● Shyuko記号とPfaffian

正方行列の恒等式に関する議論

『Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理』

の続編です。上記の内容を前提としています。是非、上記を復習(再読)してから取りかかっていただけたらと願っています。

上記の節では正方行列の次数として専ら小文字のnを用いましたが、当節では大文字のNを用いることにします。nは別の用い方をされるので注意して下さい。Shyuko記号やKronecker's deltaに登場するDummy添字は全て1からNに渡って和を取ることを意味するものとします。このことは大切なことですが、繰り返して補記するつもりは無いので、よく留意しておいてほしいと思います。

当節の主題はPfaffianです。Pfaff形式とも呼ばれることがあります。Pfaffは人の名前だと思われます。前にも紹介した僕の持っている本『100人の数学者 古代ギリシャから現代まで』では、100人の数学者には入っていませんが、"ガウスからヒルベルトまで"のところでちょっとだけ言及しています。それをそのままここで引用しておきましょう。

ドイツでは微分方程式に関連して、1815年にガウスが
超幾何微分方程式

$$x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - abx = 0$$

の研究から**超幾何級数**を導き、1814〜1815年にはパッフ(1765-1825)が**パッフの方程式**を研究し、その後さらに**パッフの問題**として話題になった。

【P470】 Shyuko記号とPfaffian（続き）

上記のパッフ問題のパッフ（1765-1825）と僕がこれから論じようとしているPfaffianのPfaffが同一人物だとすると、数学の歴史上奇妙なことが起こった（Happend）ことになります。僕のPfaffianは行列を研究するならば半ば必然的（自動的）に出現する数学的量です。ところが行列に関してはCayley（1821-1895）が『行列論』を著わしているように、Pfaffの時代にはまだ数学の研究対象にすらなっていなかったはずです。ということは、行列より先にPfaffianのような数学的実体が研究されていたということです。歴史にはありがちな事だと云えばそれまでのことですが興味深い事ですね。もしかしたらPfaffは連立偏微分方程式を研究していたのかも知れません。そうだとしたら、Pfaffianのような代数構造を持った量にでくわすことは十分にありそうなことです。

本来ならば『Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理』のところで論じておくべきであったある命題から始めましょう。

復習にもなります。何故上記の主題では議論しなかったのかと云うと、Cayley-Hamiltonの定理の導出には不必要だったからです。それだけではありません。その時点ではそのある命題がそれほど重要（有用）だとは思わなかったのです。でもPfaffianを論じるためには必須の命題の1つであることに気が付きました。

その命題とは、拡張行列式とも呼ぶべきscalar量 $d^{(n)}(\cdot)$ に関する恒等式です。

まず、$d^{(n)}(\cdot)$, $D^{(n)}(\cdot)$ の定義とこれらの間に成り立つ恒等式を思い出して下さい。

再記します。

【P471】9月26日(日) Shyuko記号とPfaffian(続き)

$d^{(n)}(A)$の定義(再記)

N次正方行列Aと非負整数nに対して scalar量$d^{(n)}(A)$を次のように定めます。

$$d^{(0)}(A) = 1 \qquad .1)$$

$$d^{(n)}(A) = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_n\end{bmatrix}\prod_{i=1}^{n}A_{\alpha_i\beta_i} \quad (n \geqq 1) \qquad .2)$$

これより直ちに

$$d^{(1)}(A) = \mathrm{tr}A,\ d^{(N)}(A) = \det A,\ d^{(n)}(A) = 0 \quad (n > N) \qquad .3)$$

定義(35)の再記

$d^{(N)}(A) = \det A$は定理(34)から得られます。

$D^{(n)}(A)$の定義(再記)

N次正方行列Aと非負整数nに対してN次正方行列$D^{(n)}(A)$を次のように定めます。

$$D^{(0)}(A) = I \qquad .1)$$

$$D^{(n)}_{ij}(A) = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix}j\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\\ i\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_n\end{bmatrix}\prod_{i=1}^{n}A_{\alpha_i\beta_i} \quad (n \geqq 1) \qquad .2)$$

これより直ちに

$$D^{(1)}(A) = d^{(1)}(A)I - A,\ D^{(n)}(A) = 0 \quad (n \geqq N) \qquad .3)$$

定義(39)の再記

【P472】 Shyuko記号とPfaffian（続き）

$\mathcal{D}^{(n)}(A)$の展開公式（再記）

$$\mathcal{D}^{(n)}(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k d^{(n-k)}(A) A^k$$

定理(41)の再記

このD$^{(n)}(A)$の展開公式を用いると、次のような$d^{(n)}(A)$の展開公式が得られます。

$d^{(n)}(A)$の展開公式

$$n\, d^{(n)}(A) = -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k d^{(n-k)}(A)\, d^{(1)}(A^k)$$

定理(143)

ほとんど自明ですが証明しましょう。
$d^{(1)}(\cdot)$の線形性に注意しましょう。任意のscalar x, y、任意のN次の正方行列X, Yに対して

$$d^{(1)}(xX+yY) = x\, d^{(1)}(X) + y\, d^{(1)}(Y)$$

が成り立ちます。従って、(41)式の両辺の$d^{(1)}(\cdot)$を作ると、

$$d^{(1)}(\mathcal{D}^{(n)}(A)) = N\, d^{(n)}(A) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k d^{(n-k)}(A)\, d^{(1)}(A^k) \tag{W1}$$

ここで$d^{(1)}(I) = N$を用いました。
$d^{(1)}(\mathcal{D}^{(n)}(A))$を計算しましょう。
$\mathcal{D}^{(n)}(A)$の定義，Shyuko記号の縮約公式，$d^{(n)}(A)$の定義より

【P473】 Shyuko記号とPfaffian（続き）

$$d^{(1)}(D^{(n)}(A)) = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} k & \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \\ k & \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n \end{bmatrix}\prod_{i=1}^{n} A_{\alpha_i\beta_i}$$

$$= \frac{1}{n!}(N-n)\begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \\ \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n \end{bmatrix}\prod_{i=1}^{n} A_{\alpha_i\beta_i}$$

$$= (N-n)\,d^{(n)}(A) \qquad \text{(W2)}$$

(W1), (W2)より(143)が得られます。 Q.E.D

(143)は、$d^{(2)}(A), d^{(3)}(A), d^{(4)}(A), \cdots$ を $d^{(1)}(A), d^{(1)}(A^2), d^{(1)}(A^3), \cdots$ を用いて計算するAlgorismを与えてくれます。

$$2d^{(2)}(A) = d^{(1)}(A)\,d^{(1)}(A) - d^{(1)}(A^2)$$

$$3d^{(3)}(A) = d^{(2)}(A)\,d^{(1)}(A) - d^{(1)}(A)\,d^{(1)}(A^2) + d^{(1)}(A^3)$$

$$4d^{(4)}(A) = d^{(3)}(A)\,d^{(1)}(A) - d^{(2)}(A)\,d^{(1)}(A^2) + d^{(1)}(A)\,d^{(1)}(A^3) - d^{(1)}(A^4)$$

$$\vdots$$

『Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理』ではShyuko記号の展開公式が重要な働きをしました。当節でも用いることになります。再記しておきましょう。

Shyuko記号の展開公式（その1）の再記

$$\begin{bmatrix} i & \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \\ j & \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \\ \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_n \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} \alpha_k \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1\ \alpha_2 \cdots i \cdots \alpha_n \\ \beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_k \cdots \beta_n \end{bmatrix}$$

定理(32)の再記

【P474】9月27日(月) Shyuko記号とPfaffian(続き)

定理(32)のShyuko記号の展開公式は次のようにも表現されます。

Shyuko記号の展開公式(その1)の別表現

$$\begin{bmatrix} i & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ j & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} i \\ \beta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & j & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}$$

定理(144)

証明します。一般にN次の正方行行Xに対して $\det X = \det {}^tX$ が成り立ちます。従ってShyuko記号の定義式(27)より

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \qquad \text{(W3)}$$

が成り立ちます(これもまた復習になりますね)。これと展開公式(32)より

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} i & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ j & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} j & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ i & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} \beta_k \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & j & \cdots & \beta_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} i \\ \beta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & j & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

9月28日(火) Shyuko記号とPfaffian(続き)

Shyuko記号を用いてN次正方行列Aに対して定義し得るscalarや行列は$d^{(n)}(A)$や$D^{(n)}(A)$だけではありません。色々考えられると思いますが、$f^{(n)}(A)$, $F^{(n)}(A)$, $G^{(n)}(A)$を定義することにしましょう。これらは$d^{(n)}(A)$や$D^{(n)}(A)$と比べると多少人為的だと感じるかもしれませんが、Pfaffianを導出するのに必須です。

$G^{(n)}(A)$は$f^{(n)}(A)$と$F^{(n)}(A)$を計算するのに補助的な働きをします。$f^{(n)}(A)$と$F^{(n)}(A)$を関連付けてくれます。

$f^{(n)}(A)$の定義

N次正方行列Aと非負整数nに対してscalar量$f^{(n)}(A)$を次のように定めます。

$$f^{(0)}(A) = 1 \qquad .1)$$

$n \geqq 1$に対して

$$f^{(n)}(A) = \frac{1}{(2^n n!)^2}\begin{bmatrix}\alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu_n\nu_n\end{bmatrix}\prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l\beta_l}A_{\mu_l\nu_l} \qquad .2)$$

定義(145)

$f^{(1)}(A)$を計算してみましょう。

$$f^{(1)}(A) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}\alpha\beta \\ \mu\nu\end{bmatrix}A_{\alpha\beta}A_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix}\delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu}\end{vmatrix}A_{\alpha\beta}A_{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{4}(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu})A_{\alpha\beta}A_{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{4}(A_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta} - A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha})$$

$$f^{(1)}(A) = \frac{1}{4}(d^{(1)}({}^tAA) - d^{(1)}(A^2)) \qquad (W4)$$

$f^{(n)}(A)$と$d^{(n)}(A)$は何らかの関係を満たす可能性がありますね。

【P476】9月29日(水) Shyuko記号とPfaffian(続き)

$F^{(n)}(A)$の定義

N次の正方行列Aと非負整数nに対してN次の正方行列$F^{(n)}(A)$を次のように定めます。

$$F^{(0)}_{ij}(A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & j \\ \mu & \nu \end{bmatrix} A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(A - {}^tA)\Big|_{ij}. \qquad .1)$$

$n \geqq 1$に対して

$$F^{(n)}_{ij}(A) = \frac{1}{2(n+1)(2^n n!)^2}\begin{bmatrix} i & j & \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \mu & \nu & \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix} A_{\mu\nu}\prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l\beta_l}A_{\mu_l\nu_l}. \qquad .2)$$

$F^{(n)}(A)$は反対称行列です。 $F^{(n)}_{ij}(A) = -F^{(n)}_{ji}(A)$. .3)

定義(146)

(146)は定義+αです。$F^{(n)}(A)$が反対称行列であることはShyuko記号の反対称性から自明です。

$F^{(0)}(A) = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$を確認します。

$$F^{(0)}_{ij}(A) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & j \\ \mu & \nu \end{bmatrix} A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\delta_{i\mu}\delta_{j\nu} - \delta_{i\nu}\delta_{j\mu})A_{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$$

どうやら$F^{(n)}(A)$は反対称行列と相性がよさそうですね。

Shyuko記号とPfaffian（続き）

$G^{(n)}(A)$の定義

N次の正方行列Aと非負整数nに対してN次の正方行列$G^{(n)}(A)$を次のように定めます。

$$G^{(0)}(A) = I. \qquad .1)$$

$n \geqq 1$に対して

$$G_{ij}^{(n)}(A) = \frac{1}{(2^n n!)^2}\begin{bmatrix} j & \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ i & \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix} \prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l\beta_l} A_{\mu_l\nu_l} \qquad .2)$$

$G^{(n)}(A)$は対称行列です。 $G_{ij}^{(n)}(A) = G_{ji}^{(n)}(A) \qquad .3)$

定義（147）

$G^{(n)}(A)$が対称行列であることは（W3）から明らかです。

当節におけるShyuko記号の添字集合は$\{1, 2, 3, \cdots, N\}$です。
従って、その階数がNを越えるShyuko記号は全て0です。
$f^{(n)}(A)$, $F^{(n)}(A)$, $G^{(n)}(A)$の定義に用いられるShyuko記号の階数はそれぞれ、$2n$, $2(n+1)$, $2n+1$です。
従って次が成り立ちます。

（次ページへ続く）

【P478】9月30日(木) Shyuko記号とPfaffian(続き)

正方行列Aの次数Nに対して整数Mを次式で定まるものとします。

$$N = \begin{cases} 2M & (\text{Nが偶数のとき}) \\ 2M+1 & (\text{Nが奇数のとき}) \end{cases} \qquad .1)$$

このMに対して次が成り立ちます。

$$f^{(n)}(A) = 0 \qquad (n > M) \qquad .2)$$

$$F^{(n)}(A) = O \qquad (n \geqq M) \qquad .3)$$

$$G^{(n)}(A) = O \qquad (n > M) \qquad .4)$$

.3), .4)の右辺のOはO行列です。$F^{(n)}(A)$に関する不等式には等号"="が含まれているので注意して下さい。

定理(148)

$F^{(n)}(A)$ $(n \geqq 1)$ の定義式のShyuko記号を(144)で展開します。

$$\begin{bmatrix} i & j & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_n & \beta_n \\ \mu & \nu & \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \mu_n & \nu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_n & \beta_n \\ \nu & \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \mu_n & \nu_n \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} i \\ \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_n & \beta_n \\ \mu & \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \mu_n & \nu_n \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} i \\ \mu_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_k & \beta_k & \cdots & \alpha_n & \beta_n \\ \nu & \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \mu & \nu_k & \cdots & \mu_n & \nu_n \end{bmatrix}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} i \\ \nu_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_k & \beta_k & \cdots & \alpha_n & \beta_n \\ \nu & \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \mu_k & \mu & \cdots & \mu_n & \nu_n \end{bmatrix}$$

これより、

【P479】Shyuko記号とPfaffian（続き）

$n \geqq 1$に対して$F_{ij}^{(n)}(A)$は次式で表わされます。

$$2(n+1)(2^n n!)^2 F_{ij}^{(n)}(A) = (a)+(b)+(c)+(d)$$

$$(a) = \begin{bmatrix} i \\ \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_n & \beta_n \\ \nu & \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \mu_n & \nu_n \end{bmatrix} A_{\mu\nu} \prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l \beta_l} A_{\mu_l \nu_l}$$

$$(b) = -\begin{bmatrix} i \\ \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_n & \beta_n \\ \mu & \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \mu_n & \nu_n \end{bmatrix} A_{\mu\nu} \prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l \beta_l} A_{\mu_l \nu_l}$$

$$(c) = -\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} i \\ \mu_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_k & \beta_k & \cdots & \alpha_n & \beta_n \\ \nu & \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \mu & \nu_k & \cdots & \mu_n & \nu_n \end{bmatrix} A_{\mu\nu} \prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l \beta_l} A_{\mu_l \nu_l}$$

$$(d) = -\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} i \\ \nu_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_k & \beta_k & \cdots & \alpha_n & \beta_n \\ \nu & \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \mu_k & \mu & \cdots & \mu_n & \nu_n \end{bmatrix} A_{\mu\nu} \prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l \beta_l} A_{\mu_l \nu_l}$$

(W5)

$$(a) = (2^n n!)^2 A_{i\nu} \frac{1}{(2^n n!)^2} \begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_n & \beta_n \\ \nu & \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \mu_n & \nu_n \end{bmatrix} \prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l \beta_l} A_{\mu_l \nu_l}$$

$$(a) = (2^n n!)^2 \left(A G^{(n)}(A)\right)\Big|_{ij} \qquad \text{(W6)}$$

$$(b) = -(2^n n!)^2\, {}^tA_{i\mu} \frac{1}{(2^n n!)^2} \begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \alpha_n & \beta_n \\ \mu & \mu_1 & \nu_1 & \cdots & \mu_n & \nu_n \end{bmatrix} \prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l \beta_l} A_{\mu_l \nu_l}$$

$$(b) = -(2^n n!)^2 \left({}^tA G^{(n)}(A)\right)\Big|_{ij} \qquad \text{(W7)}$$

【P480】10月1日(金) Shyuko記号とPfaffian(続き)

$$(c) = -\sum_{k=1}^{n} A_{i\nu_k} \begin{bmatrix} j & \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_k\beta_k & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \nu & \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu\,\nu_k & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix}$$

$$A_{\mu\nu}\left(\prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l\beta_l}\right) A_{\mu_1\nu_1}\cdots \cancel{A_{\mu_k\nu_k}} \cdots A_{\mu_n\nu_n}$$

ここで[ ]の下行の2つの添字νとν_kを互いに入れ換えます。

$$(c) = (2^n n!)^2 \sum_{k=1}^{n} A_{i\nu_k} \frac{1}{(2^n n!)^2} \begin{bmatrix} j & \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_k\beta_k & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \nu_k & \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu\,\nu & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix}$$

$$A_{\alpha_1\beta_1}\cdots A_{\alpha_k\beta_k}\cdots A_{\alpha_n\beta_n}$$
$$A_{\mu_1\nu_1}\cdots A_{\mu\nu}\cdots A_{\mu_n\nu_n}$$

$$\boxed{(c) = n(2^n n!)^2 \left(A G^{(n)}(A)\right)\Big|_{ij} \qquad (W8)}$$

$$(d) = -\sum_{k=1}^{n} A_{\mu_k i} \begin{bmatrix} j & \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_k\beta_k & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \nu & \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu_k\mu & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix}$$

$$A_{\mu\nu}\left(\prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l\beta_l}\right) A_{\mu_1\nu_1}\cdots \cancel{A_{\mu_k\nu_k}} \cdots A_{\mu_n\nu_n}$$

[ ]の下行のνとμ_kを入れ換え、さらにμとνを入れ換えます。

$$(d) = -(2^n n!)^2 \sum_{k=1}^{n} {}^tA_{i\mu_k} \frac{1}{(2^n n!)^2} \begin{bmatrix} j & \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_k\beta_k & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \mu_k & \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu\,\nu & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix}$$

$$A_{\alpha_1\beta_1}\cdots A_{\alpha_k\beta_k}\cdots A_{\alpha_n\beta_n}$$
$$A_{\mu_1\nu_1}\cdots A_{\mu\nu}\cdots A_{\mu_n\nu_n}$$

$$\boxed{(d) = -n(2^n n!)^2 \left({}^tA\, G^{(n)}(A)\right)\Big|_{ij} \qquad (W9)}$$

【P481】Shyuko記号とPfaffian（続き）

$$2(n+1)(2^n n!)^2 F^{(n)}_{ij}(A) = (a)+(b)+(c)+(d)$$

$$= (2^n n!)^2 (AG^{(n)}(A))\Big|_{ij} - (2^n n!)^2 ({}^tAG^{(n)}(A))\Big|_{ij}$$

$$+n(2^n n!)^2 (AG^{(n)}(A))\Big|_{ij} - n(2^n n!)^2 ({}^tAG^{(n)}(A))\Big|_{ij}$$

$$2(n+1)F^{(n)}(A) = (n+1)AG^{(n)}(A) - (n+1)\,{}^tAG^{(n)}(A)$$

$$F^{(n)}(A) = \frac{1}{2}(A - {}^tA)G^{(n)}(A) \qquad (W10)$$

$$\boxed{F^{(n)}(A) = F^{(0)}(A)G^{(n)}(A) \quad (n \geqq 1) \qquad (W11)}$$

上式は $n \geqq 1$ に対して導出されたのですが、$G^{(0)}(A) = I$ ですから $n=0$ の場合も成り立ちます。但し $F^{(0)}(A) = F^{(0)}(A)$ となるだけですから自明な恒等式です。ですが（W10）より、そうなるように $F^{(0)}(A)$, $G^{(0)}(A)$ を定義したとも云えなくもないですね。

$G^{(n)}(A)$（$n \geqq 1$）の定義式のShyuko記号を（144）で展開します。

$$\begin{bmatrix} j\,\alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_n\beta_n \\ i\,\mu_1\nu_1 \cdots \mu_n\nu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_n\beta_n \\ \mu_1\nu_1 \cdots \mu_n\nu_n \end{bmatrix}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} j \\ \mu_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_k\beta_k \cdots \alpha_n\beta_n \\ \mu_1\nu_1 \cdots i\ \nu_k \cdots \mu_n\nu_n \end{bmatrix}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} j \\ \nu_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 \cdots \alpha_k\beta_k \cdots \alpha_n\beta_n \\ \mu_1\nu_1 \cdots \mu_k\ i \cdots \mu_n\nu_n \end{bmatrix}$$

これより、

【P482】Shyuko記号とPfaffian（続き）

$n \geqq 1$ に対して $G_{ij}^{(n)}(A)$ は次式で表わされます。

$$(2^n n!)^2 G_{ij}^{(n)}(A) = (e) + (f) + (g)$$

$$(e) = \begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix} \prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l\beta_l} A_{\mu_l\nu_l}$$

$$(f) = -\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} j \\ \mu_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_k\beta_k & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \mu_1\nu_1 & \cdots & i\ \nu_k & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix} \prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l\beta_l} A_{\mu_l\nu_l}$$

$$(g) = -\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} j \\ \nu_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_k\beta_k & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu_k\ i & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix} \prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l\beta_l} A_{\mu_l\nu_l}$$

(W12)

$$(e) = (2^n n!)^2 f^{(n)}(A)\,\delta_{ij} \qquad \text{(W13)}$$

$$(f) = -\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_k\beta_k & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \mu_1\nu_1 & \cdots & i\ \nu_k & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix} \left(\prod_{l=1}^{n} A_{\alpha_l\beta_l}\right)\left(\prod_{\substack{l=1 \\ l\neq k}}^{n} A_{\mu_l\nu_l}\right) A_{j\nu_k}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} i\ \nu_k & \mu_1\nu_1 & \cdots & \cancel{\mu_k\nu_k} & \cdots & \mu_n\nu_n \\ \alpha_k\beta_k & \alpha_1\beta_1 & \cdots & \cancel{\alpha_k\beta_k} & \cdots & \alpha_n\beta_n \end{bmatrix}$$

$$A_{\alpha_k\beta_k} A_{\mu_1\nu_1} \cdots \cancel{A_{\mu_k\nu_k}} \cdots A_{\mu_n\nu_n}$$

$$A_{\alpha_1\beta_1} \cdots \cancel{A_{\alpha_k\beta_k}} \cdots A_{\alpha_n\beta_n}\ {}^tA_{\nu_k j}$$

$$(f) = -n(2n)(2^{n-1}(n-1)!)^2 \left(F^{(n-1)}(A)\,{}^tA\right)\Big|_{ij} \qquad \text{(W14)}$$

【P483】10月2日(土) Shyuko記号とPfaffian(続き)

$$(g) = -\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix}\alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_k\beta_k & \cdots & \alpha_n\beta_n\\ \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu_k\, i & \cdots & \mu_n\nu_n\end{bmatrix}\left(\prod_{l=1}^{n}A_{\alpha_l\beta_l}\right)\left(\prod_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n}A_{\mu_l\nu_l}\right)A_{\mu_k j}$$

$$= +\sum_{k=1}^{n}\begin{bmatrix} i\,\mu_k & \mu_1\nu_1 & \cdots & \cancel{\mu_k\nu_k} & \cdots & \mu_n\nu_n\\ \alpha_k\beta_k & \alpha_1\beta_1 & \cdots & \cancel{\alpha_k\beta_k} & \cdots & \alpha_n\beta_n\end{bmatrix}$$

$$A_{\alpha_k\beta_k}A_{\mu_1\nu_1}\cdots\cancel{A_{\mu_k\nu_k}}\cdots A_{\mu_n\nu_n}$$

$$A_{\alpha_1\beta_1}\cdots\cancel{A_{\alpha_k\beta_k}}\cdots A_{\alpha_n\beta_n}A_{\mu_k j}$$

$$\boxed{(g) = n(2n)\left(2^{n-1}(n-1)!\right)^2\left(F^{(n-1)}(A)A\right)\Big|_{ij} \qquad (W15)}$$

$$(2^n n!)^2 G^{(n)}_{ij}(A) = (e) + (f) + (g)$$

$$= (2^n n!)^2 f^{(n)}(A)\delta_{ij} - n(2n)\left(2^{n-1}(n-1)!\right)^2\left(F^{(n-1)}(A)\,{}^t\!A\right)\Big|_{ij}$$

$$+ n(2n)\left(2^{n-1}(n-1)!\right)^2\left(F^{(n-1)}(A)A\right)\Big|_{ij}$$

$$(2^n n!)^2 G^{(n)}(A) = (2^n n!)^2 f^{(n)}(A) I$$

$$+\frac{1}{2}(2n)^2\left(2^{n-1}(n-1)!\right)^2 F^{(n-1)}(A)A$$

$$-\frac{1}{2}(2n)^2\left(2^{n-1}(n-1)!\right)^2 F^{(n-1)}(A)\,{}^t\!A$$

$$G^{(n)}(A) = f^{(n)}(A)I + F^{(n-1)}(A)\frac{1}{2}\left(A - {}^t\!A\right) \qquad (W16)$$

$$\boxed{G^{(n)}(A) = f^{(n)}(A)I + F^{(n-1)}(A)F^{(0)}(A) \qquad (n \geqq 1) \qquad (W17)}$$

(145.1), (146.1), (147.1), (W11), (W17)を定理として再記しておきます。

【P484】Shyuko記号とPfaffian（続き）

$$f^{(0)}(A) = 1, \quad F^{(0)}(A) = \frac{1}{2}(A - {}^tA), \quad G^{(0)}(A) = I \qquad .1)$$

$n \geqq 1$ に対して

$$F^{(n)}(A) = F^{(0)}(A)G^{(n)}(A) \qquad .2)$$

$$G^{(n)}(A) = f^{(n)}(A)I + F^{(n-1)}(A)F^{(0)}(A) \qquad .3)$$

定理(149)

.2)に.3)を代入すれば

$$f^{(0)}(A) = 1, \quad F^{(0)}(A) = \frac{1}{2}(A - {}^tA) \qquad .1)$$

$n \geqq 1$ に対して

$$F^{(n)}(A) = f^{(n)}(A)F^{(0)}(A) + F^{(0)}(A)F^{(n-1)}(A)F^{(0)}(A) \qquad .2)$$

定理(150)

いくつかの $F^{(n)}(A)$ を計算してみます。$B \equiv F^{(0)}(A)$ と置きましょう。

$$F^{(0)}(A) = B = f^{(0)}(A)B$$

$$F^{(1)}(A) = f^{(1)}(A)B + B(F^{(0)}(A))B$$

$$= f^{(1)}(A)B + f^{(0)}(A)B^3$$

$f^{(n)}(A)$ を単に $f^{(n)}$ と記すことにしましょう。

【P485】10月3日(日) Shyuko記号とPfaffian(続き)

$$F^{(2)}(A) = f^{(2)}B + B(f^{(1)}B + f^{(0)}B^3)B$$
$$= f^{(2)}B + f^{(1)}B^3 + f^{(0)}B^5$$
$$F^{(3)}(A) = f^{(3)}B + B(f^{(2)}B + f^{(1)}B^3 + f^{(0)}B^5)B$$
$$= f^{(3)}B + f^{(2)}B^3 + f^{(1)}B^5 + f^{(0)}B^7$$
$$\vdots$$

これらから、次式が成り立つことが予想されます。

$$\boxed{F^{(n)}(A) = \sum_{k=0}^{n} f^{(n-k)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{2k+1} \qquad \text{定理}(151)}$$

ほとんど自明ですが証明しましょう。nに関する数学的帰納法を用います。$n=0,1,2,3$に関して(151)が成り立つことは既に示されました。$F^{(n)}(A)$に対して(151)が成り立つと仮定して$F^{(n+1)}(A)$に対しても(151)が成り立つことを示します。(150.2)を用います。

$$F^{(n+1)}(A) = f^{(n+1)}(A)F^{(0)}(A) + F^{(0)}(A)F^{(n)}(A)F^{(0)}(A)$$
$$= f^{(n+1)}(A)F^{(0)}(A) + F^{(0)}(A)\left(\sum_{l=0}^{n} f^{(n-l)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{2l+1}\right)F^{(0)}(A)$$
$$= f^{(n+1)}(A)F^{(0)}(A) + \sum_{l=0}^{n} f^{(n-l)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{2l+3}$$

ここで$\sum$の変数lに対して$k=l+1$と置くと

$$F^{(n+1)}(A) = f^{(n+1)}(A)F^{(0)}(A) + \sum_{k=1}^{n+1} f^{(n+1-k)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{2k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} f^{(n+1-k)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{2k+1} \qquad \text{Q.E.D.}$$

上記と同様の議論が$\overset{(n)}{G}(A)$に関しても出来ます。
(149.2)は$n=0$の場合でも成り立つことに注意しましょう。
(149.2)を(149.3)に代入すれば

$$\overset{(0)}{f}(A)=1,\ \overset{(0)}{F}(A)=\frac{1}{2}(A-{}^tA),\quad \overset{(0)}{G}(A)=I \tag{.1}$$

$n \geqq 1$に対して

$$\overset{(n)}{G}(A) = \overset{(n)}{f}(A)I + \overset{(0)}{F}(A)\overset{(n-1)}{G}(A)\overset{(0)}{F}(A) \tag{.2}$$

定理(152)

いくつかの$\overset{(n)}{G}(A)$を計算してみます。
やはり簡略化のため、$B=\overset{(0)}{F}(A)$とし$\overset{(n)}{f}(A)$を単に$\overset{(n)}{f}$と記します。

$$\begin{aligned}
\overset{(0)}{G}(A) &= I = \overset{(0)}{f}B^0\\
\overset{(1)}{G}(A) &= \overset{(1)}{f}I + B(\overset{(0)}{f}I)B\\
&= \overset{(1)}{f}I + \overset{(0)}{f}B^2\\
\overset{(2)}{G}(A) &= \overset{(2)}{f}I + B(\overset{(1)}{f}I + \overset{(0)}{f}B^2)B\\
&= \overset{(2)}{f}I + \overset{(1)}{f}B^2 + \overset{(0)}{f}B^4\\
\overset{(3)}{G}(A) &= \overset{(3)}{f}I + B(\overset{(2)}{f}I + \overset{(1)}{f}B^2 + \overset{(0)}{f}B^4)B\\
&= \overset{(3)}{f}I + \overset{(2)}{f}B^2 + \overset{(1)}{f}B^4 + \overset{(0)}{f}B^6
\end{aligned}$$

$\vdots$

【P487】Shyuko記号とPfaffian（続き）

これらから、次式が成り立つ筈です。

$$\boxed{G^{(n)}(A) = \sum_{k=0}^{n} f^{(n-k)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{2k} \qquad \text{定理(153)}}$$

nに関する数学的帰納法で証明します。$n=0, 1, 2, 3$に関して(153)が成り立つことは既に示されました。$G^{(n)}(A)$に対して(153)が成り立つと仮定して$G^{(n+1)}(A)$に対しても(153)が成り立つことを示します。(152.2)を用います。

$$\begin{aligned}
G^{(n+1)}(A) &= f^{(n+1)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{0} + F^{(0)}(A)G^{(n)}(A)F^{(0)}(A) \\
&= f^{(n+1)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{0} + F^{(0)}(A)\left(\sum_{l=0}^{n} f^{(n-l)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{2l}\right)F^{(0)}(A) \\
&= f^{(n+1)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{0} + \sum_{l=0}^{n} f^{(n-l)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{2l+2}
\end{aligned}$$

ここで $\sum$ の変数lに対して $k=l+1$ と置けば

$$\begin{aligned}
G^{(n+1)}(A) &= f^{(n+1)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{0} + \sum_{k=1}^{n+1} f^{(n+1-k)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} f^{(n+1-k)}(A)\left(F^{(0)}(A)\right)^{2k} \qquad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}$$

ちょっと失敗してしまいましたね。最初に$G^{(n)}(A)$に関する式(153)を求めていたならば、(149.2)

$$F^{(n)}(A) = F^{(0)}(A)G^{(n)}(A) \qquad (n \geq 0)$$

より $F^{(n)}(A)$に関する式(151)は直ちに得られていたというのに。

10月5日(火) Shyuko 記号と Pfaffian(続き)

(151)の両辺に$\overset{(0)}{F}(A)$を掛け、さらに Trace $\overset{(1)}{d}(\cdot)$を作ります。

$$\overset{(1)}{d}(\overset{(n)}{F}(A)\overset{(0)}{F}(A)) = \sum_{k=0}^{n} \overset{(n-k)}{f}(A)\, \overset{(1)}{d}((\overset{(0)}{F}(A))^{2(k+1)}) \qquad \text{(W18)}$$

この左辺を計算します。 $\overset{(0)}{F}(A) = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ です。

$$\overset{(1)}{d}(\overset{(n)}{F}(A)A) = \frac{1}{2(n+1)(2^n n!)^2} \begin{bmatrix} \beta\alpha & \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \mu\nu & \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix} A_{\mu\nu}\left(\prod_{k=1}^{n} A_{\alpha_k\beta_k} A_{\mu_k\nu_k}\right) A_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{-1}{2(n+1)(2^n n!)^2} \begin{bmatrix} \alpha\beta & \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \mu\nu & \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix} A_{\alpha\beta} A_{\mu\nu} \prod_{k=1}^{n} A_{\alpha_k\beta_k} A_{\mu_k\nu_k}$$

$$= \frac{-(2^{n+1}(n+1)!)^2}{2(n+1)(2^n n!)^2} \overset{(n+1)}{f}(A)$$

$$= -2(n+1)\overset{(n+1)}{f}(A)$$

同様に

$$\overset{(1)}{d}(\overset{(n)}{F}(A)\,{}^tA) = \frac{1}{2(n+1)(2^n n!)^2} \begin{bmatrix} \alpha\beta & \alpha_1\beta_1 & \cdots & \alpha_n\beta_n \\ \mu\nu & \mu_1\nu_1 & \cdots & \mu_n\nu_n \end{bmatrix} A_{\mu\nu}\left(\prod_{k=1}^{n} A_{\alpha_k\beta_k} A_{\mu_k\nu_k}\right) A_{\alpha\beta}$$

$$= +2(n+1)\overset{(n+1)}{f}(A)$$

$$\overset{(1)}{d}(\overset{(n)}{F}(A)\overset{(0)}{F}(A)) = -2(n+1)\overset{(n+1)}{f}(A) \qquad \text{(W19)}$$

【P489】 Shyuko記号と Pfaffian（続き）

(W18), (W19)より

$$\boxed{2(n+1)\overset{(n+1)}{f}(A) = -\sum_{k=0}^{n} \overset{(n-k)}{f}(A)\overset{(1)}{d}\left(\left(\overset{(0)}{F}(A)\right)^{2(k+1)}\right)} \quad \text{定理(154)}$$

$\overset{(n)}{d}(A)$の展開公式(143)において

$$n \longrightarrow 2(n+1), \quad A \longrightarrow \overset{(0)}{F}(A)$$

とすれば

$$2(n+1)\overset{(2(n+1))}{d}\left(\overset{(0)}{F}(A)\right) = -\sum_{l=1}^{2(n+1)} (-1)^{l}\overset{(2(n+1)-l)}{d}\left(\overset{(0)}{F}(A)\right)\overset{(1)}{d}\left(\left(\overset{(0)}{F}(A)\right)^{l}\right) \quad (W20)$$

ここで、$\overset{(0)}{F}(A)$は反対称行列だから

$$\overset{(m)}{d}\left(\overset{(0)}{F}(A)\right) = 0 \quad (m\text{が奇数のとき})$$

よって、(W20)の右辺の$\sum_{l}$は偶数のlに対してのみ行えば良いことになります。そこで$l=2(k+1)$と置けば次式が得られます。

$$\boxed{2(n+1)\overset{(2(n+1))}{d}\left(\overset{(0)}{F}(A)\right) = -\sum_{k=0}^{n} \overset{(2(n-k))}{d}\left(\overset{(0)}{F}(A)\right)\overset{(1)}{d}\left(\left(\overset{(0)}{F}(A)\right)^{2(k+1)}\right)} \quad \text{定理(155)}$$

(154)と(155)を良く見比べましょう。とても似てますね。それだけではありません。定義より

$$\overset{(0)}{f}(A) = 1 = \overset{(0)}{d}\left(\overset{(0)}{F}(A)\right)$$

数学的帰納法で次式が得られるのは自明です（証略）。

【P490】10月6日(水) Shyuko記号とPfaffian(続き)

$$f^{(n)}(A) = d^{(2n)}(F^{(0)}(A)) \qquad \text{定理(156)}$$

(156)より $d^{(2n)}(F^{(0)}(A))$ が $f^{(n)}(A)$ で与えられ、$f^{(n)}(A)$ は(154)より求まります。

(154)によって $f^{(1)}(A), f^{(2)}(A), f^{(3)}(A), \cdots$ を具体的に計算してみましょう。(154)は次のように表わせます。

$$P_n = f^{(n)}(A), \quad g_n = -\frac{1}{2} d^{(1)}\left((F^{(0)}(A))^{2(n+1)}\right) \qquad .1)$$

$$P_0 = 1, \quad (n+1)P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}\, g_k \qquad .2)$$

定理(157)

.2)の右辺が P_n と g_n の畳み込み(Convolution)になっていることに留意しておきましょう。$P_1, P_2, P_3, \cdots$ を .2)を用いて直接計算します。

$$P_1 = P_0 g_0 = g_0$$

$$2P_2 = P_1 g_0 + P_0 g_1 = g_0 g_0 + g_1$$

$$P_2 = \frac{1}{2} g_0 g_0 + \frac{1}{2} g_1$$

$$3P_3 = P_2 g_0 + P_1 g_1 + P_0 g_2$$

$$= \left(\frac{1}{2} g_0 g_0 + \frac{1}{2} g_1\right) g_0 + (g_0) g_1 + g_2$$

【P491】10月10日(日) Shyuko記号とPfaffian(続き)

$$3P_3 = \frac{1}{2}q_0^2 q_0 + \frac{3}{2} q_0 q_1 + q_2$$

$$P_3 = \frac{1}{3!} q_0^2 q_0 + \frac{1}{2} q_0 q_1 + \frac{1}{3} q_2$$

$$4P_4 = P_3 q_0 + P_2 q_1 + P_1 q_2 + P_0 q_3$$

$$= \left(\frac{1}{3!} q_0^2 q_0 + \frac{1}{2} q_0 q_1 + \frac{1}{3} q_2\right) q_0$$

$$+ \left(\frac{1}{2} q_0 q_0 + \frac{1}{2} q_1\right) q_1 + (q_0) q_2 + q_3$$

$$= \frac{1}{3!} q_0^3 q_0 + \frac{1}{2} q_0^2 q_1 + \frac{1}{3} q_0 q_2$$

$$+ \frac{1}{2} q_0^2 q_1 + \frac{1}{2} q_1^2 + q_0 q_2 + q_3$$

$$= \frac{1}{3!} q_0^3 q_0 + q_0^2 q_1 + \frac{4}{3} q_0 q_2 + \frac{1}{2} q_1^2 + q_3$$

$$P_4 = \frac{1}{4!} q_0^3 q_0 + \frac{1}{4} q_0^2 q_1 + \frac{1}{3} q_0 q_2 + \frac{1}{4 \cdot 2} q_1^2 + \frac{1}{4} q_3$$

$$5P_5 = P_4 q_0 + P_3 q_1 + P_2 q_2 + P_1 q_3 + P_0 q_4$$

$$= \left(\frac{1}{4!} q_0^3 q_0 + \frac{1}{4} q_0^2 q_1 + \frac{1}{3} q_0 q_2 + \frac{1}{4 \cdot 2} q_1^2 + \frac{1}{4} q_3\right) q_0$$

$$+ \left(\frac{1}{3!} q_0^2 q_0 + \frac{1}{2} q_0 q_1 + \frac{1}{3} q_2\right) q_1$$

$$+ \left(\frac{1}{2} q_0 q_0 + \frac{1}{2} q_1\right) q_2 + (q_0) q_3 + q_4$$

$$= \frac{1}{4!} q_0^4 q_0 + \frac{1}{4} q_0^3 q_1 + \frac{1}{3} q_0^2 q_2 + \frac{1}{4 \cdot 2} q_0 q_1^2 + \frac{1}{4} q_0 q_3$$

$$+ \frac{1}{3!} q_0^3 q_1 + \frac{1}{2} q_0 q_1^2 + \frac{1}{3} q_1 q_2$$

$$+ \frac{1}{2!} q_0^2 q_2 + \frac{1}{2} q_1 q_2 + q_0 q_3 + q_4$$

$$5P_5 = \frac{1}{4!} q_0^4 q_0 + \frac{5}{4 \cdot 3} q_0^3 q_1 + \frac{5}{3 \cdot 2} q_0^2 q_2 + \frac{5}{4} q_0 q_3$$

$$+ \frac{5}{4 \cdot 2} q_0 q_1^2 + \frac{5}{3 \cdot 2} q_1 q_2 + q_4$$

【P492】 Shyuko記号とPfaffian（続き）

$$P_5 = \frac{1}{5!} q_0^4 q_0 + \frac{1}{4\cdot 3} q_0^3 q_1 + \frac{1}{3\cdot 2} q_0^2 q_2 + \frac{1}{4} q_0 q_3$$
$$+ \frac{1}{4\cdot 2} q_0 q_1^2 + \frac{1}{3\cdot 2} q_1 q_2 + \frac{1}{5} q_4$$

$$6P_6 = P_5 q_0 + P_4 q_1 + P_3 q_2 + P_2 q_3 + P_1 q_4 + P_0 q_5$$
$$= \frac{1}{5!} q_0^5 q_0 + \frac{1}{4\cdot 3} q_0^4 q_1 + \frac{1}{3\cdot 2} q_0^3 q_2 + \frac{1}{4} q_0^2 q_3$$
$$+ \frac{1}{4\cdot 2} q_0^2 q_1^2 + \frac{1}{3\cdot 2} q_0 q_1 q_2 + \frac{1}{5} q_0 q_4$$
$$+ \frac{1}{4!} q_0^4 q_1 + \frac{1}{4} q_0^2 q_1^2 + \frac{1}{3} q_0 q_1 q_2 + \frac{1}{4\cdot 2} q_1^3$$
$$+ \frac{1}{4} q_1 q_3$$
$$+ \frac{1}{3!} q_0^3 q_2 + \frac{1}{2} q_0 q_1 q_2 + \frac{1}{3} q_2^2$$
$$+ \frac{1}{2!} q_0^2 q_3 + \frac{1}{2} q_1 q_3 + q_0 q_4 + q_5$$

$$6P_6 = \frac{1}{5!} q_0^5 q_0 + \frac{1}{4\cdot 2} q_0^4 q_1 + \frac{1}{3} q_0^3 q_2 + \frac{3}{4} q_0^2 q_3$$
$$+ \frac{3}{4\cdot 2} q_0^2 q_1^2 + \frac{6}{3\cdot 2} q_0 q_1 q_2 + \frac{6}{5} q_0 q_4 + \frac{1}{4\cdot 2} q_1^3$$
$$+ \frac{3}{4} q_1 q_3 + \frac{1}{3} q_2^2 + q_5$$

$$P_6 = \frac{1}{6!} q_0^5 q_0 + \frac{1}{6\cdot 4\cdot 2} q_0^4 q_1 + \frac{1}{6\cdot 3} q_0^3 q_2 + \frac{1}{4\cdot 2} q_0^2 q_3$$
$$+ \frac{1}{5} q_0 q_4 + \frac{1}{6} q_5$$
$$+ \frac{1}{4\cdot 4} q_0^2 q_1^2 + \frac{1}{3\cdot 2} q_0 q_1 q_2 + \frac{1}{6\cdot 4\cdot 2} q_1^3$$
$$+ \frac{1}{4\cdot 2} q_1 q_3 + \frac{1}{6\cdot 3} q_2^2$$

$$
\begin{aligned}
P_0 &= 1 \\
P_1 &= q_0 \\
P_2 &= \frac{1}{2!} q_0 q_0 + \frac{1}{2} q_1 \\
P_3 &= \frac{1}{3!} q_0^2 q_0 + \frac{1}{2} q_0 q_1 + \frac{1}{3} q_2 \\
P_4 &= \frac{1}{4!} q_0^3 q_0 + \frac{1}{4} q_0^2 q_1 + \frac{1}{3} q_0 q_2 + \frac{1}{4} q_3 \\
&\quad + \frac{1}{4\cdot 2} q_1^2 \\
P_5 &= \frac{1}{5!} q_0^4 q_0 + \frac{1}{4\cdot 3} q_0^3 q_1 + \frac{1}{3\cdot 2} q_0^2 q_2 + \frac{1}{4} q_0 q_3 \\
&\quad + \frac{1}{5} q_4 \\
&\quad + \frac{1}{4\cdot 2} q_0 q_1^2 + \frac{1}{3\cdot 2} q_1 q_2 \\
P_6 &= \frac{1}{6!} q_0^5 q_0 + \frac{1}{6\cdot 4\cdot 2} q_0^4 q_1 + \frac{1}{6\cdot 3} q_0^3 q_2 + \frac{1}{4\cdot 2} q_0^2 q_3 \\
&\quad + \frac{1}{5} q_0 q_4 + \frac{1}{6} q_5 \\
&\quad + \frac{1}{4\cdot 4} q_0^2 q_1^2 + \frac{1}{3\cdot 2} q_0 q_1 q_2 + \frac{1}{6\cdot 4\cdot 2} q_1^3 \\
&\quad + \frac{1}{4\cdot 2} q_1 q_3 + \frac{1}{6\cdot 3} q_2^2
\end{aligned}
$$

定理(158)

このように(157.2)を用いれば、順次$P_1, P_2, P_3, \cdots$を$g_0, g_1, g_2, \cdots$で表わす式を計算することが出来ます。計算結果(158)を観察すると多少の規則性が窺えます。例えば、どの項の係数も整数分の1であると予想されます。しかし一般のnに対するP_nを一挙に表現する式を予想するのは困難です。

それだけではありません。(157.2)はとても不便な式です。P_{n+1}を計算するためには$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n$全ての計算結果を用いる必要があり、その結果として同類項が複数個出現し、それらの係数を足し合わせる必要が生じてしまうのです。もっと良い方法は無いのでしょうか?

(157.2)の右辺がP_nとg_nの畳み込みになっていることに注意しましたね。畳み込みを取り扱う際の常套手段(Common Trick)とも云える母関数を用いる方法を試みましょう。xの形式的な(Conventional)冪級数$P(x)$, $g(x)$を次のように定めます。

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n, \quad P(0) = 1, \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n \qquad \text{定義(159)}$$

(157.2)と(159)より直ちに次式が得られます。

$$P'(x) = P(x)\,g(x), \quad P(0) = 1 \qquad \text{定理(160)}$$

$P'(x)$は$\dfrac{d}{dx}P(x)$を意味します。$g(x)$を既知関数とし$P(x)$を未知関数とするならば、(160)式は$P(x)$に関する微分方程式と見做せます。しかもこの方程式は容易く解くことが出来ます。

【P495】Shyuko記号とPfaffian（続き）

$$\int \frac{P'(x)}{P(x)}dx = \int q(x)dx$$

$$\log P(x) = \int q(x)dx$$

$$P(x) = \exp\left(\int q(x)dx\right) \qquad \text{(W21)}$$

$P(0)=1$ を考慮すれば

$$P(x) = \exp\left(q_0 x + \frac{1}{2}q_1 x^2 + \frac{1}{3}q_2 x^3 + \frac{1}{4}q_3 x^4 \cdots\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}q_{k-1}x^k\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty}\exp\left(\frac{1}{k}q_{k-1}x^k\right)$$

$$P(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m_k=0}^{\infty}\frac{1}{m_k!\,k^{m_k}}q_{k-1}^{m_k}x^{km_k}\right) \qquad \text{(W22)}$$

(W22)の両辺のx^nの係数を等置すれば 次式が得られます。

$$P_n = \sum_{mSet(n)}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{m_k!\,k^{m_k}}q_{k-1}^{m_k}\right) \quad (n \geqq 1) \qquad .1)$$

$$mSet(n) = \left\{(m_1, m_2, \cdots, m_n) \;\middle|\; m_k\text{は非負整数}\ (k=1,2,\cdots,n)\ ,\ \sum_{k=1}^{n}k m_k = n\right\} \qquad .2)$$

定理(161)

【P496】10月13日(水) Shyuko記号とPfaffian(続き)

mSet(n)はそれ自身、組合せ論的かつ整数論的な、閉じた問題で、しかも魅力的で難しい問題だと思います。もしいつか近いうちに、一般のnのmSet(n)に関した何らかのIdeaが得られたとしたならば、是非とも当文書で論じてみたいものです。

いくつかのmSet(n)を求めてみましょう。

$n=1.$ $\quad 1\cdot m_1 = 1$

$$\mathrm{mSet}(1) = \{(1)\} \quad , \#(\mathrm{mSet}(1)) = 1$$

$n=2.$ $\quad 1\cdot m_1 + 2m_2 = 2$

$$\mathrm{mSet}(2) = \{(2,0),\ (0,1)\} \quad , \#(\mathrm{mSet}(2)) = 2$$

$n=3.$ $\quad 1\cdot m_1 + 2m_2 + 3m_3 = 3$

$$\mathrm{mSet}(3) = \{(3,0,0),\ (1,1,0),\ (0,0,1)\} \quad , \#(\mathrm{mSet}(3)) = 3$$

$n=4.$ $\quad 1\cdot m_1 + 2m_2 + 3m_3 + 4m_4 = 4$

$$\mathrm{mSet}(4) = \{(4,0,0,0),\ (2,1,0,0),\ (1,0,1,0),\ (0,2,0,0),\ (0,0,0,1)\} \quad , \#(\mathrm{mSet}(4)) = 5$$

【P497】Shyuko記号とPfaffian（続き）

$n=5$ $\quad 1\cdot m_1+2m_2+3m_3+4m_4+5m_5=5$

$$
\begin{aligned}
mSet(5)=\{&(5,0,0,0,0),\\
&(3,1,0,0,0),\\
&(2,0,1,0,0),\\
&(1,2,0,0,0),\\
&(1,0,0,1,0),\\
&(0,1,1,0,0),\\
&(0,0,0,0,1)\}
\end{aligned}
\quad ,\ \#(mSet(5))=7
$$

$n=6$ $\quad 1\cdot m_1+2m_2+3m_3+4m_4+5m_5+6m_6=6$

$$
\begin{aligned}
mSet(6)=\{&(6,0,0,0,0,0),\\
&(4,1,0,0,0,0),\\
&(3,0,1,0,0,0),\\
&(2,2,0,0,0,0),\\
&(2,0,0,1,0,0),\\
&(1,1,1,0,0,0),\\
&(1,0,0,0,1,0),\\
&(0,3,0,0,0,0),\\
&(0,1,0,1,0,0),\\
&(0,0,2,0,0,0),\\
&(0,0,0,0,0,1)\}
\end{aligned}
\quad ,\ \#(mSet(6))=11
$$

これらの結果と(161.1)より直ちに(158)が得られます（はずです）。$\#(S)$を集合Sの元の個数とするとき、$\#(mSet(n))$を求めることはそれほど難しくありません。でもこの問題も、$mSet(n)$自身に関するIdeaが得られたとしたら、その際に論じることにします。

当節で今までの議論に登場した命題(定義や定理)は全て、一般のN次正方行列Aに関するものでした。ここからはもっぱら、N次反対称行列Aに限定して論じることにします。

次が成り立ちます。

Aは反対称行列 $\Longleftrightarrow$ $F^{(0)}(A) = A$ 定理(162)

ほとんど自明ですが、重要な命題ですから、丁寧に証明しましょう。

($\Longrightarrow$) ${}^tA = -A$ とします。

$$F^{(0)}(A) = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$$
$$= \frac{1}{2}(A + A)$$
$$= A.$$

($\Longleftarrow$) $F^{(0)}(A) = A$ とします。

$${}^tA = {}^t(F^{(0)}(A))$$
$$= {}^t\left(\frac{1}{2}(A - {}^tA)\right)$$
$$= \frac{1}{2}({}^tA - {}^t({}^tA))$$
$$= \frac{1}{2}({}^tA - A)$$
$$= -F^{(0)}(A)$$
$$= -A$$

Q.E.D.

今までに登場した、$F^{(0)}(A)$が出現する全ての命題を、$F^{(0)}(A)$を

【P498】Shyuko記号とPfaffian（続き）

Aに置き換えて再記するつもりはありません。但し、(156)と(161)は別格です。この2つの定理は当節が目指していた主たる成果だからです。(156)は、

AをN次の反対称行列とします。下記が成り立ちます。

$$d^{(2m)}(A) = f^{(m)}(A) \quad (m=0,1,2,3,\cdots\cdots) \qquad .1)$$

$$d^{(2m+1)}(A) = 0 \quad (m=0,1,2,3,\cdots\cdots) \qquad .2)$$

$$\det(A) = f^{(M)}(A) \quad (N=2M) \qquad .3)$$

$$\det(A) = 0 \quad (N=2M+1) \qquad .4)$$

定理(163)

(161)は、P_n, g_nの定義(157.1)を用いると、

AをN次の反対称行列とします。下記が成り立ちます。

$$f^{(n)}(A) = \sum_{mSet(n)} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{m_k}}{(2k)^{m_k} m_k!} \left(d^{(1)}(A^{2k}) \right)^{m_k} \right) \quad (n \geqq 1) \qquad .1)$$

$$mSet(n) = \left\{ (m_1, m_2, \cdots, m_n) \;\middle|\; m_k \text{は非負整数} \ (k=1,2,3,\cdots,n) \ , \ \sum_{k=1}^{n} k m_k = n \right\} \qquad .2)$$

定理(164)

【P499】10月16日(土) Shyuko記号とPfaffian(続き)

(163.3)の$\det(A)$を$f^{(M)}(A)$の定義式で直接表現してみましょう。当節では添字集合を$\{1,2,3,\cdots,N\}$に固定していることを思い出しましょう。定理(31),(30)を用いるので再記します。

$$\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_N\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_N\end{bmatrix} = \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_N}\varepsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_N}$$ 定理(31)の再記

$$\varepsilon_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\cdots\sigma(N)} = \mathrm{sgn}(\sigma)$$ 定理(30)の再記

Aを偶数次$N=2M$の反対称行列とします。

$$\begin{aligned}
\det(A) &= f^{(M)}(A)\\
&= \frac{1}{(2^M M!)^2}\begin{bmatrix}\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_M\beta_M\\ \mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\cdots\mu_M\nu_M\end{bmatrix}\prod_{m=1}^{M}A_{\alpha_m\beta_m}A_{\mu_m\nu_m}\\
&= \frac{1}{(2^M M!)^2}\varepsilon_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_M\beta_M}\cdot\varepsilon_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\cdots\mu_M\nu_M}\\
&\qquad \prod_{m=1}^{M}A_{\alpha_m\beta_m}A_{\mu_m\nu_m}\\
&= \left(\frac{1}{2^M M!}\varepsilon_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_M\beta_M}\prod_{m=1}^{M}A_{\alpha_m\beta_m}\right)\\
&\quad\cdot\left(\frac{1}{2^M M!}\varepsilon_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\cdots\mu_M\nu_M}\prod_{m=1}^{M}A_{\mu_m\nu_m}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2^M M!}\varepsilon_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\cdots\alpha_M\beta_M}\prod_{m=1}^{M}A_{\alpha_m\beta_m}\right)^2
\end{aligned}$$

ここでN個のダミー添字$\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_M,\beta_M$は全て異なるものについてのみ和をとれば良いので、置換の和に置き換えるこが出来ます。

【P500】Shyuko記号とPfaffian（続き）

$$\det(A) = \left(\frac{1}{2^M M!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\varepsilon_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\cdots\sigma(2M-1)\sigma(2M)}\prod_{m=1}^{M}A_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{2^M M!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{m=1}^{M}A_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)}\right)^2$$

Aを偶数次$N=2M$の反対称行列とします。次が成り立ちます。

$$\det(A) = (\mathrm{Pf}(A))^2 \qquad .1)$$

$$\mathrm{Pf}(A) = \frac{1}{2^M M!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{m=1}^{M}A_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)} \qquad .2)$$

定理（165）

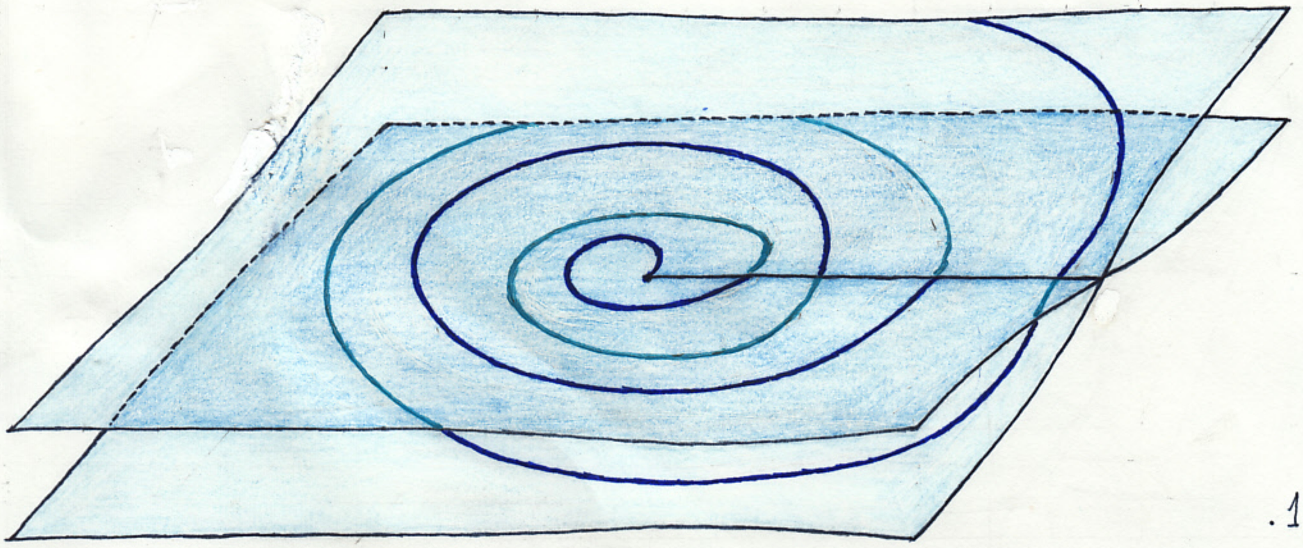
Pf(A)をAのPfaffianと呼びます。.2)は反対称行列でなくとも一般の偶数次$N=2M$の正方行列に対しても同じ式で定義することが出来ますね。導出過程をCheckすれば明らかなように、その場合.1)は次式となります。

$$\det(F^{(0)}(A)) = (\mathrm{Pf}(A))^2$$

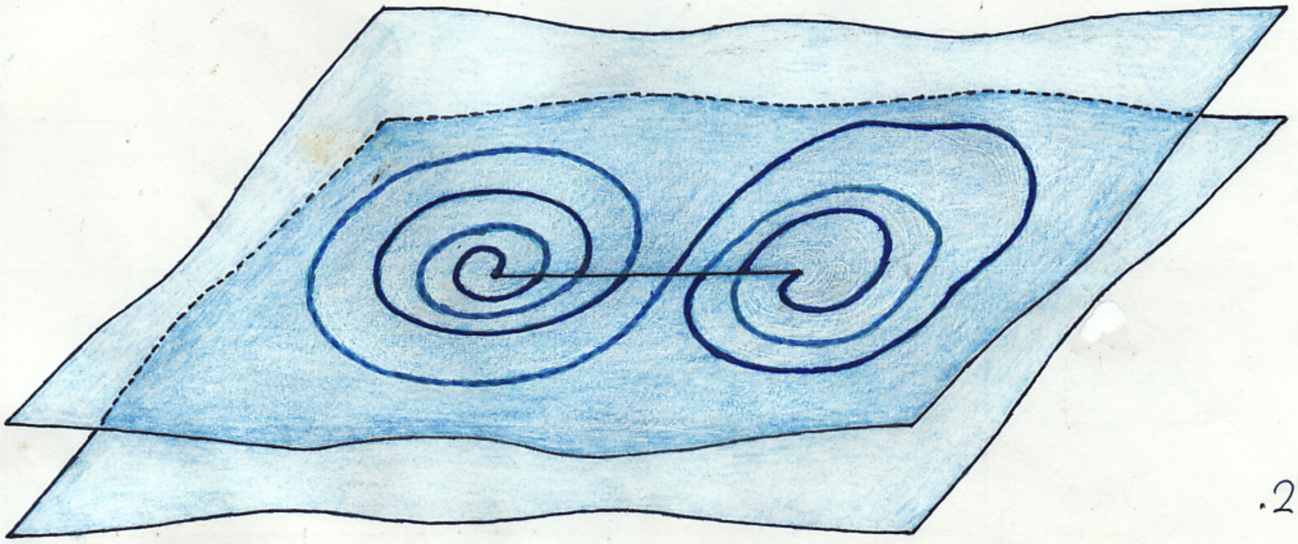
反対称行列のPf(A)の定義.2)を用いて、全ての置換$\sigma\in\mathfrak{S}_N$に渡って展開すると、同類項が多数出現しそうですね。もしかしたらそれぞれ$2^M M!$個ずつ出現するのかも知れません。どんな類の置換に限定すれば同類項の重複を避けられるのか？　今はまだ見当がつきません。

【P501】10月17日（日）小休止：2重平面

● 小休止：2重平面　（遊びのつもりで）



.1



.2

In a Moment　Quantum Entanglement ?

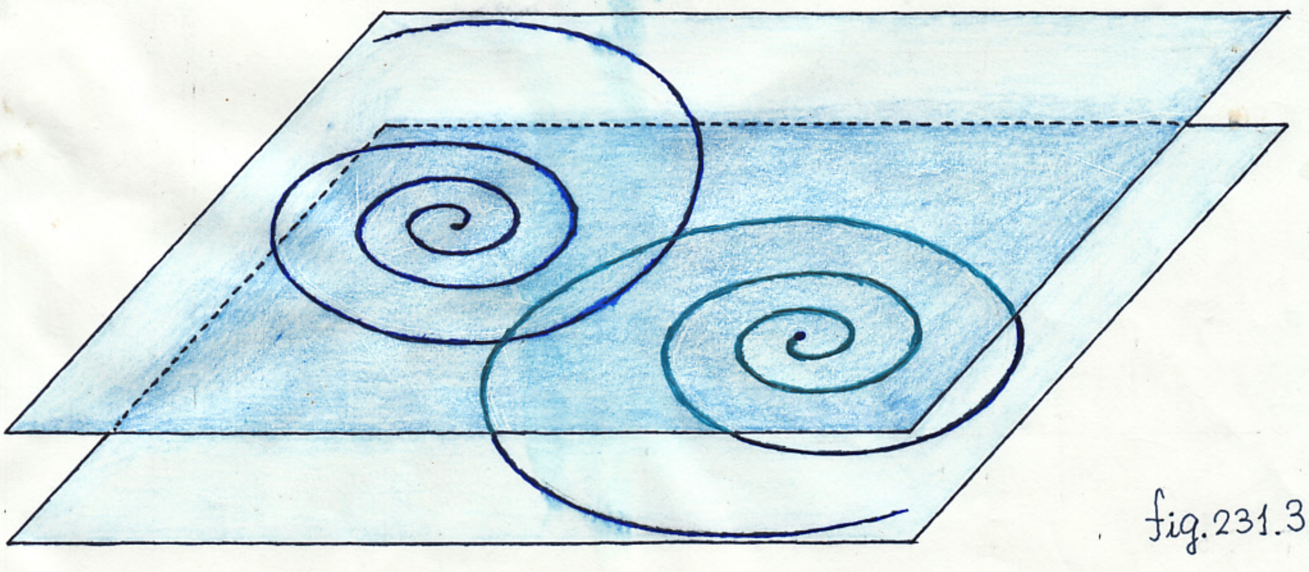


fig.231.3