限らないのです。

唯1個の点だけから成る2つの集合 $S=\{a\}$, $S'=\{a'\}$ を考えてみましょう。これらは互いに相似です。相似写像 $f: S \to S'$ は $f(a)=a'$ で一意的に定まります。そして(169.1)に相当する式は、

$$0 = \mathrm{Len}(a', a') = \rho\,\mathrm{Len}(a, a) = \rho 0 \qquad (W5)$$

つまり $0=\rho 0$ です。これは如何なる正数 ρ に対しても成り立ちます。S' の S に対する相似比は連続無限個存在することになります。唯1個の点だけから成る集合を相似の定義の対象外にするという手も考えられますね。いずれにしても、今までの例で重要なしかも難しい問題が呈示されました。それは、

> 如何なる類の集合同士ならばその相似比が一意的に定まるのか？ その必要十分条件を求めて下さい。 (W6)

という問題です。十分条件だけなら思い付きました。下記です。

> **相似比の一意性に関する十分条件**
>
> n 次元Euclidean空間 R^n 上の2つの集合 S, S' が互いに相似であるとします。S, S' のどちらも有界閉集合であるとします。さらに、S は2個以上の点を含むとします。
> このとき、S に対する S' の相似比は一意的に定まります。
>
> 定理(170)

証明します。ちょっと長くなります。SからS′への相似写像がもし複数個あるとしたら、その中から1つをかってに選びfとします。また、fに対応する相似比が複数個あるとしたら、その中から1つをかってに選びρとします。

fは全単射ですから、S′も2個以上の点を含みます。

fが距離の大小関係を保存する性質を持つということが証明の決め手になります。次が成り立ちます。$x_1, y_1, x_2, y_2 \in S$に対して、

$$\mathrm{Len}(x_1, y_1) \leqq \mathrm{Len}(x_2, y_2) \Rightarrow \mathrm{Len}(f(x_1), f(y_1)) \leqq \mathrm{Len}(f(x_2), f(y_2)) \quad (W7)$$

実際、$\rho > 0$ だから

$$\mathrm{Len}(f(x_1), f(y_1)) = \rho \mathrm{Len}(x_1, y_1) \leqq \rho \mathrm{Len}(x_2, y_2) = \mathrm{Len}(f(x_2), f(y_2)).$$

さて、L, L′を次式で定義します。

$$L = \sup\{\mathrm{Len}(x, y) \mid x, y \in S\},\ L' = \sup\{\mathrm{Len}(x', y') \mid x', y' \in S'\} \quad (W8)$$

ここで、supは上限を意味します。S, S′はどちらも2点以上を含む有界集合だから、ある正数Mが存在し、

$$0 < L < M, \qquad 0 < L' < M \qquad (W9)$$

L, L′はそれぞれ集合S, S′に対して一意的に定まります。

Sは閉集合だから、次が云えます。

$$\exists\, a, b \in S,\quad \mathrm{Len}(a, b) = L \qquad (W10)$$

【P514】n次元平行体，単体の体積（続き）

この2点 $a, b \in S$ が

$$\mathrm{Len}(f(a), f(b)) = L' \qquad \text{(W11)}$$

を満たすことを示すことが出来れば定理(170)は証明されたも同然です。
(W11)を背理法を用いて示しましょう。

$$\mathrm{Len}(f(a), f(b)) < L' \qquad \text{(W11)}'$$

を仮定します。S'も閉集合ですから、次が云えます。

$$\exists\, a', b' \in S',\ \mathrm{Len}(a', b') = L' \qquad \text{(W12)}$$

fは全単射ですから、$f(\alpha) = a'$, $f(\beta) = b'$ となる $\alpha, \beta \in S$ が存在します。

$$\exists\, \alpha, \beta \in S,\ \mathrm{Len}(f(\alpha), f(\beta)) = L' \qquad \text{(W13)}$$

Lの定義より、$\mathrm{Len}(\alpha, \beta) \leqq L$. よって(W10)より

$$\mathrm{Len}(\alpha, \beta) \leqq \mathrm{Len}(a, b) \qquad \text{(W14)}$$

ところで、fは距離の大小関係を保つから、(W13), (W14), (W11)$'$より、

$$L' = \mathrm{Len}(f(\alpha), f(\beta)) \leqq \mathrm{Len}(f(a), f(b)) < L'$$

つまり、$L' < L'$です。これは矛盾です。従って(W11)が成り立ちます。

(W11), (W10)より、

$$L' = Len(f(a), f(b)) = \rho Len(a, b) = \rho L \qquad (W15)$$

よって、$\rho = \dfrac{L'}{L}$ です。従って、相似比ρは一意的に定まります。Q.E.D.

実は、定理(170)における"S, S'のどちらも有界閉集合である"という条件はちょっと冗長です(Redundant)。というのも次が成り立つからです。

互いに相似な2つの集合では、一方が有界閉集合であれば他方も有界閉集合です。 (W16)

この命題の証明は割愛し(Omit)ます。とても長い証明になるからです。それだけではありません。当節の主たる目的、n次元平行体，単体の求積のためには(170)で十分だからです。次が云えます。

相似と体積の関係

n次元Euclidean空間R^n上の2つの集合S, S'が互いに相似であるとします。S, S'のどちらも有界凸閉集合であるとします。さらに、Sは2個以上の点を含むとします。Sのn次元体積をV，S'のn次元体積をV'とします。S'のSに対する相似比をρとします。
このとき、次式が成り立ちます。

$$V' = \rho^n V \qquad \text{定理(171)}$$

【P516】11月6日(土) n次元平行体，単体の体積（続き）

ほとんど自明ですから証明は省略します。その代わり絵を描きます。その方が貴方の直感的理解に資すると思うからです。

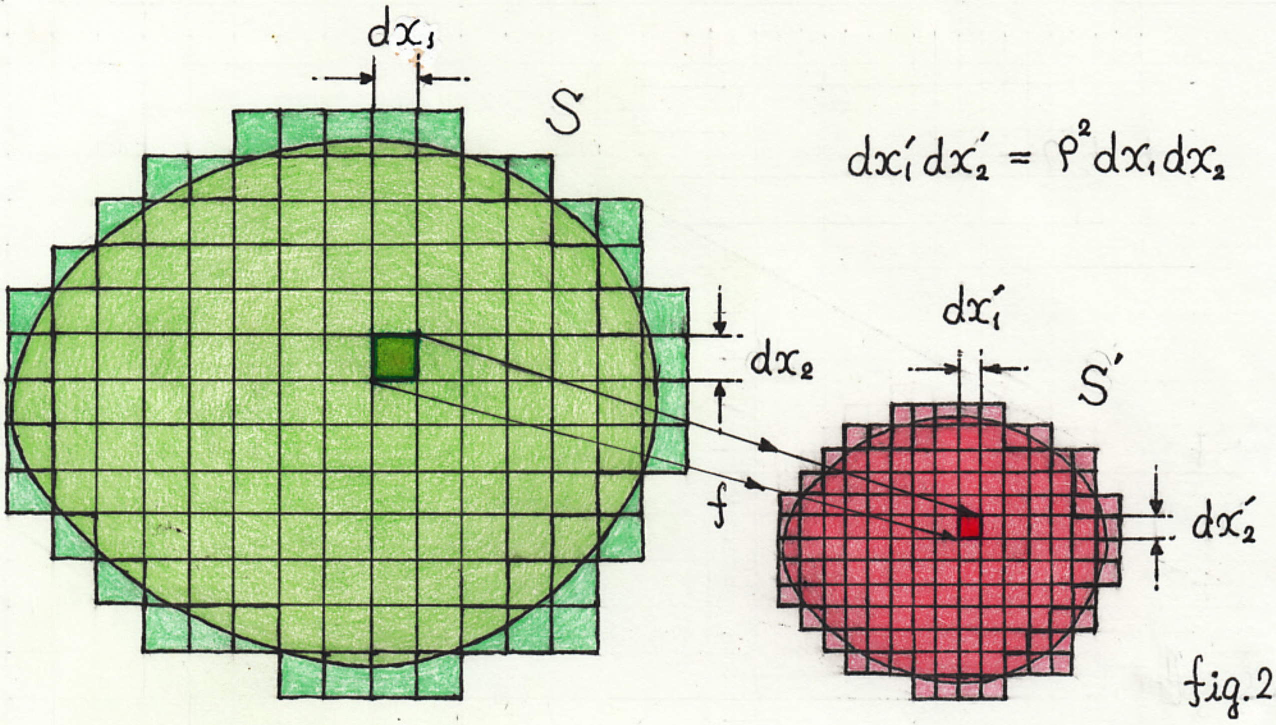

fig.238

左の絵の矩形の個数と右の絵の赤色の矩形の個数は一致します。

次の命題も、平行体，単体の求積のためには重要な命題です。

$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$と3角行列

n次元Euclidean空間R^nに付随するVector空間V^n上のかってなn個のVectorの集合を$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$とします。
正規直交座標系での各v_iの座標値を

$$ {}^t v_i = (v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \cdots, v_{in}), \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad .1) $$

と表記することにします。これは、各v_iを$n \times 1$の行列（縦Vector）として取り扱うことにしますという約束です。『3次元のベクトル解析』や

『3次元の回転と平行移動』でもそうしましたね。

このとき、$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$に対応して、ある正規直交座標系Xが存在して、次式を満たします。

$$v_{ij} = 0 \quad (i < j) \tag{.2}$$

具体的に書き下すならば

$$ {}^t v = \begin{pmatrix} {}^t v_1 \\ {}^t v_2 \\ {}^t v_3 \\ \vdots \\ {}^t v_{n-1} \\ {}^t v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ v_{n-1\,1} & v_{n-1\,2} & v_{n-1\,3} & v_{n-1\,4} & \cdots & v_{n-1\,n-1} & 0 \\ v_{n1} & v_{n2} & v_{n3} & v_{n4} & \cdots & v_{n\,n-1} & v_{nn} \end{pmatrix} \tag{.3}$$

${}^t v$は下3角行列です。従って、

$$\det {}^t v = \det v = \prod_{k=1}^{n} v_{kk} \tag{.4}$$

定理(172)

証明します。$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$は1次独立だとします。1次独立の場合に.3)が成り立つ座標系Xが存在するならば、1次従属の場合でも.3)が成り立つ座標系Xが存在するのは自明です。
なんなら、限りなく一次従属に近い1次独立な$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$で代用すれば良いのです。

【P518】n次元平行体，単体の体積（続き）

定理（166.1）と（W2）を用いて証明します。但し（W2）のA_0は原点であるとします。$A_0 = \mathbf{0}$です。降下法的な数学的帰納法とでも呼ぶべき手法を使います。$m = n-1, n-2, n-3, \cdots, 2, 1$に対して、$\mathrm{Plane}^m(\mathbf{0}; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_m) = R^m$に関して、定理（116.1）をこの順序で$n-1$回適用すれ（Apply）ば、.3）を満たす座標系Xが得られます。 Q.E.D.

これで、n次元平行体とn次元単体のn次元体積を求める（計算する）準備が整った（is Ready）はずです。

P509でも述べたように、n次元平行体の定義（その2）（6），n次元単体の定義（その2）（138）を用いることにします。何故なら、合同，相似に関する定理（171）や正規直交座標系に関する定理（172）が使い易いからです。

定義（6）で描いた絵fig.102と定義（138）で描いた絵fig.228に相当する絵を描きましょう。定理（171）や定理（172）がどのように求積に応用されるのかの説明図になることを心掛けて描くつもりです。但し、3次元Versionとします。

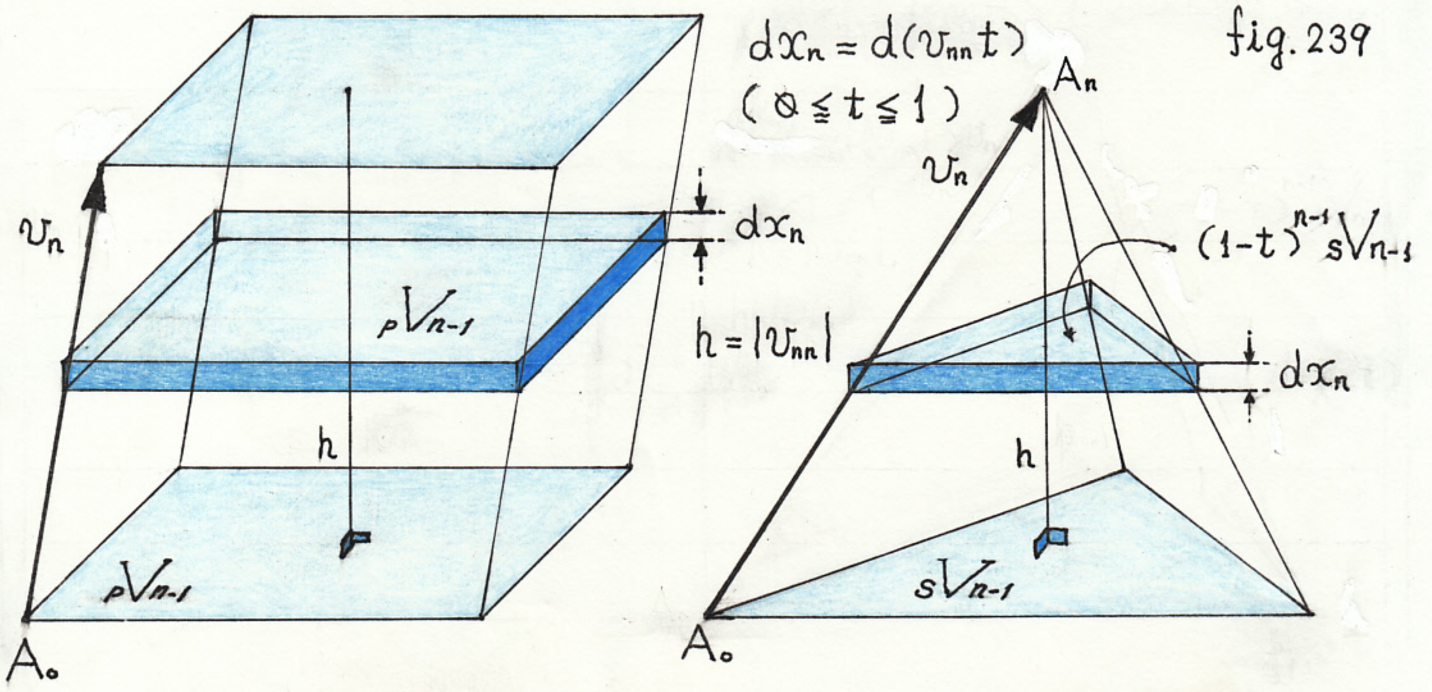

fig.239

fig.239より直ちに次が得られます。

n次元平行体，単体の体積(その1)

n次元Euclidean空間R^n上の1点をA_0とし、R^nに付随するVector空間V^n上のn個のVectorの集合を$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$とします。$n$次元平行体$P_n(A_0; v_1, v_2, \cdots, v_n)$の$n$次元体積を${}_PV_n$とし、$n$次元単体$S_n(A_0; v_1, v_2, \cdots, v_n)$の$n$次元体積を${}_SV_n$とします。$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$に対して、定理(172.3)を満たす正規直交座標系をXとします。X系に関して、n次元体積の定義(167)で${}_PV_n$, ${}_SV_n$を計算すると、次式が得られます。

$$ {}_PV_n = \mathrm{abs}\prod_{k=1}^{n} v_{kk} \quad .1), \qquad {}_SV_n = \frac{1}{n!}\mathrm{abs}\prod_{k=1}^{n} v_{kk} \quad .2) \qquad \text{定理(173)} $$

(172.4)より、$\prod_{k=1}^{n} v_{kk} = \det {}^t v = \det v$. よって、$\left(\prod_{k=1}^{n} v_{kk}\right)^2 = \det({}^t v\, v)$.
従って(173)より、次が得られます。

n次元平行体，単体の体積(その2)

n次元Euclidean空間R^n上のn次元平行体$P_n(A_0; v_1, v_2, \cdots, v_n)$の$n$次元体積を${}_PV_n$とし、$n$次元単体$S_n(A_0; v_1, v_2, \cdots, v_n)$の$n$次元体積を${}_SV_n$とします。次式が成り立ちます。

$$ {}_PV_n^2 = \det\begin{pmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 & v_1\cdot v_3 & \cdots & v_1\cdot v_n \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 & v_2\cdot v_3 & \cdots & v_2\cdot v_n \\ v_3\cdot v_1 & v_3\cdot v_2 & v_3\cdot v_3 & \cdots & v_3\cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n\cdot v_1 & v_n\cdot v_2 & v_n\cdot v_3 & \cdots & v_n\cdot v_n \end{pmatrix} \quad .1) $$

【P520】n 次元平行体，単体の体積（続き）

$$ {}_{s}V_n^2 = \frac{1}{(n!)^2} \det \begin{pmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 & v_1\cdot v_3 & \cdots & v_1\cdot v_n \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 & v_2\cdot v_3 & \cdots & v_2\cdot v_n \\ v_3\cdot v_1 & v_3\cdot v_2 & v_3\cdot v_3 & \cdots & v_3\cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n\cdot v_1 & v_n\cdot v_2 & v_n\cdot v_3 & \cdots & v_n\cdot v_n \end{pmatrix} \quad .2) $$

定理（174）

定理（173）とは異なり、定理（174）は特定の正規直交座標系に依存しません。（174）は如何なる正規直交座標系に関しても成り立ちます。

同一の要素集合 $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ に対して、${}_{p}V_n$ は ${}_{s}V_n$ の $n!$ 倍です。このことも、n 次元平行体を $n!$ 個の n 次元単体に等体積分割することが出来るという予想（3）の根拠の1つです。

平行体の体積に関する議論は（174.1）で十分だと思います。しかし単体に関しては更なる考察が必要です。例えば3角形の面積はその3辺の長さを用いて表現出来ますね。一般に n 次元単体はその $\binom{n+1}{2}$ 個の辺（1次元超表面）の長さが与えられたならば、（合同なものを同一視すれば）一意的に定まると思われます。そうならばその体積も $\binom{n+1}{2}$ 個の辺の長さで表現出来るはずです。更に辺の長さに限らず、$n-1$ 次元超表面の体積たちや、何らかの角度量たちで表現出来るかもしれません。様様な表現が可能だと思われます。

でも、当節はこれぐらいにしておきます。上記のような問題は別途主題を改めて論じることにしましょう。

● 小休止：選球問題

> 選球問題
>
> 13個の球体が与えられたとします。これらには 1, 2, 3, …, 9, A, B, C, D と識別子が極印されているとします。どれも同じ大きさですが、1個だけ重さが異なるものとします。このとき、天秤（Balance）を3回だけ用いて重さの異なるその1個の球を選び出して下さい。
>
> 問題（175）

解答例を文章で記述します。

- （1, 2, 3, 4）と（5, 6, 7, 8）を天秤に掛けます。（1回目）
  1、釣り合った場合
  求める球は（9, A, B, C, D）の中にあります。
  - （1, 9）と（A, B）を天秤に掛けます。（2回目）
    1.1、釣り合った場合
    求める球は（C, D）の中にあります。
    - （1）と（C）を天秤に掛けます。（3回目）
      1.1.1、釣り合った場合　D.
      1.1.2、釣り合わなかった場合　C.

    1.2、（A, B）が重かった場合
    求める球は（9, A, B）の中にあります。
    - （A）と（B）を天秤に掛けます。（3回目）
      1.2.1、釣り合った場合　9.
      1.2.2、（B）が重かった場合　B.

【P522】小休止：選球問題（続き）

1.2.3.（A）が重かった場合　A.

1.3、（1,9）が重かった場合

求める球は（9,A,B）の中にあります。

- （A）と（B）を天秤に掛けます。（3回目）

1.3.1、釣り合った場合　9.

1.3.2.（B）が重かった場合　A.

1.3.3、（A）が重かった場合　B.

2.（5,6,7,8）が重かった場合

求める球は（1,2,3,4,5,6,7,8）の中にあります。

- （1,2,5）と（3,4,9）を天秤に掛けます。（2回目）

2.1、釣り合った場合

求める球は（6,7,8）の中にあります。

- （6）と（7）を天秤に掛けます。（3回目）

2.1.1、釣り合った場合　8.

2.1.2、（7）が重かった場合　7.

2.1.3（6）が重かった場合　6.

2.2（3,4,9）が重かった場合

求める球は（1,2）の中にあります。

- （1）と（2）を天秤に掛けます。（3回目）

2.2.1、（2）が重かった場合　1.

2.2.2、（1）が重かった場合　2.

2.3、（1,2,5）が重かった場合

求める球は（3,4,5）の中にあります。

- （3）と（4）を天秤に掛けます。（3回目）

2.3.1、釣り合った場合　5.

2.3.2、（4）が重かった場合　3.

【P523】小休止：選球問題（続き）

2.3.3.（3）が重かった場合 4.

3、（1,2,3,4）が重かった場合

求める球は（1,2,3,4,5,6,7,8）の中にあります。

- （1,2,5）と（3,4,9）を天秤に掛けます。（2回目）

3.1、釣り合った場合

求める球は（6,7,8）の中にあります。

- （6）と（7）を天秤に掛けます。（3回目）

3.1.1、釣り合った場合 8.

3.1.2.（7）が重かった場合 6.

3.1.3.（6）が重かった場合 7.

3.2（3,4,9）が重かった場合

求める球は（3,4,5）の中にあります。

- （3）と（4）を天秤に掛けます。（3回目）

3.2.1、釣り合った場合 5.

3.2.2、（4）が重かった場合 4.

3.2.3、（3）が重かった場合 3.

3.3、（1,2,5）が重かった場合

求める球は（1,2）の中にあります。

- （1）と（2）を天秤に掛けます。

3.3.1.（2）が重かった場合 2.

3.3.2、（1）が重かった場合 1.

以上です。 絵を描きましょう。

【P524】11月14日（日）小休止：選球問題（続き）

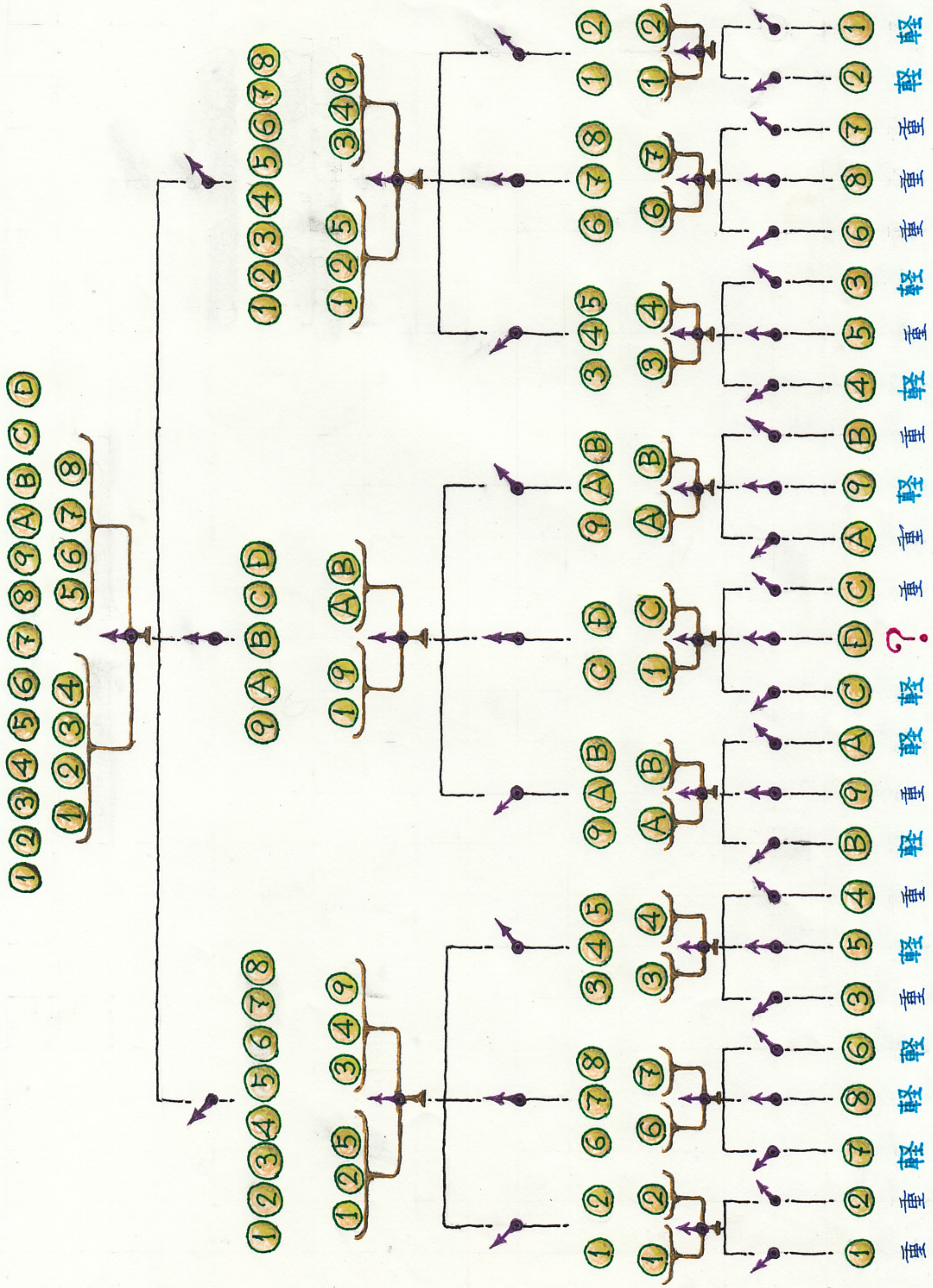

fig.240