【P418】2021年7月4日(日) 球面3角法の構造

● 球面3角法の構造

球面3角法における6つの公式の間に成り立つ、必要，十分関係を、思い付く限り手当たり次第に論じましょう。目標は、平面3角法のfig.207に相当する絵を描くことです。抜けがあるかも知れません。

球余1 → 球正余1　　　　関係①

$$\sin a\cos B+\sin b\cos c\cos A$$

$$=\sin a\frac{\cos b-\cos c\cos a}{\sin c\sin a}+\sin b\cos c\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$=\frac{1}{\sin c}(\cos b-\cos c\cos a+\cos c\cos a-\cos b\cos^2 c)$$

$$=\frac{1}{\sin c}\cos b(1-\cos^2 c)=\frac{\cos b\sin^2 c}{\sin c}=\cos b\sin c \quad //$$

球正余1 → 球余1　　　　関係②

$$\sin a\cos B=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A \qquad (W1)$$

$$\sin b\cos A=\cos a\sin c-\sin a\cos c\cos B \qquad (W2)$$

(W2)を $\cos B$ に関して解いて

$$\cos B=\frac{1}{\sin a\cos c}(\cos a\sin c-\sin b\cos A)$$

(W1)の左辺の $\cos B$ に代入します。

$$\frac{1}{\cos c}(\cos a\sin c-\sin b\cos A)=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos A$$

$$\cos a\sin c-\sin b\cos A=\cos b\cos c\sin c-\sin b\cos^2 c\cos A$$

$$\sin b(1-\cos^2 c)\cos A=\cos a\sin c-\cos b\cos c\sin c$$

【P419】球面3角法の構造（続き）

$$\sin b \sin^2 c \cos A = \sin c\,(\cos a - \cos b \cos c)$$

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c \qquad //$$

球余2 $\longrightarrow$ 球正余2 　　関係③

$$
\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\
&= -\cos B(-\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c) + \sin B \sin C \cos a \\
&= \cos A \cos^2 B - \cos B \sin A \sin B \cos c + \sin B \sin C \cos a \\
&= \cos A - \cos A \sin^2 B - \cos B \sin A \sin B \cos c + \sin B \sin C \cos a \\
\oslash \quad 0 &= -\cos A \sin^2 B - \cos B \sin A \sin B \cos c + \sin B \sin C \cos a \\
&= \sin B(-\cos A \sin B - \cos B \sin A \cos c + \sin C \cos a) \\
\oslash \quad 0 &= -\cos A \sin B - \cos B \sin A \cos c + \sin C \cos a \qquad //
\end{aligned}
$$

球正余2 $\longrightarrow$ 球余2 　　関係④

$$
\begin{aligned}
\sin A \cos b &= \cos B \sin C + \cos C \sin B \cos a \\
&= \cos B \sin C + \cos C(\cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b) \\
&= \cos B \sin C + \cos C \cos A \sin C + \sin A \cos^2 C \cos b \\
&= \cos B \sin C + \cos C \cos A \sin C + \sin A \cos b \\
&\qquad - \sin A \sin^2 C \cos b \\
\oslash \quad 0 &= \cos B \sin C + \cos C \cos A \sin C - \sin A \sin^2 C \cos b \\
&= \sin C(\cos B + \cos C \cos A - \sin A \sin C \cos b) \\
\oslash \quad 0 &= \cos B + \cos C \cos A - \sin A \sin C \cos b \qquad //
\end{aligned}
$$

球余1 $\longrightarrow$ 球正1 　　関係⑤

【P420】7月5日(月) 球面3角法の構造(続き)

(球余1)より

$$\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A=\cos a \quad \text{(W3)}$$

$$\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos B=\cos b \quad \text{(W4)}$$

(W3)・$\cos a$ − (W4)・$\cos b$ を作り $\cos c$ の項を消します。

$$\cos a\sin b\sin c\cos A-\cos b\sin a\sin c\cos B=\cos^2 a-\cos^2 b \quad \text{(W5)}$$

ここで

$$F=\sin b\cos a\cos A-\sin a\cos b\cos B \quad \text{(W6)}$$

$$G=\cos^2 a-\cos^2 b \quad \text{(W7)}$$

とおくと(W5)は

$$F\sin c=G \quad \text{(W8)}$$

(W4)・$\sin b\cos A$ − (W3)・$\sin a\cos B$ を作り、$\sin c$ の項を消します。

$$\cos a\cos c\sin b\cos A-\cos b\cos c\sin a\cos B$$
$$=\cos b\sin b\cos A-\cos a\sin a\cos B$$

$$(\sin b\cos a\cos A-\sin a\cos b\cos B)\cos c$$
$$=\cos b\sin b\cos A-\cos a\sin a\cos B \quad \text{(W9)}$$

ここで

$$H=\cos b\sin b\cos A-\cos a\sin a\cos B \quad \text{(W10)}$$

とおくと(W9)は

$$F\cos c=H \quad \text{(W11)}$$

(W8),(W11)より

$$F^2=G^2+H^2$$

$$G^2=F^2-H^2=(F+H)(F-H) \quad \text{(W12)}$$

$F+H$, $F-H$ を計算しましょう。

$$F+H=\sin b\cos a\cos A-\sin a\cos b\cos B$$
$$+\cos b\sin b\cos A-\cos a\sin a\cos B$$
$$=\sin b\cos A(\cos a+\cos b)-\sin a\cos B(\cos a+\cos b)$$

【P421】 球面3角法の構造（続き）

$$F + H = (\cos a + \cos b)(\sin b \cos A - \sin a \cos B) \qquad \text{(W13)}$$

$$\begin{aligned} F - H &= \sin b \cos a \cos A - \sin a \cos b \cos B \\ &\quad - \cos b \sin b \cos A + \cos a \sin a \cos B \\ &= \sin b \cos A (\cos a - \cos b) + \sin a \cos B (\cos a - \cos b) \\ &= (\cos a - \cos b)(\sin b \cos A + \sin a \cos B) \qquad \text{(W14)} \end{aligned}$$

(W7), (W12), (W13)(W14)より

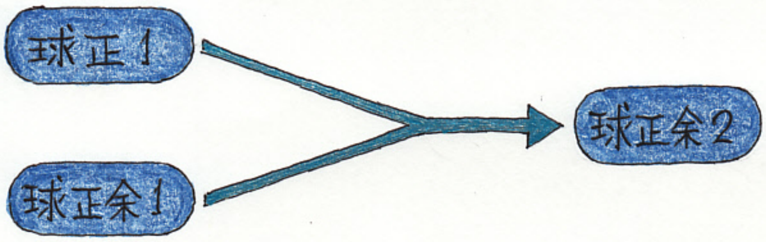
$$(\cos^2 a - \cos^2 b)^2 = (\cos^2 a - \cos^2 b)(\sin^2 b \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B)$$

$$\sin^2 b \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B = \cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b - \sin^2 a$$

$$\sin^2 b (1 - \cos^2 A) = \sin^2 a (1 - \cos^2 B)$$

$$\sin^2 b \sin^2 A = \sin^2 a \sin^2 B$$

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B \quad //$$



関係⑥

(球正余1)より

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

両辺に $\sin B$ を掛けて

$$(\sin a \sin B) \cos B = \cos b (\sin c \sin B) - \sin b \cos c \cos A \sin B$$

(球正1)を用いると

$$\sin b \sin A \cos B = \cos b \sin b \sin C - \sin b \cos c \cos A \sin B$$

$$0 = \sin b (\cos B \sin A - \cos b \sin C + \sin B \cos A \cos c)$$

$$0 = \cos B \sin A - \cos b \sin C + \sin B \cos A \cos c \quad //$$

関係⑦

関係①,⑤,⑥,④より導出されます。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & ① \arrow[r] & (\text{球正余1}) \arrow[dr] & & & & \\
(\text{球余1}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & ⑥ \arrow[r] & (\text{球正余2}) \arrow[r] & ④ \arrow[r] & (\text{球余2}) \\
 & ⑤ \arrow[r] & (\text{球正 1}) \arrow[ur] & & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{球正1} \arrow[dr] & \\
 & \text{球正余1} \\
\text{球正余2} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

関係⑧

（球正余2）より

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$$

両辺に $\sin b$ を掛けて

$$(\sin b \sin A) \cos b = \cos B (\sin b \sin C) + \sin b \cos a \sin B \cos C$$

（球正1）を用いると

$$\sin a \sin B \cos b = \cos B \sin c \sin B + \sin b \cos a \sin B \cos C$$

$$0 = \sin B (\cos b \sin a - \cos B \sin c - \sin b \cos a \cos C)$$

$$0 = \cos b \sin a - \cos B \sin c - \sin b \cos a \cos C \quad //$$

$$\text{球余2} \longrightarrow \text{球正1}$$

関係⑨

（球余2）より

$$-\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a = \cos A \qquad (W3)'$$

$$-\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b = \cos B \qquad (W4)'$$

$(W3)' \cdot \cos A - (W4)' \cdot \cos B$ を作り $\cos C$ の項を消します。

$$\cos A \sin B \sin C \cos a - \cos B \sin C \sin A \cos b = \cos^2 A - \cos^2 B \qquad (W5)'$$

ここで

【P423】7月6日(火) 球面3角法の構造(続き)

$$F' = \cos A \sin B \cos a - \cos B \sin A \cos b \qquad (W6)'$$

$$G' = \cos^2 A - \cos^2 B \qquad (W7)'$$

とおくと(W5)'は

$$F' \sin C = G' \qquad (W8)'$$

(W4)'・$\sin B \cos a$ − (W3)'・$\sin A \cos b$ を作り $\sin C$ の項を消します。

$$-\cos C \cos A \sin B \cos a + \cos B \cos C \sin A \cos b$$
$$= \cos B \sin B \cos a - \cos A \sin A \cos b$$

$$(-\cos A \sin B \cos a + \cos B \sin A \cos b)\cos C$$
$$= \cos B \sin B \cos a - \cos A \sin A \cos b \qquad (W9)'$$

ここで

$$H' = \cos B \sin B \cos a - \cos A \sin A \cos b \qquad (W10)'$$

とおくと(W9)'は

$$-F' \cos C = H' \qquad (W11)'$$

(W8)', (W11)'より

$$F'^2 = G'^2 + H'^2$$

$$G'^2 = F'^2 - H'^2 = (F' + H')(F' - H') \qquad (W12)'$$

$F' + H'$, $F' - H'$ を計算しましょう。

$$F' + H' = \cos A \sin B \cos a - \cos B \sin A \cos b$$
$$+ \cos B \sin B \cos a - \cos A \sin A \cos b$$
$$= \sin B \cos a (\cos A + \cos B) - \sin A \cos b (\cos A + \cos B)$$

$$F' + H' = (\cos A + \cos B)(\sin B \cos a - \sin A \cos b) \qquad (W13)'$$

$$F' - H' = \cos A \sin B \cos a - \cos B \sin A \cos b$$
$$- \cos B \sin B \cos a + \cos A \sin A \cos b$$
$$= \sin B \cos a (\cos A - \cos B) + \sin A \cos b (\cos A - \cos B)$$

$$F' - H' = (\cos A - \cos B)(\sin B \cos a + \sin A \cos b) \qquad (W14)'$$

(W7)', (W12)', (W13)', (W14)'より

【P424】球面3角法の構造（続き）

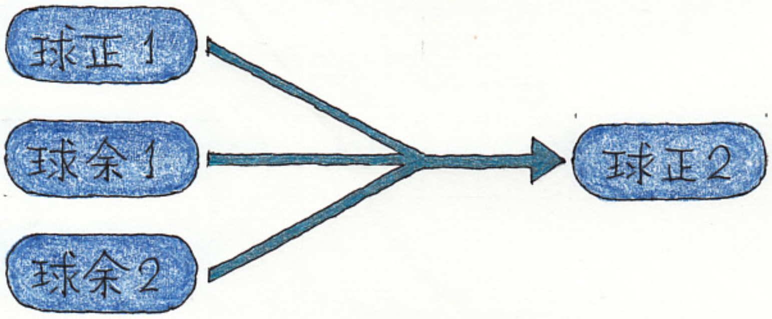
$$(\cos^2 A-\cos^2 B)^2=(\cos^2 A-\cos^2 B)(\sin^2 B\cos^2 a-\sin^2 A\cos^2 b)$$
$$\sin^2 B\cos^2 a-\sin^2 A\cos^2 b=\cos^2 A-\cos^2 B=\sin^2 B-\sin^2 A$$
$$\sin^2 A(1-\cos^2 b)=\sin^2 B(1-\cos^2 a)$$
$$\sin^2 A\sin^2 b=\sin^2 B\sin^2 a$$
$$\sin A\sin b=\sin B\sin a \quad //$$

関係⑩

関係③，⑨，⑧，② より導出されます。

（球余2）$\xrightarrow{③}$（球正余2），（球余2）$\xrightarrow{⑨}$（球正1）

（球正余2），（球正1）$\xrightarrow{⑧}$（球正余1）$\xrightarrow{②}$（球余1）



関係⑪

（球余1），（球余2）より

$$\cos a\cos b\cos C+\cos A\cos B\cos c$$
$$=(\cos a\cos b)\cos C+(\cos A\cos B)\cos c$$
$$=(-\sin a\sin b\cos C+\cos c)\cos C$$
$$\quad+(\sin A\sin B\cos c-\cos C)\cos c$$
$$=-\sin a\sin b\cos^2 C+\sin A\sin B\cos^2 c$$
$$=\sin A\sin B-\sin a\sin b-\sin A\sin B\sin^2 c$$
$$\quad+\sin a\sin b\sin^2 C$$

$$\cos a\cos b\cos C+\cos A\cos B\cos c$$
$$=\sin A\sin B-\sin a\sin b-\sin A\sin B\sin^2 c$$
$$+\sin a\sin b\sin^2 C \qquad \text{(W15)}$$

ところで(球正1)より

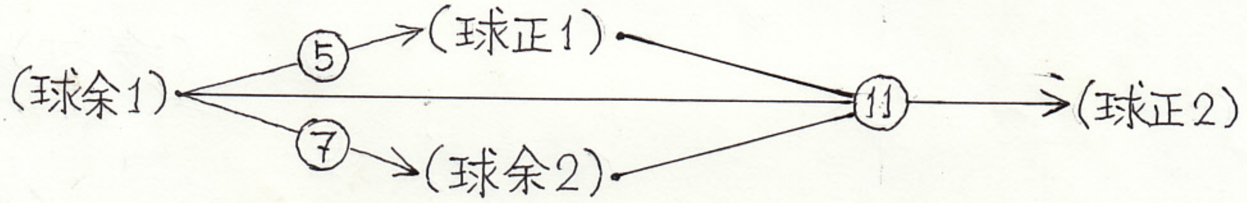
$$\sin a\sin b\sin^2 C=(\sin a\sin C)(\sin b\sin C)$$
$$=(\sin A\sin c)(\sin B\sin c)$$
$$=\sin A\sin B\sin^2 c \qquad \text{(W16)}$$

(W15), (W16)より

$$\cos a\cos b\cos C+\cos A\cos B\cos c=\sin A\sin B-\sin a\sin b \quad /\!/$$

関係⑫

関係⑤, ⑦, ⑪より導出されます。



関係①,…,⑫をまとめて絵にしておきましょう。

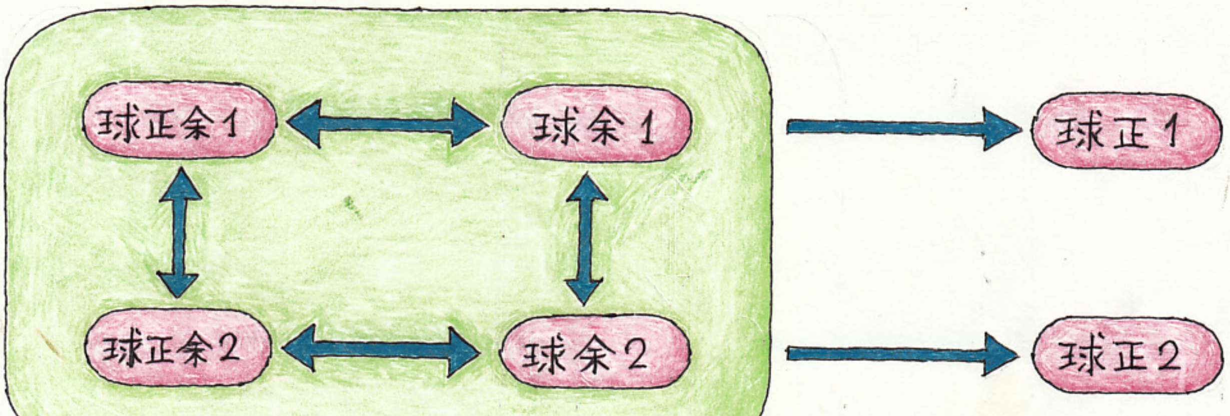


fig. 209

● 小休止：川渡り問題

ある3家族（父，母，娘が2人，息子が2人，召使，犬）がいます。この家族が大きな川を渡ろうとしています。船はひとつしかありません。しかも乗れるのは2人までで、1人は運転手がいります。運転できるのは父と母と召使だけで、父は母がいないと娘を殺してしまい、母は父がいないと息子を殺し、犬は召使がいないと家族を殺してしまいます。どうすれば誰も死なずに川を渡れるでしょうか？
何回往復してもかまいません。ちなみに犬も1人として数えます。

解答例
（最適解か？）

父	息子1	息子2	母	娘1	娘2	召使	犬
F	f_1	f_2	M	m_1	m_2	D	d

F, f_1, f_2, M, m_1, m_2	D, d →	
	← D	d
F, f_2, M, m_1, m_2	D, f_1 →	
	← D, d	f_1
M, m_1, m_2, D, d	F, f_2 →	
	← F	f_1, f_2
m_1, m_2, D, d	F, M →	
	← M	F, f_1, f_2
M, m_1, m_2	D, d →	
	← F	f_1, f_2, D, d
m_1, m_2	M, F →	
	← M	F, f_1, f_2, D, d
m_1	M, m_2 →	
	← D, d	F, f_1, f_2, M, m_2
d	D, m_1 →	
	← D	F, f_1, f_2, M, m_1, m_2
	D, d →	

fig. 210