

● 極射影

3次元 Affine 中の2つの幾何学的実体、3次元球体の2次元球面と、2次元超平面との間に定義される極射影 (Stereographic Projection) が満たすある命題について考察しましょう。当主題で論じるのは2次元極射影です。これを単に極射影と呼ぶことにします。3次元極射影や4次元極射影も存在するはずですが、極射影は、複素関数論や、Möbius変換や、光線の Lorentz 変換と密接な関係があります。これらについては、余裕があれば、主題を新にめて論じるかもしれません。ここでは、むしろ、極射影の保円性と等角性について論じます。

極射影の定義は一意的ではありません。3次元球体の大きさと、球と平面の位置関係に対応して、2つの連続パラメータによって、連続無限個の定義が存在します。これら2つのパラメータを陽に用いて一般的な定義と議論を行うことも出来ますが、出現する式たちを複雑にするだけで、あまり Merit は無いでしょう。そこで、僕はその中の1つだけを極射影と定義することにします。

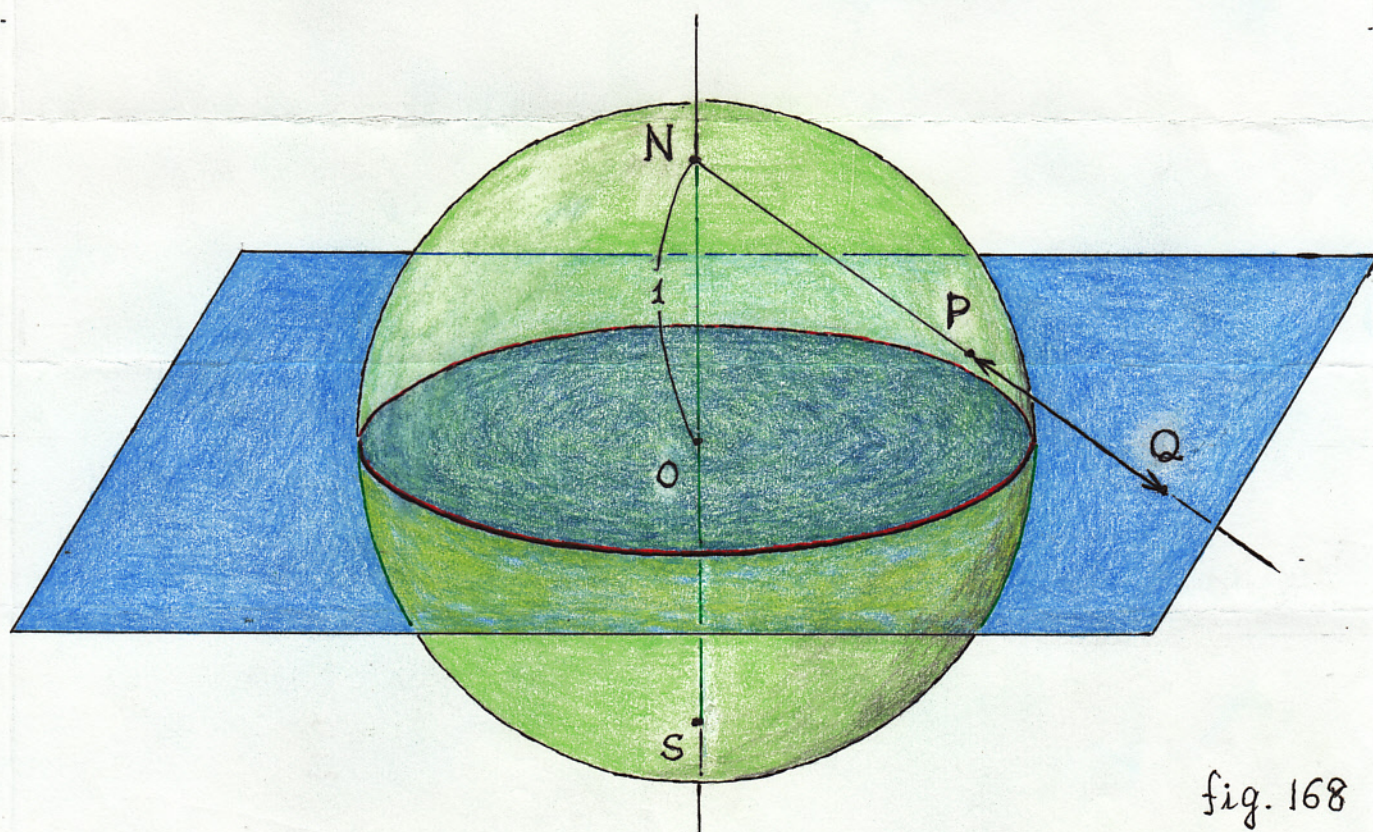


fig. 168において、点Pと点Qの対応付けを(2次元)極射影と呼びます。煩わしい(Annoying)と思いますが、きちんと定義しましょう。

極射影の定義

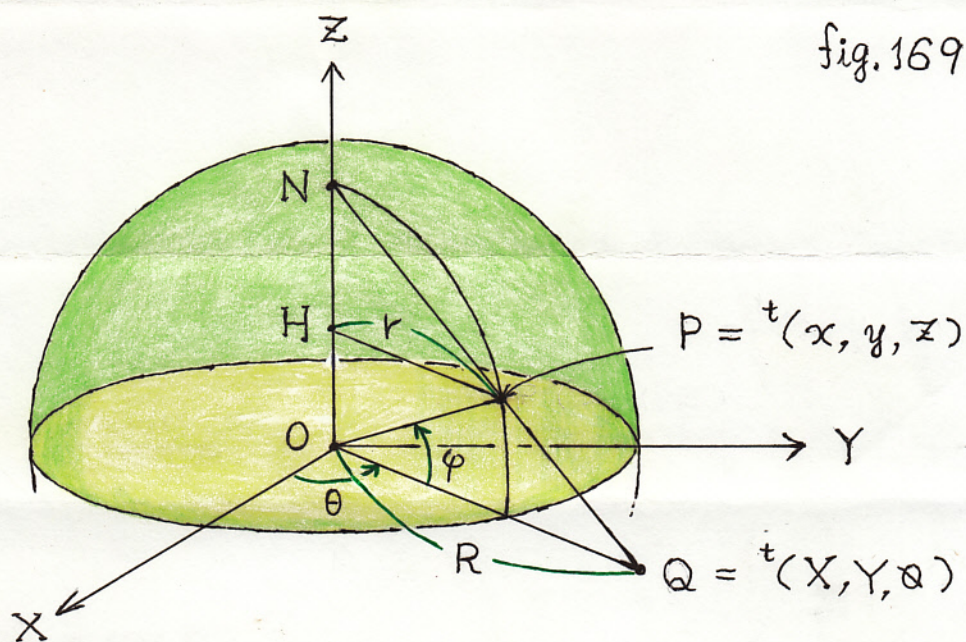
- 中心をOとする単位球面と、平面が、球面上の大円で交わっています。
- 中心Oを通り、平面と垂直な直線は、球面と2点で交わります。一方をNとし、他方をSとします。Nを北極点、Sを南極点と呼びます。
- **北極点以外の**球面上の任意の1点をPとします。
- 2点N, Pを通る直線は、平面と1点で交わります。この点をQとします。
- 点Pから点Qへのこの対応付けは、**Nを除く**球面から平面への全単射です。即ち、球面上の**Nを除く**任意の点Pに対して、平面上の点Qが一意的に定まり、逆に、平面上の任意の点Qに対して、球面上の点Pが一意的に定まります。
- この写像、あるいは、この逆写像を 極射影 と呼びます。
- 極射影に関わる上記の球面、平面をそれぞれ、射影球面、射影平面と呼びます。
- PからQへの写像としての極射影と、QからPへの写像としての極射影を区別する必要がある場合には、それぞれ球面から平面への極射影、平面から球への極射影と呼びます。
- 北極点Nを含む半球を北半球、南極点Sを含む半球を南半球、球面と平面の交線としての大円を、極射影の赤道と呼びます

定義(94)

“北極点以外の”, “Nを除く” という形容詞が気になりますね。この形容詞を除いた定義も可能です。その極射影を 広義の極射影 と呼ぶことにしましょう。広義の極射影の射影平面には **無限遠点** も含まれることになります。複素関数論では有用かも知れませんね。

【P331】 極射影 (続き)

まず、正規直交座標系での、点Pと点Qの座標値の変換式を求めることにしよう。そのために必要な、座標系や、いくつかの線分や角度に対して定義や、識別子の付与をします。



座標系等の定義

- 射影球面の中心Oを原点とし、射影平面をXY平面とし、 $\vec{ON}$ 方向をZ軸方向とする、右手系の正規直交座標系を定めます。
- 点P, Qの座標値をそれぞれ、 ${}^t(x, y, z)$, ${}^t(X, Y, 0)$ とします。
- 点PからZ軸へ降ろした垂線の足をHとします。
- 線分HPの長さをr, 線分OQの長さをRとします。
- X軸と有向線分 $\vec{OQ}$ との成す角を θ とします。但し θ は、Z軸の正方向に関する右螺旋回りに、X軸の正方向から、有向線分 $\vec{OQ}$ へ向って測るものとします。 $(0 \leq \theta < 2\pi)$
- 線分OQと線分OPの成す角を φ とします。但し φ は、その符号が点PのZ成分zと一致するように測るものとします。 $(-\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2})$

【P332】 4月29日(木) 極射影(続き)

z, r, R の関係式を求めよう。

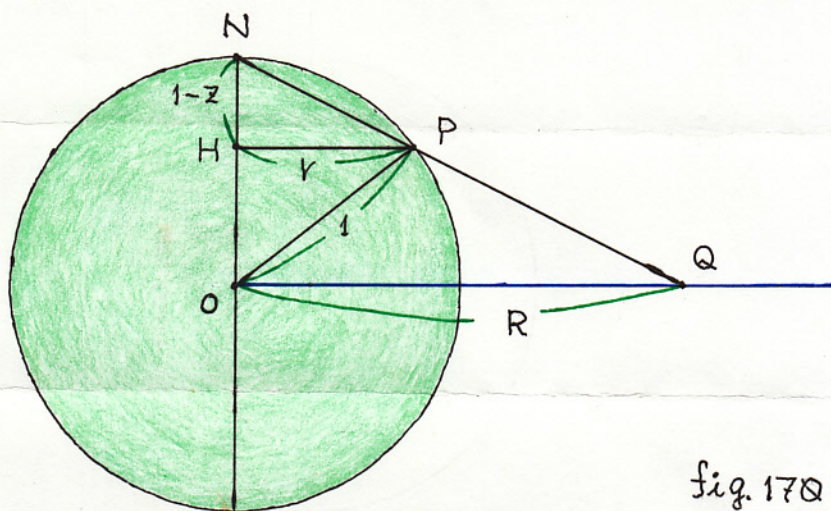
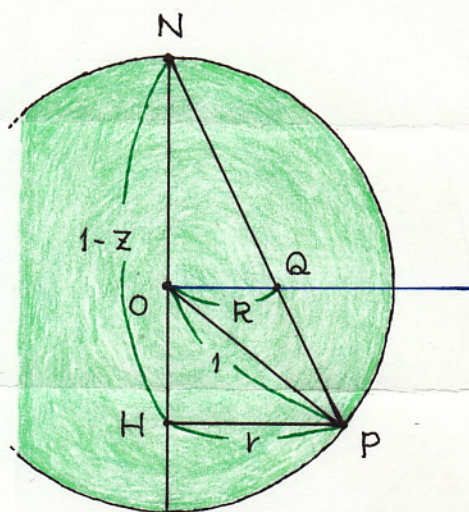


fig. 17B

直角3角形 $\triangle PHO$ に注目すれば、

$$r^2 + z^2 = 1$$

(W1)

2つの直角3角形、 $\triangle NOQ$ と $\triangle NHP$ は相似だから

$$\frac{r}{R} = \frac{1-z}{1}$$

(W2)

この2式より、下記が得られます。簡単な計算で導出できます。貴方も是非計算してみてください。

r, R, z の関係式

$$r = \frac{2R}{R^2 + 1}$$

$$z = \frac{R^2 - 1}{R^2 + 1} \quad .1)$$

$$r = \sqrt{1 - z^2}$$

$$R = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \quad .2)$$

$$R_{\pm} = \frac{1}{r} (1 \pm \sqrt{1 - r^2})$$

$$z_{\pm} = \pm \sqrt{1 - r^2} \quad .3)$$

定理(96)

【P333】 極射影 (続き)

.3) に注目して下さい。1つの r 値に2つつの R, z 値が対応しています。この幾何学的意味は自明です。(同一の r 値に対して2本の射影線が見えますね。

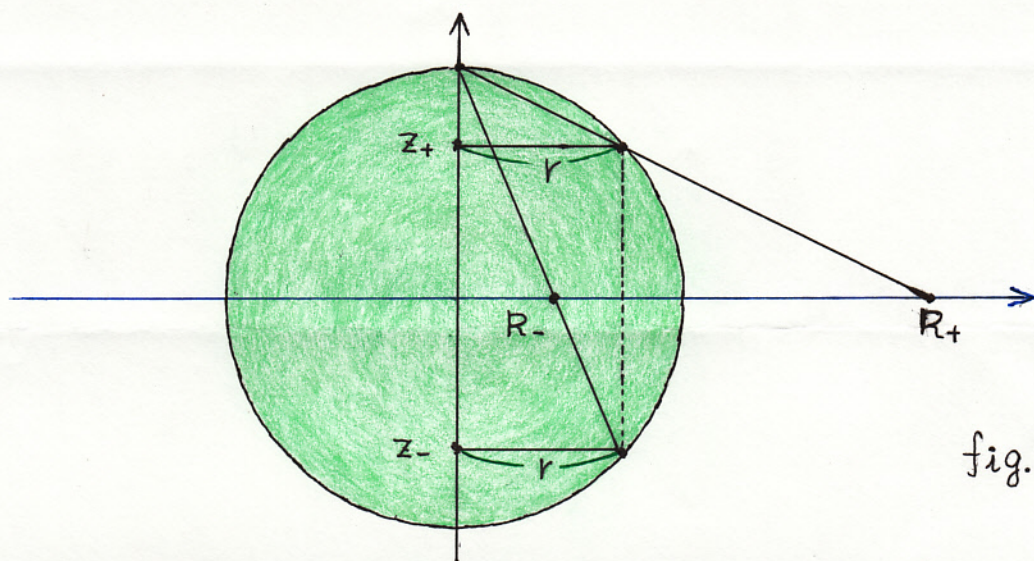


fig.171

$t(x, y, z)$ と ${}^t(X, Y, \theta)$ の関係を求めよう。fig.169 と 定義(95)より、次式が成り立ちます。

$$x = r \cos \theta \quad .1), \quad y = r \sin \theta \quad .2), \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad .3) \quad (W3)$$

$$X = R \cos \theta \quad .1), \quad Y = R \sin \theta \quad .2), \quad R^2 = X^2 + Y^2 \quad .3) \quad (W4)$$

(W3.1) と (W4.1) から (W5.1) が得られます。

(W3.2) と (W4.2) から (W5.2) が得られます。

$$X = \frac{R}{r} x \quad .1), \quad Y = \frac{R}{r} y \quad .2) \quad (W5)$$

従って、(W2)より、下記が成り立ちます。

$$X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z} \quad (W6)$$

ここで、 $Q = {}^t(X, Y, \theta)$ を $P = {}^t(x, y, z)$ で表現する式が得られました。次に、 x, y, z を X と Y で表わす式を求めましょう。

【P334】 4月30日(金) 極射影(続き)

(W5) を変形して,

$$x = \frac{r}{R} X, \quad y = \frac{r}{R} Y$$

これらに、(96.1) の左の式

$$r = \frac{2R}{R^2+1}$$

を代入し、(96.1) の右の式を再記して、

$$x = \frac{2X}{R^2+1}, \quad y = \frac{2Y}{R^2+1}, \quad z = \frac{R^2-1}{R^2+1}$$

これらに (W4.3) の R^2 を代入すれば

$$x = \frac{2X}{X^2+Y^2+1}, \quad y = \frac{2Y}{X^2+Y^2+1}, \quad z = \frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1} \quad (W7)$$

(W6), (W7) をまとめて再記しておきましょう。

$P = {}^t(x, y, z)$ と $Q = {}^t(X, Y, z)$ の関係式

fig.169 の極射影 $P \leftrightarrow Q$ は次式を満足します。

$$X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z} \quad .1)$$

$$x = \frac{2X}{X^2+Y^2+1}, \quad y = \frac{2Y}{X^2+Y^2+1}, \quad z = \frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1} \quad .2)$$

定理(97)

【P335】 極射影 (続き)

定理(97)の導出過程で $R/r \times r/R$ が出現しました。このことは、 $r \neq 0, R \neq 0$ を暗黙のうちに仮定していたということになります。しかし、得られた結果は、 $r=R=0$ の場合でも成り立ちます。 $r=R=0$ の場合とは、 P が南極 $S = {}^t(0, 0, -1)$ に一致する場合です。このとき Q は原点 $O = {}^t(0, 0, 0)$ に一致します。また、(96.2), (W6), (97.1) には、 $1/(1-z)$ が登場していますが、極射影の定義(96)では、 P が北極点 $N = {}^t(0, 0, 1)$ に一致する場合を除外しているのが問題はありません。

2次元平面上の円の自由度は3です。中心の位置を定める2つの実数と半径の長さの3つで一意的に1つの円が定まります。射影球面(単位球面)上の円の自由度も3です。射影球面上の円とそれを定めるパラメータを定義しましょう。

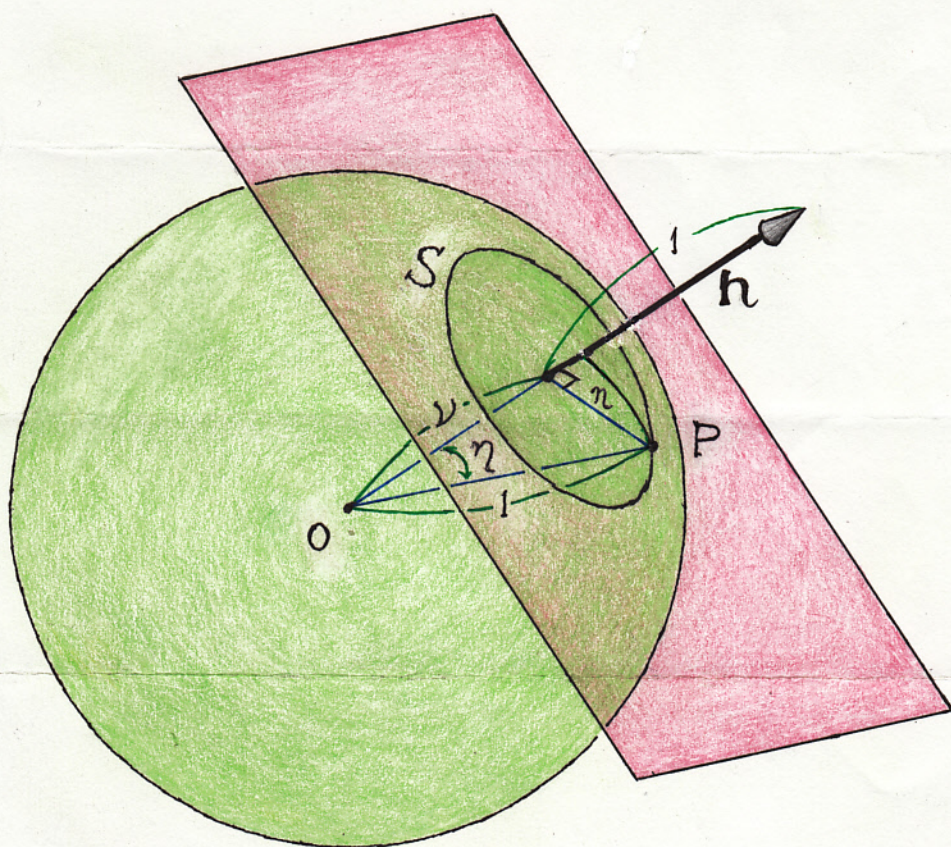


fig.172

単位ベクトル u と実数 $0 \leq \nu \leq 1$ で射影球面上の円(円周)が一意に定まります。きちんと(Accurately)定義しましょう。

射影球面上の円 S の定義

- 射影球面上の円 S が かってに与えられたとします。
- 円 S に対して、 S がその上に乗っているような、そのような平面が、一意的に定まります。逆に、射影球面と交わる平面が与えられれば、この平面と射影球面との交線としての円 S が一意的に定まります。この平面のことを、円 S を定める平面と呼びます。
- 射影球面の中心 O と、 S を定める平面との距離を ν とします。

$$0 \leq \nu \leq 1 \quad .1)$$

- 円 S を定める平面の法ベクトルを $\boldsymbol{n} = {}^t(n_x, n_y, n_z)$ とします。
 $\boldsymbol{n}$ は、円 S を定める平面と直交する単位ベクトルです。

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad .2)$$

- 実は、円 S を定める平面の法ベクトルは2つ存在します。 O から、円 S を定める平面へ降ろした垂線の足へ向う方向を $\boldsymbol{n}$ の方向とします。また、 ν が 0 のとき、つまり円 S を定める平面が O を通るときには、2つある方向のうち、どちらか一方を かってに選び、 $\boldsymbol{n}$ の方向とします。
- 円 S 上の かってな1点を $P = {}^t(x, y, z)$ とします。
点 P は円 S を定める平面上の点だから、ベクトル $\vec{OP}$ と $\boldsymbol{n}$ との内積は1定で、 $\cos \eta = \nu$ です。

$$n_x x + n_y y + n_z z = \nu \quad .3)$$

定義(98)

上記の定義で登場した、

$$\cos \eta = \nu \quad (W8)$$

の η は fig.172 の η です。射影球は単位球ですから、 η は円 S の半径とも呼ぶべき量ですね。そう呼ぶ場合もあるかも知れません。

【P337】5月2日(日) 極射影 (続き)

(98)で定義される、射影球面上の円 S は 1次元曲線です。その内点は S に含まれません。極射影と無関係な議論においては、 S の内点も定義し、単位球面上の円の面積を考察することも出来ますね。

今回は割愛します。

実は、定義(98)の .1), .2), .3) は 円 S を直接定義するものではありません。円 S を定める平面が定義されるだけです。この平面と射影球面との交線が円 S だと、(98)は云っています。つまり、等式 .2), .3) の他に、自明な等式の存在を暗黙の了解として仮定しているのです。その自明な等式とは、勿論、次式のことです。

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (W9)$$

(98.3) の x, y, z に (97.2) の x, y, z を代入すれば、円 S 上の任意の点 $P = {}^t(x, y, z)$ を射影平面に極射影した点 $Q = {}^t(X, Y, 0)$ の X, Y に関する等式が得られます。

その前に、(97.2) の x, y, z が (W9) を満たすことを確認しておきましょう。

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4X^2}{(X^2+Y^2+1)^2} + \frac{4Y^2}{(X^2+Y^2+1)^2} + \frac{(X^2+Y^2-1)^2}{(X^2+Y^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2)(X^2 + Y^2 + 1)^2 &= 4X^2 + 4Y^2 + (X^2 + Y^2 - 1)^2 \\ &= 4(X^2 + Y^2) + (X^2 + Y^2)^2 - 2(X^2 + Y^2) + 1 \\ &= (X^2 + Y^2)^2 + 2(X^2 + Y^2) + 1 \\ &= (X^2 + Y^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

確かに、(97.2) の x, y, z は (W9) を満たします。

(97.2) を (98.3) に代入しましょう。

$$n_x \frac{2X}{X^2+Y^2+1} + n_y \frac{2Y}{X^2+Y^2+1} + n_z \frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1} = \nu$$

$$2n_x X + 2n_y Y + n_z X^2 + n_z Y^2 - n_z = \nu X^2 + \nu Y^2 + \nu$$

$$(\nu - n_z)(X^2 + Y^2) - 2n_x X - 2n_y Y + \nu + n_z = 0 \quad (W10)$$

ここで、 $\nu = n_z$ の場合と $\nu \neq n_z$ の場合に分けて考える必要があり
ます。 $\nu = n_z$ の場合とは、幾何学的には、どんな状況 (Situation)
を指しているのでしょうか? (98.3) の左辺に北極点 N の座標値
 $t(0, 0, 1)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} (98.3) \text{ の左辺} &= n_x x + n_y y + n_z z \\ &= n_x 0 + n_y 0 + n_z 1 \\ &= n_z = \nu = (98.3) \text{ の右辺} \end{aligned}$$

北極点 $N = t(0, 0, 1)$ は (98.3) を満たします。従って円 S は
北極点 N を通る円です。ここで、 $\nu = n_z$ の幾何学的状況が解りました。
まず、 $\nu \neq n_z$ の場合を考えましょう。(W10) を変形します。

$$X^2 + Y^2 - \frac{2n_x}{\nu - n_z} X - \frac{2n_y}{\nu - n_z} Y = - \frac{\nu + n_z}{\nu - n_z}$$

$$\begin{aligned} X^2 - \frac{2n_x}{\nu - n_z} X + \left(\frac{n_x}{\nu - n_z}\right)^2 &+ Y^2 - \frac{2n_y}{\nu - n_z} Y + \left(\frac{n_y}{\nu - n_z}\right)^2 = \left(\frac{n_x}{\nu - n_z}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{\nu - n_z}\right)^2 - \frac{\nu + n_z}{\nu - n_z} \\ &= \frac{1}{(\nu - n_z)^2} (n_x^2 + n_y^2 - (\nu + n_z)(\nu - n_z)) \\ &= \frac{1}{(\nu - n_z)^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 - \nu^2) \end{aligned}$$

【P339】 極射影 (続き)

$$\left(X - \frac{n_x}{\nu - n_z}\right)^2 + \left(Y - \frac{n_y}{\nu - n_z}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1 - \nu^2}}{\nu - n_z}\right)^2 \quad (W11)$$

これは円ですね。その半径を B , 中心を $C = {}^t(C_x, C_y, 0)$ とおけば,

$$B^2 = \frac{1 - \nu^2}{(\nu - n_z)^2}, \quad C_x = \frac{n_x}{\nu - n_z}, \quad C_y = \frac{n_y}{\nu - n_z} \quad (W12)$$

次に、 $\nu = n_z$ の場合を考えましょう。この場合 (W10) は,

$$n_x X + n_y Y = \nu \quad (W13)$$

これは直線です。しかも、これを満たす ${}^t(X, Y, 0)$ は (98.3) も満たしています。従って、この直線は、円 S を定める平面と射影平面との交線です。(W10), (W11), (W12), (W13) をまとめて再記しておきましょう。

射影球面上の円の射影平面への極射影

単位法ベクトル $\boldsymbol{n} = {}^t(n_x, n_y, n_z)$ と $0 \leq \nu \leq 1$ によって (98) で定義される射影球面上の円 S が射影平面上の曲線 $\tilde{S}$ に極射影されるとします。 $Q = {}^t(X, Y, 0) \in \tilde{S}$ は次式を満たします。

$$(\nu - n_z)(X^2 + Y^2) - 2n_x X - 2n_y Y + \nu + n_z = 0 \quad .1)$$

- $\nu \neq n_z$ のとき (円 S が北極点 N を通らないとき) : $\tilde{S}$ も円です。

$$(X - C_x)^2 + (Y - C_y)^2 = B^2 \quad .2)$$

$$B^2 = \frac{1 - \nu^2}{(\nu - n_z)^2}, \quad C_x = \frac{n_x}{\nu - n_z}, \quad C_y = \frac{n_y}{\nu - n_z} \quad .3)$$

- $\nu = n_z$ のとき (円 S が北極点 N を通るとき) : $\tilde{S}$ は直線で

$$n_x X + n_y Y = \nu = n_z \quad .4)$$

しかも、円 S を定める平面と射影平面との交線です。

定理 (99)

【P340】 5月4日(火) 極射影(続き)

それでは、定理(99)の逆は成り立つだろうか？ 射影平面上の任意の円、任意の直線は、極射影によって、射影球面上の円に射影されるのだろうか？ これが云えることを具体的な計算を実行することで証明しよう。

まず、円の場合について考察します。射影平面上の任意の円 $\tilde{S}$ の中心を $C = {}^t(C_x, C_y, 0)$ 、半径を B とします。

$$(X - C_x)^2 + (Y - C_y)^2 = B^2 \quad (W14)$$

極射影は、北極点を除く射影球面と射影平面間の全単写ですから、

$$\frac{1 - \nu^2}{(\nu - n_z)^2} = B^2 \quad .1)$$

$$\frac{n_x}{\nu - n_z} = C_x \quad .2)$$

$$\frac{n_y}{\nu - n_z} = C_y \quad .3)$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad .4)$$

$$0 \leq \nu \leq 1 \quad .5)$$

$$\nu \neq n_z \quad .6)$$

(W15)

を満たす $n = {}^t(n_x, n_y, n_z)$ 、 ν を求めることができ(が存在し)、その n を法ベクトルとし、 ν を原点 O からの距離値とする平面

$$n_x x + n_y y + n_z z = \nu \quad (W16)$$

と射影球面との交線である円を S とするとき、射影球面から射影平面への極射影で S が $\tilde{S}$ に射影されることを示せば、 $\tilde{S}$ が S に射影されることを証明したことになります。

【P341】 極射影 (続き)

上記の筋書 (Scenario, Scheme) に従って, (W15) を満たす n_x, n_y, n_z, ν を B, C_x, C_y で表わすことを試み (Try) ましょう。

D, μ を次式で定義しよう。

$$D^2 = C_x^2 + C_y^2, \quad \mu = D^2 - B^2 + 1 \quad (W17)$$

(15.1), .2), .6), .4) より

$$D^2 = \frac{n_x^2}{(\nu - n_z)^2} + \frac{n_y^2}{(\nu - n_z)^2} = \frac{1 - n_z^2}{(\nu - n_z)^2} \quad (W18)$$

(W15.1), (W18) より

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1 - n_z^2}{(\nu - n_z)^2} - \frac{1 - \nu^2}{(\nu - n_z)^2} + 1 \\ &= \frac{1}{(\nu - n_z)^2} (1 - n_z^2 - 1 + \nu^2 + \nu^2 - 2\nu n_z + n_z^2) \\ &= \frac{1}{(\nu - n_z)^2} (-2\nu^2 - 2\nu n_z) \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{2\nu}{\nu - n_z} \quad (W19)$$

$\mu = 0$ となる場合と そうでない場合 とに分けて考えましょう。

まず $\mu = 0$ となる場合を考察します。 $\mu = 0$, (W17), (W19) より

$$B^2 = D^2 + 1 \geq 1 \quad .1)$$

$$\nu = 0 \quad .2)$$

$$(W20)$$

$\nu = 0$ を (W15.1), .2), .3) に代入すると

$$\frac{1}{n_z^2} = B^2, \quad -\frac{n_x}{n_z} = C_x, \quad -\frac{n_y}{n_z} = C_y$$

【P342】 極射影 (続き)

よって

$$n_x = \pm \frac{C_x}{B}, \quad n_y = \pm \frac{C_y}{B}, \quad n_z = \mp \frac{1}{B} \quad (\text{符号同順}) \quad (W21)$$

この n が単位ベクトルであることを確認します。 (W20.1), (W21) より,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \frac{C_x^2}{B^2} + \frac{C_y^2}{B^2} + \frac{1}{B^2} = \frac{D^2+1}{B^2} = 1$$

次に、 $\mu \neq 0$ の場合を考察します。 (W19) より

$$\nu - n_z = \frac{2\nu}{\mu} \quad (W22)$$

(W22), (W15.1) より

$$B^2 = \frac{1-\nu^2}{(\nu-n_z)^2} = \frac{\mu^2}{4\nu^2} (1-\nu^2) \quad (W23)$$

$$4B^2\nu^2 = \mu^2(1-\nu^2) = \mu^2 - \mu^2\nu^2$$

$$(4B^2 + \mu^2)\nu^2 = \mu^2$$

$$\nu^2 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 4B^2} \quad (W24)$$

これより、 $0 < \nu \leq 1$ なる ν が一意的に定まります。

(W22), (W15.2), (W15.3) より

$$n_x = (\nu - n_z) C_x = \frac{2\nu}{\mu} C_x$$

$$n_y = (\nu - n_z) C_y = \frac{2\nu}{\mu} C_y$$

$$n_z = \nu - \frac{2\nu}{\mu} = \frac{\mu-2}{\mu} \nu$$

$$n_x = \frac{2\nu}{\mu} C_x, \quad n_y = \frac{2\nu}{\mu} C_y, \quad n_z = \frac{\mu-2}{\mu} \nu \quad (W25)$$

【 P343】 極射影 (続き)

(W25) の μ が 単位ベクトルであることを確認しよう。

(W17), (W23) より

$$\begin{aligned} n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= \frac{4\nu^2}{\mu^2} C_x^2 + \frac{4\nu^2}{\mu^2} C_y^2 + \frac{\nu^2}{\mu^2} (\mu-2)^2 \\ &= \frac{\nu^2}{\mu^2} (4D^2 + (\mu-2)^2) \\ &= \frac{\nu^2}{\mu^2} (4(\mu+B^2-1) + \mu^2 - 4\mu + 4) \\ &= \frac{\nu^2}{\mu^2} (4B^2 + \mu^2) \\ &= \frac{\nu^2}{\mu^2} \left(\frac{\mu^2}{\nu^2} (1-\nu^2) + \mu^2 \right) = 1 \end{aligned}$$

$\mu=0$, $\mu \neq 0$ のいずれの場合も、任意に与えられた、射影平面上の円 $\tilde{S}$ の半径 B , 中心 $C = {}^t(C_x, C_y, 0)$ に対して、(W15) の 6 個式全てを満たす、 $\nu, \mu = (n_x, n_y, n_z)$ が存在することが、それらの具体的な表式を求めることにより、示されました。P340 で述べた Scheme の前半が達成された (be Executed) ことに成ります。後半を実行しましょう。前半で求めた ν, μ によって (W16) で表わされる平面と射影球面との交線である円を S とします。円 S を射影平面に極射影します。 $\mu=0$ と $\mu \neq 0$ とに場合分けして考える必要があります。

まず、 $\mu=0$ となる場合を考察します。(W16) に、 $\nu=0$ 及び (W21) の μ を代入し、更に (97.2) の x, y, z を代入します。

$$\pm \frac{C_x}{B} \frac{2X}{X^2+Y^2+1} \pm \frac{C_y}{B} \frac{2Y}{X^2+Y^2+1} \mp \frac{1}{B} \frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1} = 0$$

(符号同順)

従って、

$$2C_x X + 2C_y Y - (X^2 + Y^2 - 1) = 0$$

$$X^2 + Y^2 - 2C_x X - 2C_y Y = 1$$

$$X^2 - 2C_x X + C_x^2 + Y^2 - 2C_y Y + C_y^2 = C_x^2 + C_y^2 + 1 \\ = D^2 + 1$$

$$(X - C_x)^2 + (Y - C_y)^2 = B^2$$

ここで (W20.1) を用いました。上式は (W14) です。

次に、 $\mu \neq 0$ となる場合を考察します。 (W24) より、 $\nu \neq 0$ です。

(W16) に (W25) を代入し、更に (97.2) の x, y, z を代入します。

$$\frac{2\nu}{\mu} C_x \frac{2X}{X^2 + Y^2 + 1} + \frac{2\nu}{\mu} C_y \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + 1} + \frac{\mu - 2}{\mu} \nu \frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + Y^2 + 1} = \nu$$

$$4C_x X + 4C_y Y + (\mu - 2)(X^2 + Y^2 - 1) = \mu(X^2 + Y^2 + 1)$$

$$4C_x X + 4C_y Y - 2X^2 - 2Y^2 - (\mu - 2) = \mu$$

$$X^2 - 2C_x X + Y^2 - 2C_y Y = 1 - \mu$$

$$X^2 - 2C_x X + C_x^2 + Y^2 - 2C_y Y + C_y^2 = C_x^2 + C_y^2 + 1 - \mu \\ = D^2 + 1 - \mu$$

$$(X - C_x)^2 + (Y - C_y)^2 = B^2$$

ここで (W17) を用いました。上式も (W14) です。

以上で P340 で述べた Scheme が 完遂され (be Completed) ました。従って、射影平面上の任意の円 $\tilde{S}$ が極射影によって、射影球面上の円 S に射影されることが証明されたことに成ります。

射影平面上の任意の直線が極射影によって、射影球面上の円に射影されることを証明しましょう。P340 で述べた、円の場合と同様の Scheme を用います。極射影が、北極点 N を除く射影球面と射影平面間の全単写であることが本質的です。

射影平面上の任意の直線を $\tilde{S}$ とします。 $\tilde{S}$ 上の任意の点を $Q = {}^t(X, Y, 0)$ とします。 X, Y は次式で表現されます。

【P345】 極射影 (続き)

X, Y に依存しない実数 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ に対し

$$\alpha_x X + \alpha_y Y = \alpha_z \quad .1)$$

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 > 0 \quad .2)$$

$$\alpha_z \geq 0 \quad .3)$$

(W26)

ここで .2) は、 α_x, α_y が実数だから、

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 > 0 \iff \alpha_x \neq 0 \text{ or } \alpha_y \neq 0$$

また、.3) は直線 α 式 .1) に制限を付加するものではありません。

もし、 $\alpha_z < 0$ なら、.1) の両辺に -1 を掛けて、 $-\alpha_x, -\alpha_y, -\alpha_z$ をそれぞれ、 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ と改名すれば良いのです。つまり、.1) には定数倍の自由度が有るということであり、 $\alpha_z \geq 0$ となる α_z を選んだということです。

定理 (99) の .4) に留意しましょう。(W26) の $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ に対し

て、

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad .1)$$

$$0 \leq \nu < 1 \quad .2)$$

$$\nu = n_z \quad .3)$$

(W27)

を満たす n, ν を探しましょう。自明ですね。 α を次式で定義します。

$$\alpha = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2} \quad (W28)$$

(W26.2) より、

$$\alpha > 0 \quad (W29)$$

この α と $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ を用いて、 $n = {}^t(n_x, n_y, n_z)$, ν を次式で定義します。

【P346】 極射影 (続き)

$$n_x = \frac{\alpha_x}{\alpha}, \quad n_y = \frac{\alpha_y}{\alpha}, \quad n_z = \frac{\alpha_z}{\alpha}, \quad \nu = \frac{\alpha_z}{\alpha} \quad (W30)$$

この n, ν は (W27) を満たします。この n を法ベクトルとし、原点 O からの距離が ν となる平面は次式で表わされます。

$$n_x x + n_y y + n_z z = \nu \quad (W31)$$

この平面は北極点 $N = {}^t(0, 0, 1)$ を通ります。この平面で定まる、射影球面上の円を S とします。 S は北極点 N を通る円です。

Scheme に則り、(W31) に (W30) の n を代入し、更に (97.2) の x, y, z を代入しましょう。

$$\frac{\alpha_x}{\alpha} \frac{2X}{X^2+Y^2+1} + \frac{\alpha_y}{\alpha} \frac{2Y}{X^2+Y^2+1} + \frac{\alpha_z}{\alpha} \frac{X^2+Y^2-1}{X^2+Y^2+1} = \frac{\alpha_z}{\alpha}$$

$$2\alpha_x X + 2\alpha_y Y + \alpha_z (X^2+Y^2-1) = \alpha_z (X^2+Y^2+1)$$

$$\alpha_x X + \alpha_y Y = \alpha_z$$

上式は (W26.1) です。従って、射影平面上の任意の直線は、極射影によって、射影球面上の北極点 N を通る円に射影されます。但し、 N は除きます。

射影平面から射影球面への、円や直線の極射影に関して得られた内容を定理としてまとめておきましょう。

(次ページへ続く)

円, 直線の射影球面への極射影

● 射影平面上の任意の円

$$(X^2 - C_x)^2 + (Y - C_y)^2 = B^2 \quad .1)$$

は、次式の平面

$$n_x x + n_y y + n_z z = \nu \quad .2)$$

で定まる、射影球面上の円に極射影されます。但し、 ν, n は、

$$D^2 = C_x^2 + C_y^2, \quad \mu = D^2 - B^2 + 1 \quad .3)$$

とおくとき、

● $\mu = 0$ のとき

$$\nu = 0, \quad n_x = \pm \frac{C_x}{B}, \quad n_y = \pm \frac{C_y}{B}, \quad n_z = \mp \frac{1}{B} \quad (\text{符号同順}) \quad .4)$$

● $\mu \neq 0$ のとき

$$\nu^2 = \frac{\mu^2}{\mu^2 + 4B^2}, \quad n_x = \frac{2\nu}{\mu} C_x, \quad n_y = \frac{2\nu}{\mu} C_y, \quad n_z = \frac{\mu - 2}{\mu} \nu \quad .5)$$

● 射影平面上の任意の直線

$$\alpha_x X + \alpha_y Y = \alpha_z, \quad \alpha_x^2 + \alpha_y^2 > 0, \quad \alpha_z \geq 0 \quad .6)$$

は、次式の平面

$$n_x x + n_y y + n_z z = n_z \quad .7)$$

で定まる、射影球面上の円に極射影されます。但し n は、

$$\alpha = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2} \quad .8)$$

とおくとき、

$$n_x = \frac{\alpha_x}{\alpha}, \quad n_y = \frac{\alpha_y}{\alpha}, \quad n_z = \frac{\alpha_z}{\alpha} \quad .9)$$

定理(99)と定理(100)で、極射影について僕が語りかけた2つの性質の1つ、保円性が示されました。つまり、極射影は、射影球面上の任意の円を射影平面上の円に、また、射影平面上の任意の円を射影球面上の円に射影します。但し、ここで注意して欲しいのは、射影平面上の直線を半径が無限大の円だと見做す(Look Upon as)ことにすればということです。またこの直線には無限遠点は含まれません。また、この直線に対応する射影球面上の円は北極点Nを通りますが、N自身を除外する必要があります。当主題の冒頭で述べた広義の極射影の場合は、この注釈(Note, Comment)は不要ですね。でも、1/0や、0/0を回避する(Avoid)必要が生じます。

もう1つの性質、等角性について議論するためには、射影球面上の大円たちの間の関係を考察する必要があります。(99),(100)が大円について主張していることをまとめて再記しましょう。大円とは、 $\nu = 0$, $\mu = 0$ の場合を指します。(これは、大円の自明な定義です。)

● 射影球面上の大円の射影平面への極射影

単位法ベクトル $n = {}^t(n_x, n_y, n_z)$ で定義される平面

$$n_x x + n_y y + n_z z = 0 \quad .1)$$

によって定まる射影球面上の大円 S が射影平面上の曲線 $\tilde{S}$ に極射影されるとします。

- $n_z \neq 0$ のとき (大円 S が北極点 N を通らないとき): $\tilde{S}$ も円です。

$$\left(X + \frac{n_x}{n_z}\right)^2 + \left(Y + \frac{n_y}{n_z}\right)^2 = \frac{1}{n_z^2} \quad .2)$$

- $n_z = 0$ のとき (大円 S が北極点 N を通るとき): $\tilde{S}$ は直線で

$$n_x X + n_y Y = 0 \quad .3)$$

しかも、大円 S を定める平面と射影平面との交線で、原点 O を通ります。

● 射影球面上の大円に射影される、射影平面上の円と直線

- 射影平面上の次式で表現される円 $\tilde{S}$ は、

$$(X - C_x)^2 + (Y - C_y)^2 = C_x^2 + C_y^2 + 1 \quad .4)$$

次式で表現される単位ベクトル $\mathbf{n} = {}^t(n_x, n_y, n_z)$ を法ベクトルとする、射影球面上の大円 S に射影されます。

$$B = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + 1} \quad .5)$$

$$n_x = \pm \frac{C_x}{B}, \quad n_y = \pm \frac{C_y}{B}, \quad n_z = \mp \frac{1}{B} \quad (\text{符号同順}) \quad .6)$$

.4) 以外の円は、大円には射影されません。

- 射影平面上の次式で表現される直線 $\tilde{S}$ は、

$$\alpha_x X + \alpha_y Y = 0, \quad \alpha_x^2 + \alpha_y^2 > 0 \quad .7)$$

次式で表現される単位ベクトル $\mathbf{n} = {}^t(n_x, n_y, n_z)$ を法ベクトルとする、射影球面上の大円 S に射影されます。

$$\alpha = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2} \quad .8)$$

$$n_x = \frac{\alpha_x}{\alpha}, \quad n_y = \frac{\alpha_y}{\alpha}, \quad n_z = 0 \quad .9)$$

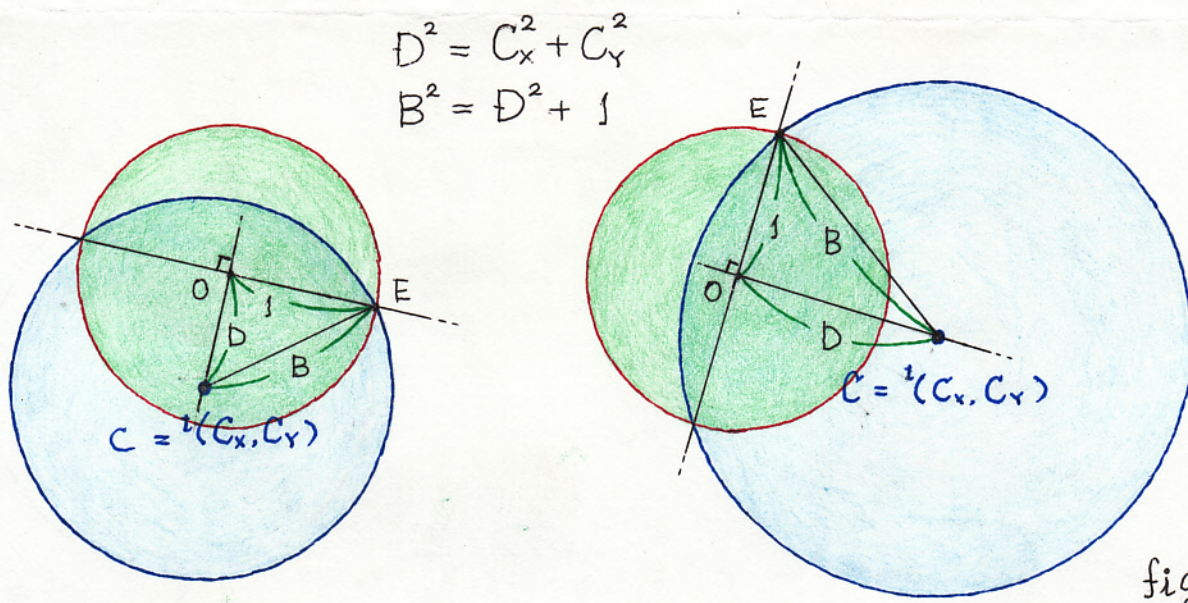
この大円は、北極点と南極点の両方を通ります。つまり、射影平面と直交する大円です。

.7) 以外の直線は、大円には射影されません。

定理(101)

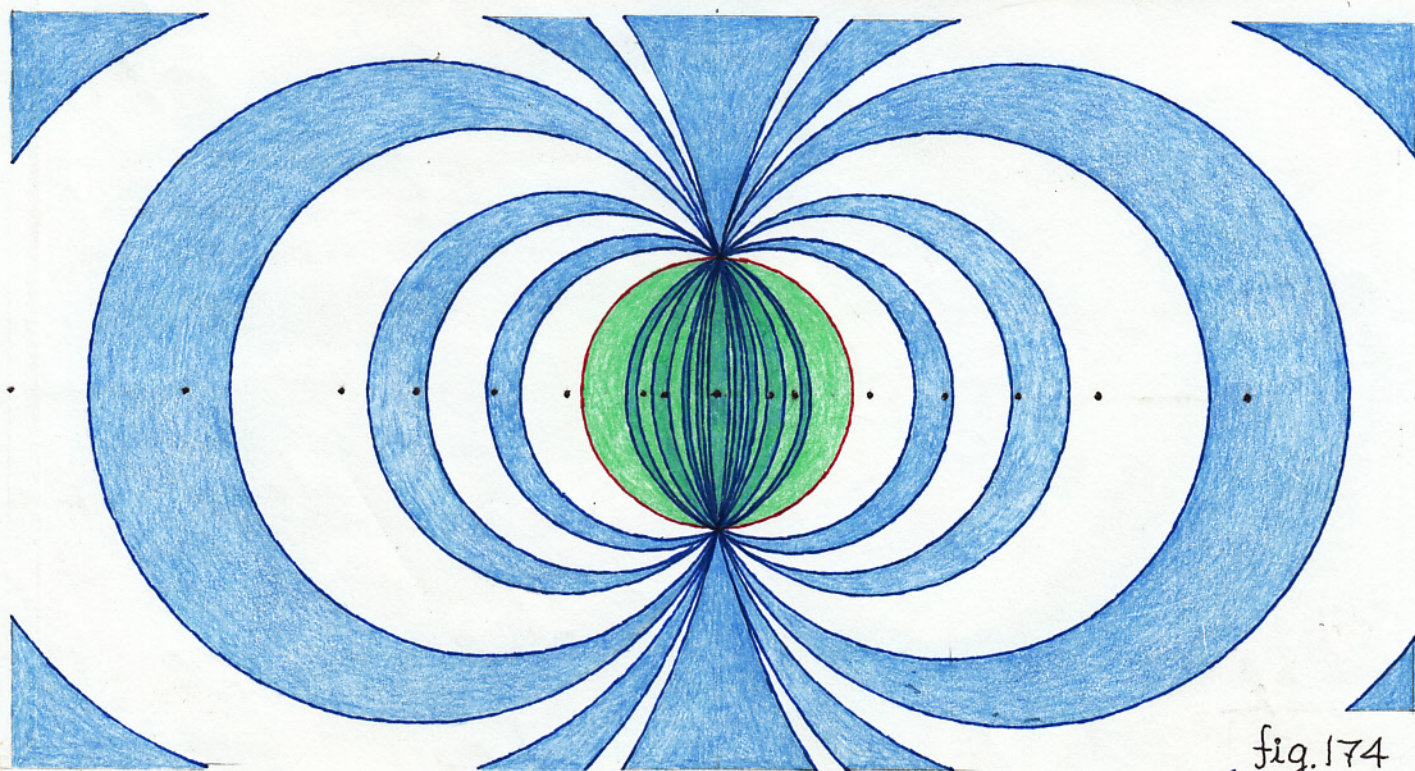
“ $\mathbf{n}$ を法ベクトルとする大円” とは、 $\mathbf{n}$ を法ベクトルとし、原点 O を通る平面で定まる大円を意味します。

大円に射影される、射影平面上の円の作図法を示しましょう。
まず、その中心点 ${}^t(C_x, C_y)$ が与えられた場合の描き方を示します。

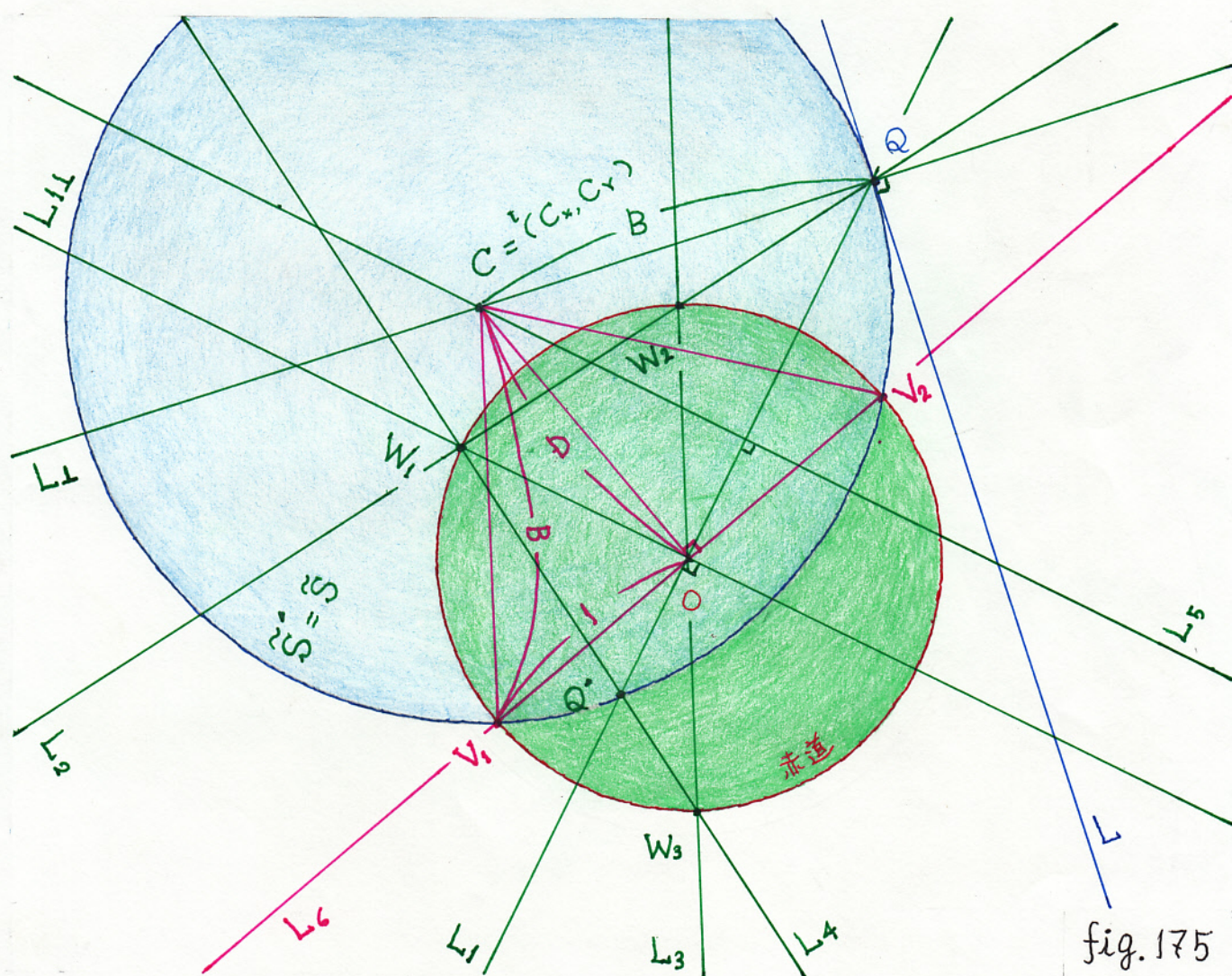


- 原点 O と、与えられた点 $C = {}^t(C_x, C_y)$ を通る直線を引きます。
- 原点 O を通り、この直線と直交する直線を引きます。
- 上記の直線と赤道との交点の1つを E とします。
- 線分 CE の長さが描くべき円の半径です。

同一直線上に、その中心が乗っている、上記の円たちを幾つか同時に描きます。



次に、射影球面上の大円 S が、極射影によって射影平面上の円 $\tilde{S}$ に射影されるとするとき、円 $\tilde{S}$ 上のかっとなる点 Q と、 Q を通る接線 L だけが与えられるとします。但し、勿論、原点 O と、 O を中心とする単位円、つまり赤道も与えられるとします。円 $\tilde{S}$ の描き方を示します。ちょっと複雑です (a Bit Complicated)。確認はしますが、証明は省略します。貴方も試してみてください。苦勞して、やっと見つけた作図法です。



- 点 Q を通り、直線 L と直交する直線を引きます。この直線を $L_{\perp}$ とします。
- 接点 Q と原点 O を通る直線を引きます。この直線を L_1 とします。
- 原点 O を通り、直線 L_1 と直交する直線を引きます。この直線を $L_{\perp 1}$ とします。
- 直線 $L_{\perp 1}$ は赤道と2点で交わります。その中で、直線 L からより離れている

【P352】 極射影 (続き)

交点を選び W_1 とします。

- 点 W_1 と接点 Q を通る直線を引きます。この直線を L_2 とします。
- 直線 L_2 は赤道と2点で交わります。1点は W_1 です。もう1点を W_2 とします。
- 点 W_2 と原点 O を通る直線を引きます。この直線を L_3 とします。
- 直線 L_3 は赤道と2点で交わります。1点は W_2 です。もう1点を W_3 とします。
- 点 W_1 と点 W_3 を通る直線を引きます。この直線を L_4 とします。
- 直線 L_1 と直線 L_4 との交点を Q' とします。
- 線分 QQ' の垂直二等分線を引きます。この直線を L_5 とします。
- 直線 L_1 と直線 L_5 との交点を $C = {}^t(C_x, C_y)$ とします。
- 中心点を点 C とし、半径を $\overline{CQ} = B$ とする円を描きます。この円を $\tilde{S}'$ とします。
- 円 $\tilde{S}'$ が、描きたかった円 $\tilde{S}$ そのものです。

確認しましょう。

- 円 $\tilde{S}'$ と赤道は2点で交わります。一方の交点を V_1 とし、他方の交点を V_2 とします。
- 点 V_1 と点 V_2 を通る直線を引きます。この直線を L_6 とします。
- 直線 L_6 は原点 O を通ります (fig.175を見よ)。これは偶然では有りません。貴方も試してみてください。従って $\tilde{S}' = \tilde{S}$ です。
- 何故ならば、 $\triangle CV_1O$ は直角三角形で、次式が成り立つからです。

$$D^2 = C_x^2 + C_y^2,$$

$$B^2 = D^2 + 1$$

つまり、円 $\tilde{S}'$ は、次式で表わされます。

$$(X - C_x)^2 + (Y - C_y)^2 = C_x^2 + C_y^2 + 1$$

これは、(10.1.4)と一致します。また、円 $\tilde{S}'$ が直線 L_1 に接することは自明です。

【P353】 5月13日(木) 極射影(続き)

接点 Q が共通で、接線 L が異なる 幾つかの $\tilde{S}$ を同時に描きましょう。作図法から明らかな様に、 Q' も共通であることに留意すれば、作図が圧倒的に楽に(Easy)に成ります。

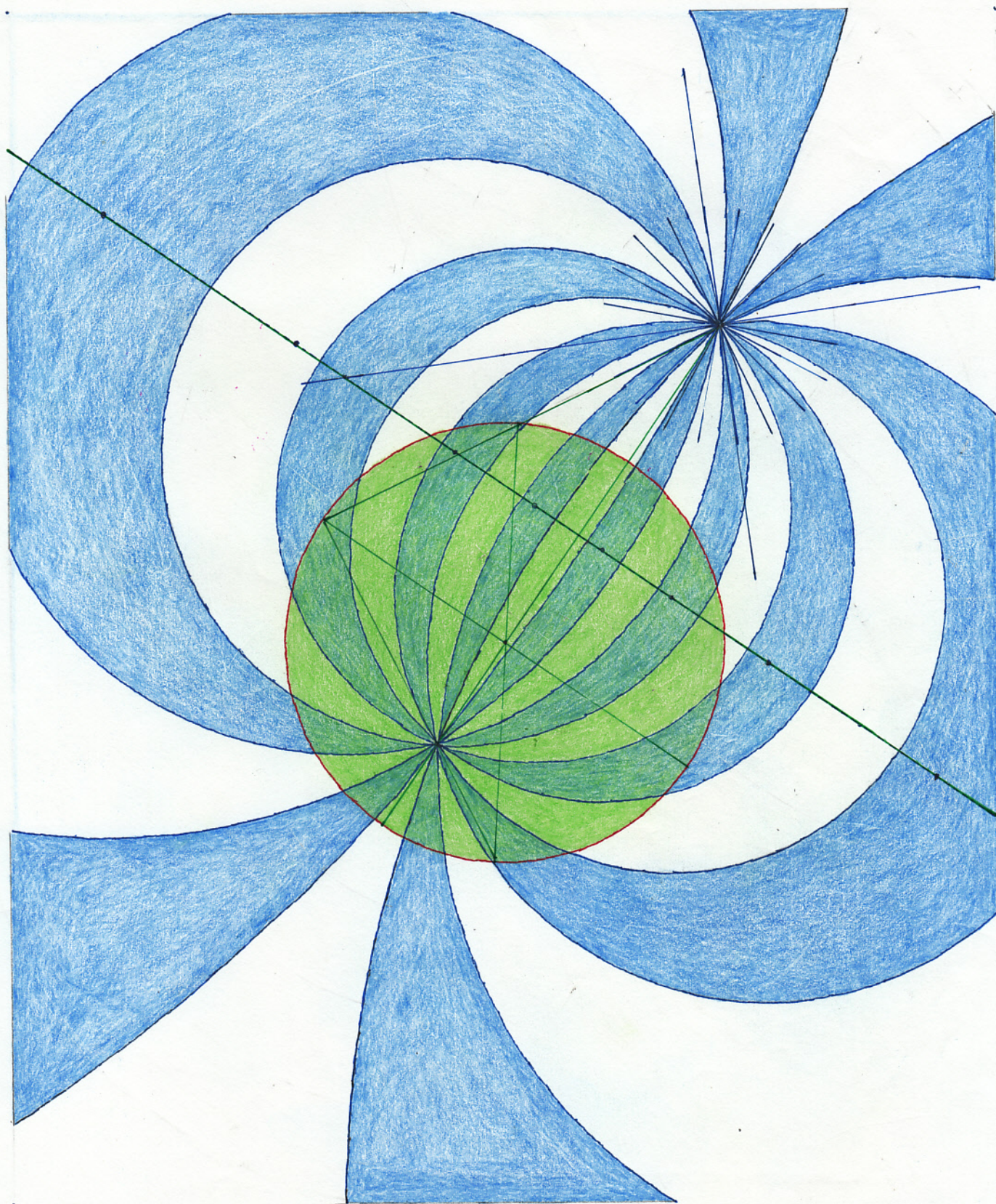


fig.176

(101.6)に見られるように、射影球面上の同一の大円 S を定める法ベクトルが2つ存在するのは、大円に関する極射影の性質を考察するのに、何かと厄介で(Bother)す。特に、2つの大円の成す角を考える場合はそうです。

そこで、大円 S に対して向きを付与することになります。無向曲線としては同一の大円であっても、有向曲線として異なれば、異なる大円として取り扱うことにします。

有向曲線としての大円とそれを定める法ベクトルの定義

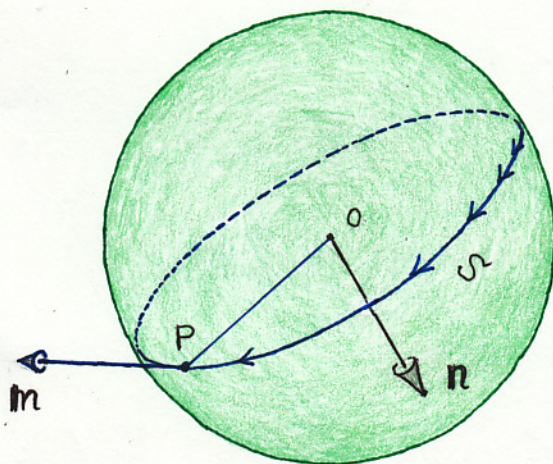
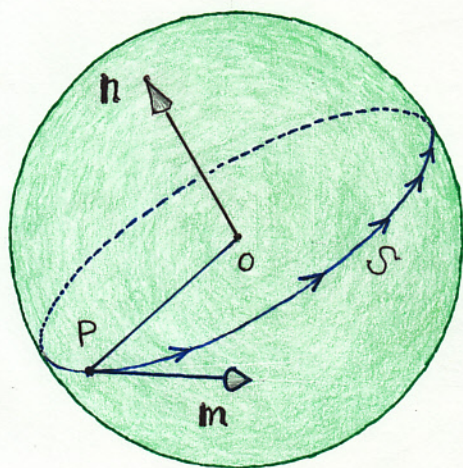


fig.177

- 射影球面上の有向大円 S に対して、右螺旋を S の向きの回りに締める(Tighten)とき、その右螺旋が進む方向を向きとする単位ベクトル $n = {}^t(n_x, n_y, n_z)$ を、有向大円 S を定める法ベクトルと呼びます。
- n は単位ベクトルですから、点 ${}^t(n_x, n_y, n_z)$ は射影球面上の点です。この点と法ベクトル n を同一視して同じ識別子 n で指し示すことにします。混乱(Confusion)は無いでしょう。
- 有向大円 S は射影球面を2等分します。

【P355】 極射影 (続き)

- 射影球面の外側に立って、有向大円 S に沿って (Along)、 S の方向に進むとすれば、点 n は左側の半球上の点です。
- 逆に、射影球面の内側に立って、有向大円 S に沿って、 S の方向に進むとすれば、点 n は右側の半球上の点です。
- S 上のかったな 1 点を $P = {}^t(x, y, z)$ とし、点 P における S の接線上の、 S と同じ向きを持つ単位ベクトル $m = {}^t(m_x, m_y, m_z)$ を、有向大円 S の接点 P における接ベクトルと呼びます。
- $n = {}^t(n_x, n_y, n_z)$, $P = {}^t(x, y, z)$, $m = (m_x, m_y, m_z)$ 達の座標値は、射影球面の中心 O を原点とし、射影平面を XY 平面とする、同一の、右手系の正規直交座標系で測ら (Measure) れるものとします。
- また、2つのベクトルの外積 (Cross Product) " $\times$ " も、上記の座標系で測った座標値を用いて、定義 (49.3) で与えられるものとします。
- $n, \vec{OP}, m$ は全て単位ベクトルです。

$$n \cdot n = \vec{OP} \cdot \vec{OP} = m \cdot m = 1 \quad .1)$$

- $n, \vec{OP}, m$ は全て互いに直交します。

$$n \cdot \vec{OP} = \vec{OP} \cdot m = m \cdot n = 0 \quad .2)$$

- $n, \vec{OP}, m$ は下記の外積で結ばれています。

$$n = \vec{OP} \times m \quad .3)$$

$$\vec{OP} = m \times n \quad .4)$$

$$m = n \times \vec{OP} \quad .5)$$

【P356】極射影 (続き)

定義 (102) は冗長過ぎますね。有向大円 S , それを定める法ベクトル m , S の P における接ベクトル m は, fig. 177 だけで一目瞭然で (Obvious) です。余計なお世話でした。 (102) は

(102) は定義 + α です。 .3), .4), .5) は同値な命題です。それを証明しましょう。 .1), .2) と、ベクトル 3 重積の恒等式 (52.11) を用います。

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

再記 (52.11)

$$\begin{aligned} .3) \rightarrow .4) \quad m \times n &= m \times (\vec{o}_P \times m) \\ &= (m \cdot m) \vec{o}_P - (m \cdot \vec{o}_P) m = \vec{o}_P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} .4) \rightarrow .5) \quad n \times \vec{o}_P &= n \times (m \times n) \\ &= (n \cdot n) m - (n \cdot m) n = m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} .5) \rightarrow .3) \quad \vec{o}_P \times m &= \vec{o}_P \times (n \times \vec{o}_P) \\ &= (\vec{o}_P \cdot \vec{o}_P) n - (\vec{o}_P \cdot n) \vec{o}_P = n \quad // \end{aligned}$$

今、僕が議論しようとしているのは、極射影が持つ才 2 の性質 “等角性” についてです。以下の議論においては、

$$n_z \neq 0, \quad n_z \neq \pm 1 \quad (W32)$$

を前提 (Premise) とすることにします。上記を仮定しても極射影の等角性に関しては一般性を失うことは無いでしょう。というのは、(W32) の n の代わりに、無限小量 ε に対して、

$$n_z = \varepsilon, \quad n_z = \pm 1 \mp |\varepsilon|, \quad 0 < |\varepsilon| \ll 1 \quad (W33)$$

なる n を考察の対象にすれば十分だからです。(W32)を仮定する
意図(Intention, Purpose)は、さもないと、場合分けが必要になり、ほ
とんど同じ議論を複数回 行うことになるからです。そのような無駄(Waste)を避け(Avoid)たいと思うのは当然の事です。

定理(97.1), 定理(101.2)より、次が云えます。

n と S の極射影

S, n の射影平面への極射影をそれぞれ $\tilde{S}, \tilde{n}$ とします。

$\tilde{n} = {}^t(\tilde{n}_x, \tilde{n}_y, 0)$ とおけば

$$\tilde{n}_x = \frac{n_x}{1-n_z}, \quad \tilde{n}_y = \frac{n_y}{1-n_z} \quad .1)$$

$\tilde{S}$ は次式で表わされる有向円です。

その中心を $C = {}^t(C_x, C_y, 0)$ 、半径を B とおけば

$$(X-C_x)^2 + (Y-C_y)^2 = B^2$$

$$C_x = -\frac{n_x}{n_z}, \quad C_y = -\frac{n_y}{n_z}, \quad B^2 = \frac{1}{n_z^2} \quad .2)$$

定理(103)

.1) に $\frac{1}{1-n_z}$ が、.2) に $\frac{1}{n_z}$ が出現しますね。ここで、 $n_z = 0, 1$ を

避けた理由を解ってくださるね。 $n_z = -1$ も排除した訳は、この場
合($n_z = 1$ の場合もそうですが)、 $\tilde{S}$ が赤道と重なってしまい、証明に用いら
れる図が分かりづらくなると思ったからです。

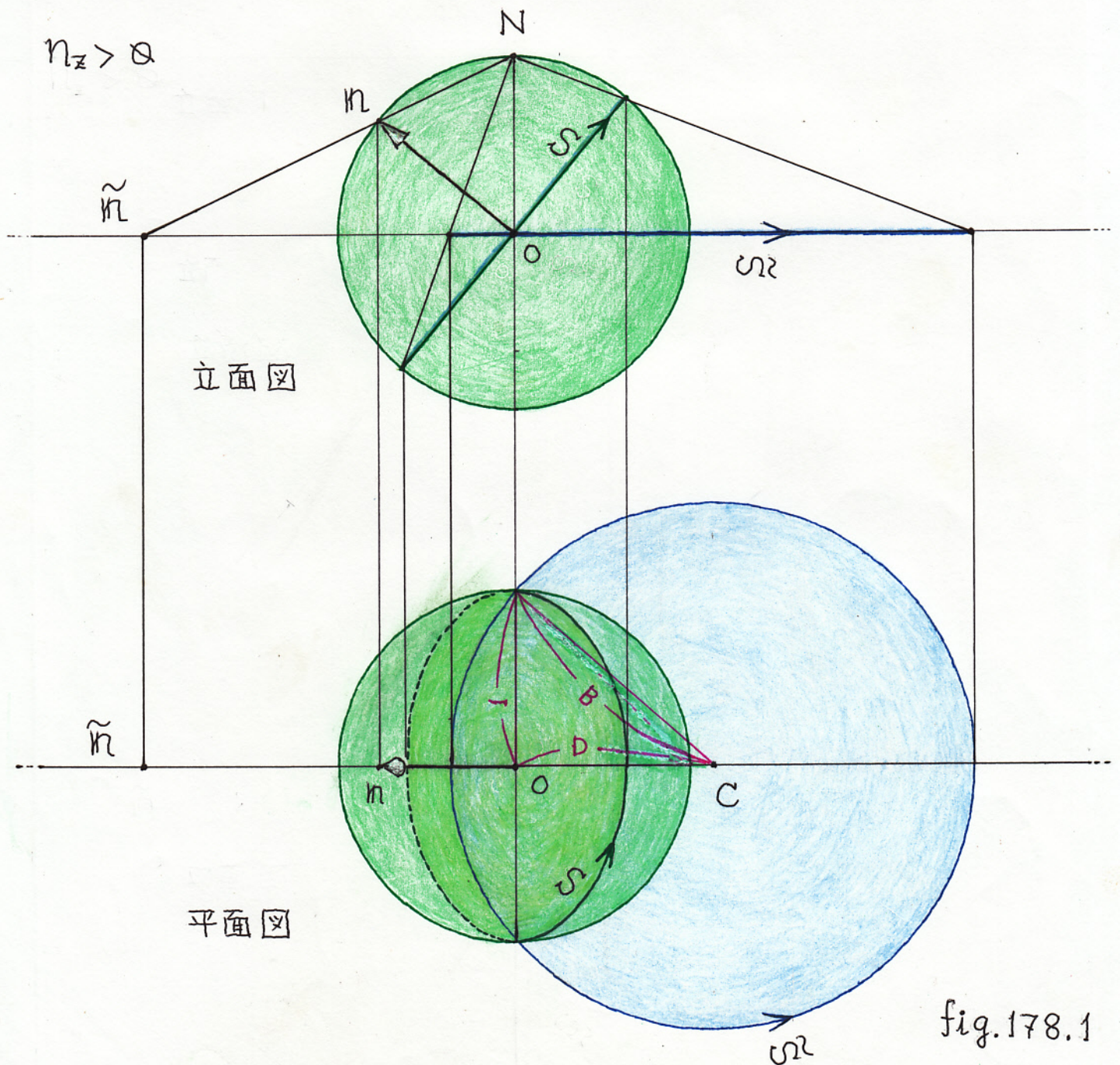
差し当たっての目標は、 S の向きと $\tilde{S}$ の向きの関係を求めることです。も
と具体的に云えば、

n_z と $\tilde{S}$ の向きの関係

を求めるのが、当面の(Present)課題です。

n, S とその極射影 $\tilde{n}, \tilde{S}$ とを同時に作図しましょう。 $n_z > 0$ の場合と $n_z < 0$ の場合の、2つの絵を描きます。それぞれの絵は立面図と平面図の組として描きます。立面図は射影平面が直線に見える方向から見た絵です。さらに視線の方向は、有向大円 S が長さ2の線分に見える方向とします。 S 及び $\tilde{S}$ の向きに関しては、観測者 (Observer, You) に近い側の半円の向きを書き込むことにします。立面図と組を成す平面図は、 z 軸の正の方向から見たものとして描きます。

$n_z > 0$



【P359】 極射影(続き)

$$n_z < 0$$

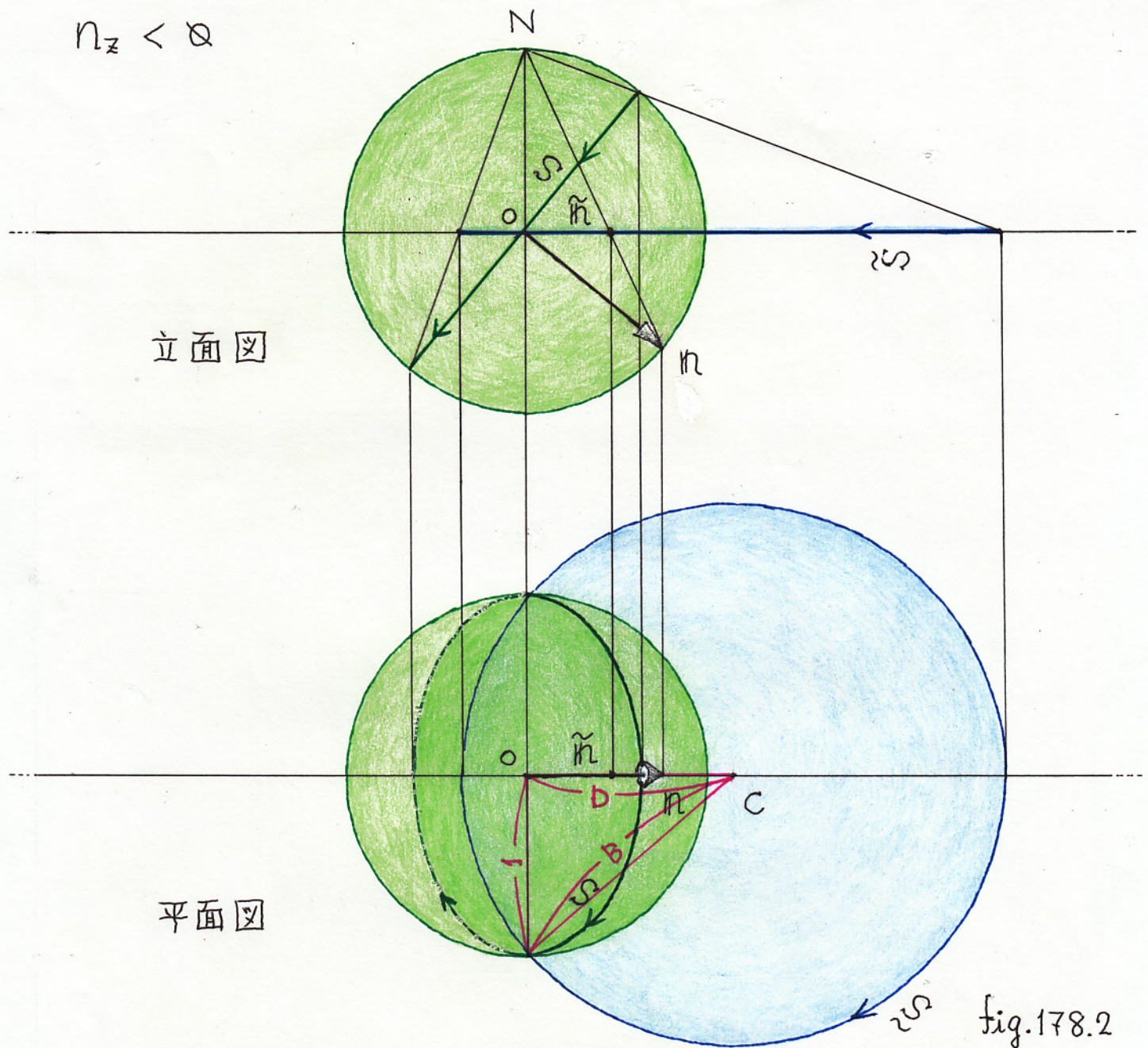


fig.178を良く観察して下さい。立面図, 平面図が描かれているにしても、対象としているのは3次元の幾何学的実体です。想像力が必要です。下記が成り立ちます。

有向円 $\tilde{S}$ は射影平面を2つの領域に分割します。五軸の正方向(北極Nの方向)を頭上方向として射影平面に立ち、 $\tilde{S}$ に沿って $\tilde{S}$ の方向に進むとすれば、点 $\tilde{p}$ は右側の領域に有ります。

定理(104)

定理(104)が成り立つことを、fig.178.1, fig.178.2を観察することで、解って貰えたでしょうか？ 納得し(Assent, Consent, Agree)ない方も居るのではないかと心配です。というのも、立面図の点れに注目すると、fig.178.1のれは才2象限の点で、fig.178.2のれは才4象限の点です。才1象限と才3象限の絵が欠け(Lack)ているからです。fig.178.1やfig.178.2が描かれている紙面を裏返して(Up Side Down)明りにかざして観察しているところを想像してみてくださいと云うのは不親切(Unkindness)ですね。臆劫ですが、絵を追加作図することにします。

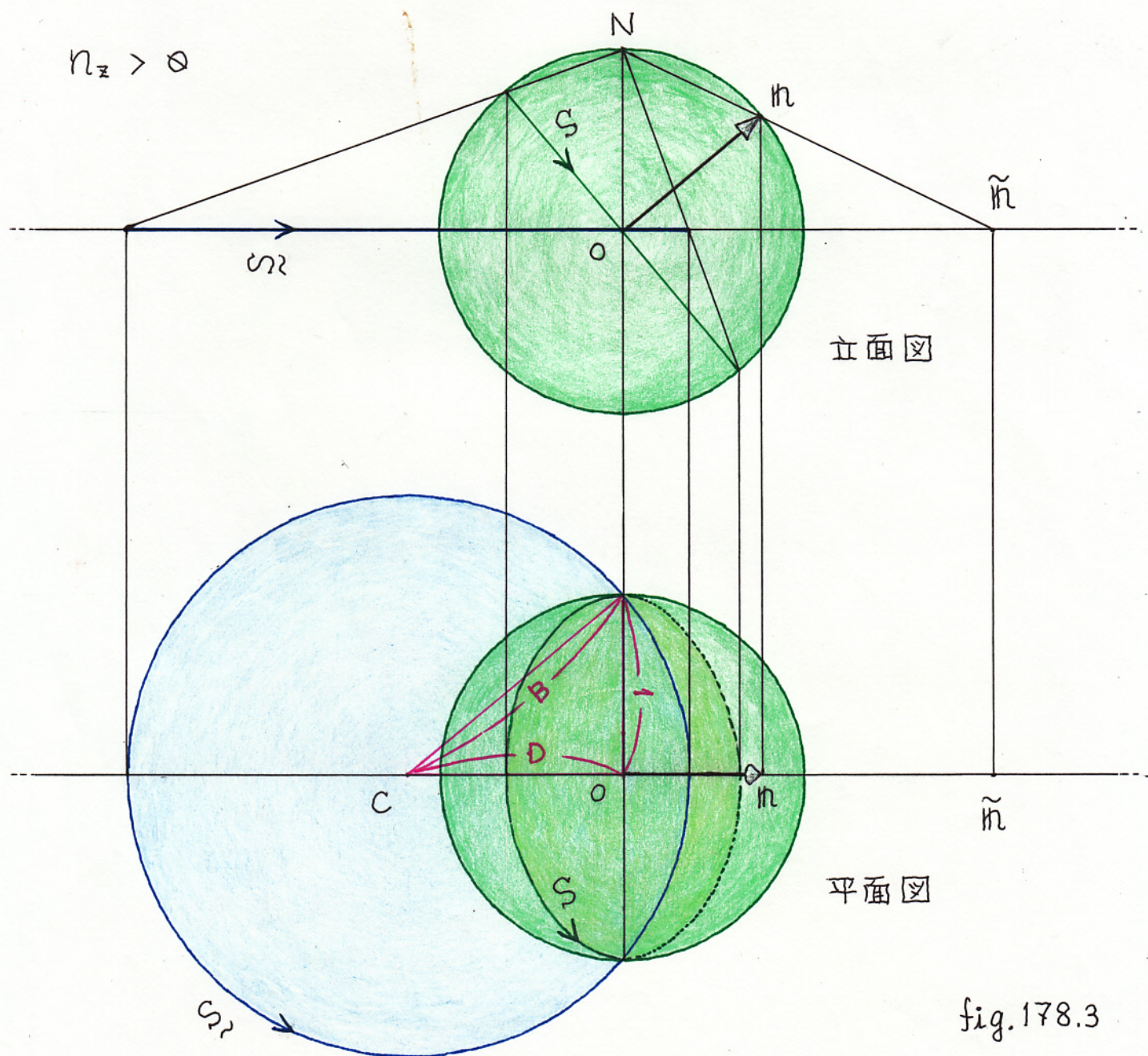


fig. 178.3

【P361】 極射影 (続き)

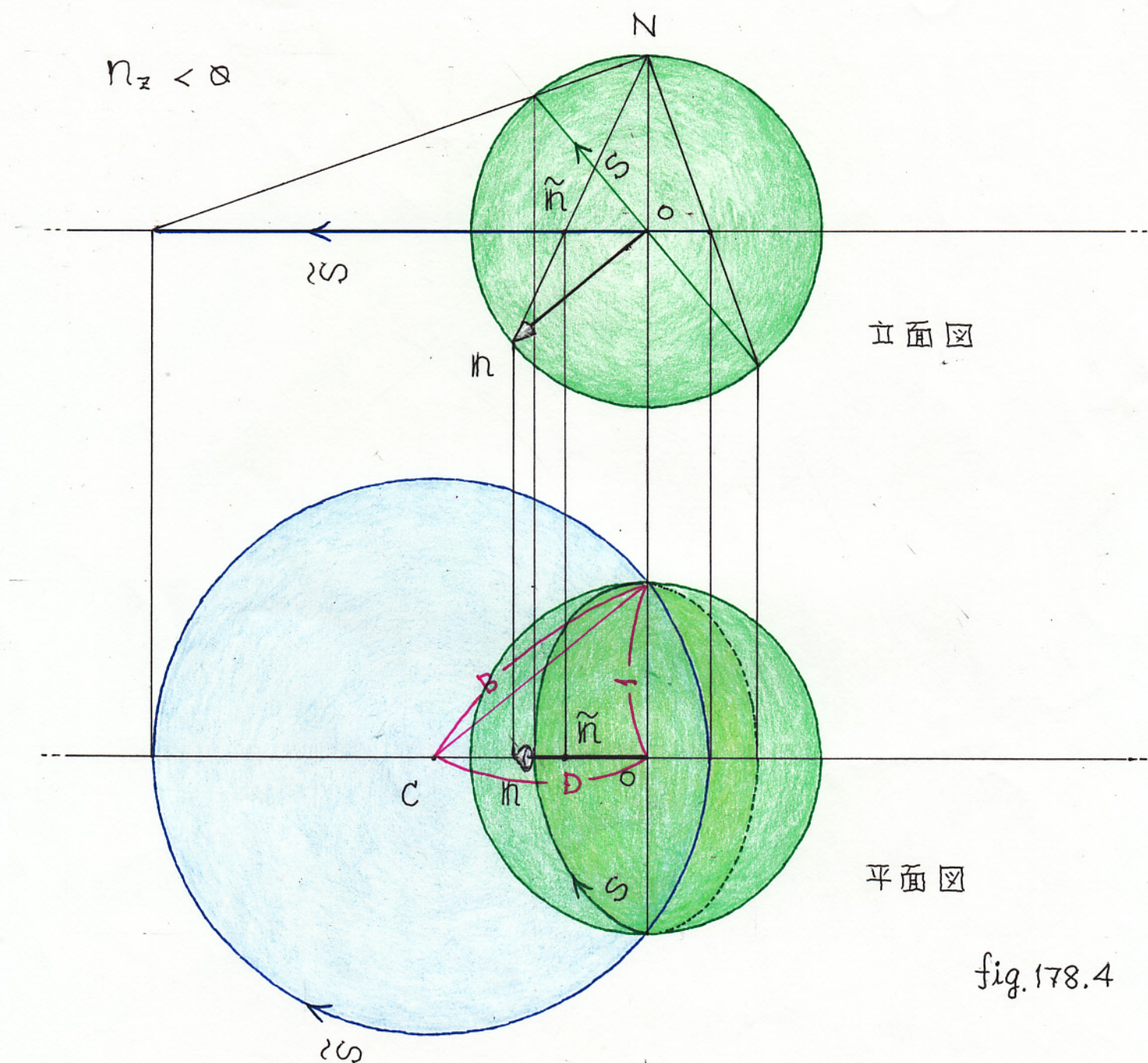


fig.178.4

これで、定理(104)の正しさを納得してもらえたと思います。でも、ちょっと奇妙だ(Strange)と思いませんか？ 幾つかの図形の意味を理解していただいただけです。これしか(104)の証明方法は無いのでしょうか？ 僕はそうだと思っています。右螺旋とか右側とか、所謂 Parity が関与する命題の議論では、必ずどこかで何らかの図形に頼ることになると、僕は確信しています。但し、貴方が数学は得意でも物理学のことは疎いとすればの話です。

定理(104)は定性的な命題です。少し定量的な議論も行いましょう。fig.178からは、(104)以外の命題も窺えるのです。

(103.1)と $\tilde{n}$ が単位ベクトルであることから

$$\begin{aligned} (\overline{o\tilde{n}})^2 &= \tilde{n}_x^2 + \tilde{n}_y^2 \\ &= \frac{n_x^2}{(1-n_z)^2} + \frac{n_y^2}{(1-n_z)^2} \\ &= \frac{1}{(1-n_z)^2} (n_x^2 + n_y^2) = \frac{1-n_z^2}{(1-n_z)^2} \\ (\overline{o\tilde{n}})^2 &= \frac{1+n_z}{1-n_z} \end{aligned} \quad (W34)$$

また、明らかに

$$\begin{aligned} n_z > 0 &\iff \frac{1+n_z}{1-n_z} > 1 \\ n_z < 0 &\iff \frac{1+n_z}{1-n_z} < 1 \end{aligned} \quad (W35)$$

(W34), (W35)より

$$\begin{aligned} n_z > 0 &\iff \tilde{n} \text{ は赤道円の外側の点です。} \\ n_z < 0 &\iff \tilde{n} \text{ は赤道円の内側の点です。} \end{aligned}$$

定理(105)

fig.178で確認のこと。 $(\overline{c\tilde{n}})^2$ を計算しましょう。(103)と $\tilde{n}$ が単位ベクトルであることから

$$\begin{aligned} (\overline{c\tilde{n}})^2 &= \left(\frac{n_x}{1-n_z} + \frac{n_x}{n_z} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{1-n_z} + \frac{n_y}{n_z} \right)^2 \\ &= (n_x^2 + n_y^2) \left(\frac{1}{1-n_z} + \frac{1}{n_z} \right)^2 \\ &= (1-n_z^2) \left(\frac{n_z + 1-n_z}{(1-n_z)n_z} \right)^2 \end{aligned}$$

【P361.5】極射影（続き）

$$(\overline{c\tilde{n}})^2 = \frac{1+n_z}{1-n_z} \frac{1}{n_z^2}$$

$$(\overline{c\tilde{n}})^2 = \frac{1+n_z}{1-n_z} B^2 \quad (W36)$$

(W35), (W36) より

$n_z > 0 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{n} \text{ は円 } \tilde{S} \text{ の外側の点です。}$
 $n_z < 0 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{n} \text{ は円 } \tilde{S} \text{ の内側の点です。}$

定理(106)

これも、fig.178で確かめて下さい。

定理(104), (106)より下記を得ます。

n_z と有向円 $\tilde{S}$ の向きの関係

射影平面を、 z 軸の正方向（北極 N の方向）側から見下ろすならば

$n_z > 0 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{S} \text{ は反時計回りの向きをもちます。}$

$n_z < 0 \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{S} \text{ は時計回りの向きをもちます。}$

定理(107)

これもまた、fig.178で確認できます。

定理(107)は、極射影の等角性の証明において、重要な働きをします。

等角性を議論するためには、まず (First, to Begin with)、射影球面上の2つの有向大円の成す角 (Angle) を定義する必要があります。その前に (First of All)、自明な命題を記しておきましょう。

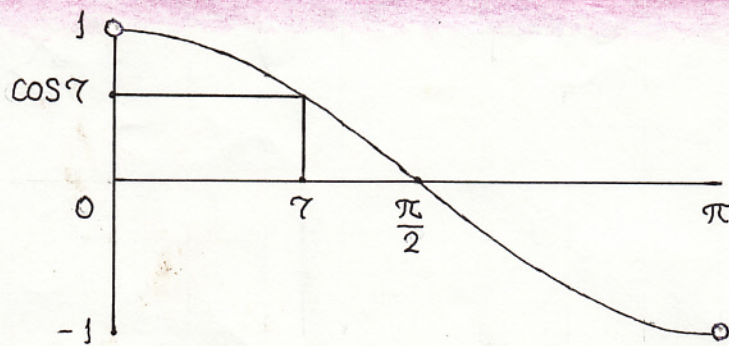


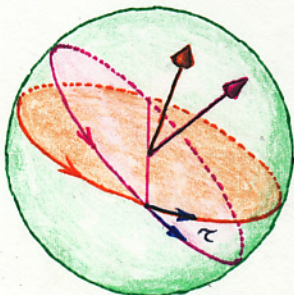
fig.179

$0 < \gamma < \pi$, $0 < \gamma' < \pi$ とすれば、この区間で $\cos \gamma$ は単調減少だから

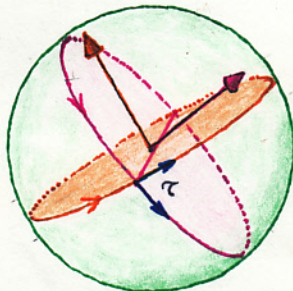
$$\gamma = \gamma' \iff \cos \gamma = \cos \gamma'$$

定理(108)

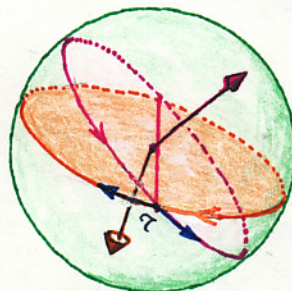
等角性の議論では、定理(108)を暗黙のうちに (Tacitly) 用いることになるでしょう。



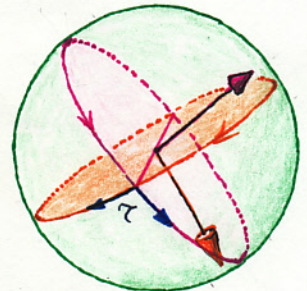
.11



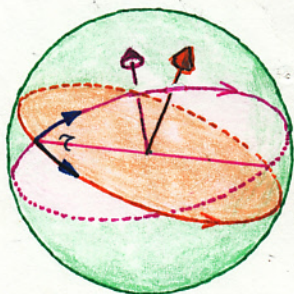
.12



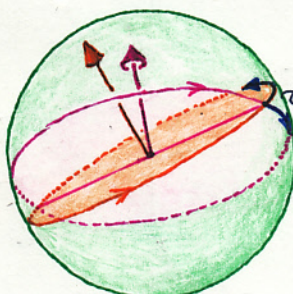
.13



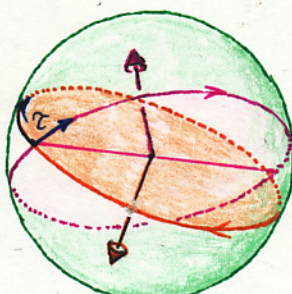
.14



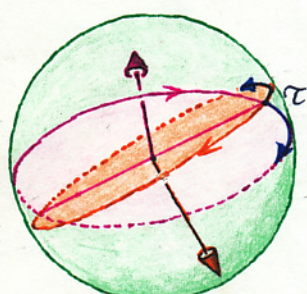
.21



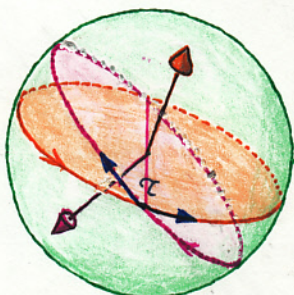
.22



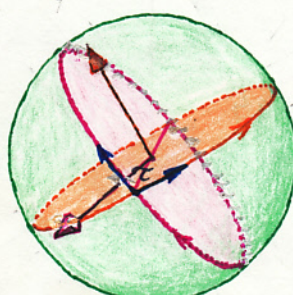
.23



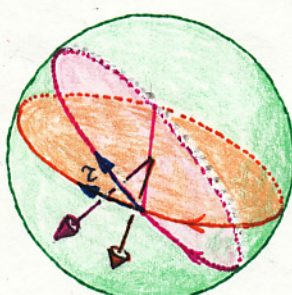
.24



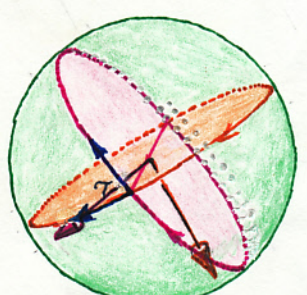
.31



.32



.33



.34

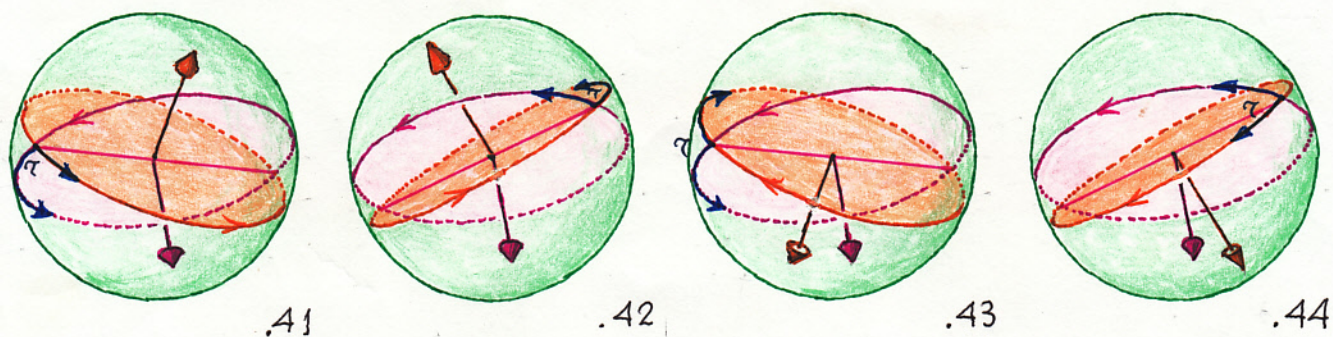


fig. 180

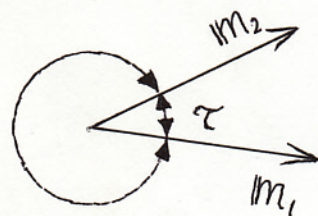
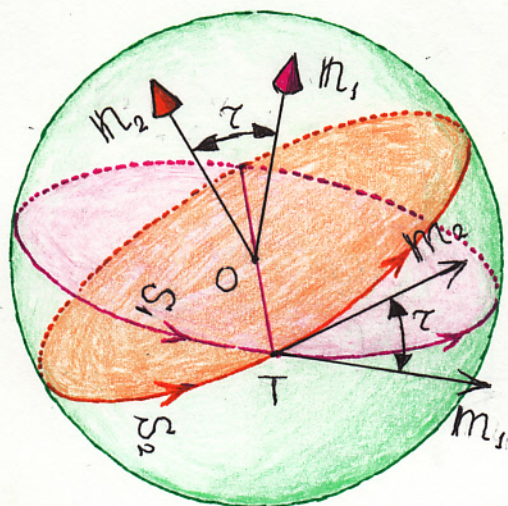


fig. 181

τ と $\tilde{\tau}$ の定義

fig. 181 だけでなく、fig. 180 も参照して下さい。

- 射影球面上の2つの有向大円 S_1, S_2 が与えられているとします。
- S_1 を定める法ベクトルを n_1 , S_2 を定める法ベクトルを n_2 とします。
 n_1, n_2 は法ベクトルの定義より単位ベクトルです。
- S_1, S_2 は無向大円としても一致しないとします。従って、 S_1, S_2 は2点で交わります。2つの交点から1点を選んで T とおきます。
- T における S_1 の接ベクトルを m_1 , T における S_2 の接ベクトルを m_2 とします。 m_1, m_2 は接ベクトルの定義より単位ベクトルです。
- m_1 と m_2 の成す角の内、小さい方を τ とします。 $0 < \tau < \pi$ です。
- S_1 を射影平面へ極射影した有向円を $\tilde{S}_1$, S_2 を極射影した有向円を $\tilde{S}_2$ とします。交点 T を極射影した点を $\tilde{T}$ とします。

- S_1 と S_2 は無向大円としても異なりますから、 $\tilde{S}_1$ と $\tilde{S}_2$ も無向円としても異なります。従って、 $\tilde{S}_1$ と $\tilde{S}_2$ は $\tilde{\gamma}$ で交わります。
- $\tilde{S}_1$ の点 $\tilde{\gamma}$ における接線上の、点 $\tilde{\gamma}$ における $\tilde{S}_1$ の向きと同じ向きを持つ単位ベクトルを μ_1 とおきます。 μ_1 を有向円 $\tilde{S}_1$ の点 $\tilde{\gamma}$ における接ベクトルと呼ぶことにします。 $\tilde{S}_2$ の点 $\tilde{\gamma}$ における接ベクトルを μ_2 とおきます。
- μ_1 と μ_2 の成す角の内、小さい方を $\tilde{\tau}$ とします。 $0 < \tilde{\tau} < \pi$ です。

定義(109)

目標は明らかですね。 $\tau = \tilde{\tau}$ を証明することです。

下記が成り立ちます

$$m_1 \cdot m_2 = \cos \tau = n_1 \cdot n_2$$

定理(110)

ほとんど自明ですが、一応証明します。ベクトル解析の(52.4), (12)を用います。再記します。

$$A \cdot B = AB \cos \theta \quad .4)$$

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C) \quad .12)$$

再記(52)

m_1, m_2 は単位ベクトルだから、 τ の定義と(52.4)より

$$m_1 \cdot m_2 = \cos \tau$$

定義(102.1), .2), .5) と(52.12)より

$$\begin{aligned} m_1 \cdot m_2 &= (n_1 \times \vec{o\tilde{\gamma}}) \cdot (n_2 \times \vec{o\tilde{\gamma}}) \\ &= (n_1 \cdot n_2)(\vec{o\tilde{\gamma}} \cdot \vec{o\tilde{\gamma}}) - (n_1 \cdot \vec{o\tilde{\gamma}})(\vec{o\tilde{\gamma}} \cdot n_2) \\ &= n_1 \cdot n_2 \end{aligned}$$

角 η, ξ の定義

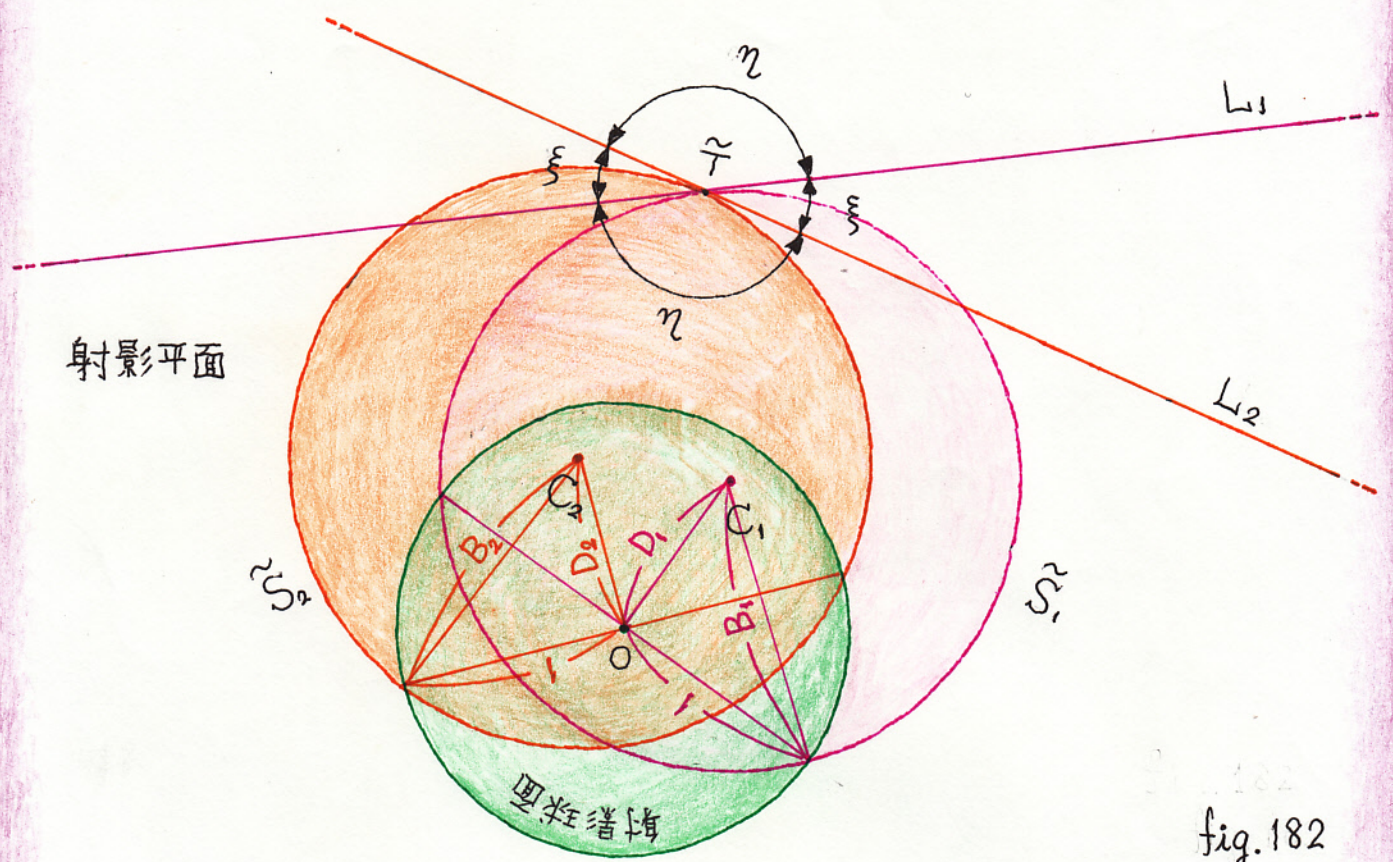


fig.182

- 射影球面上の2つの大円 S_1, S_2 を射影平面に極射影した円 $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ の絵を描きました。また射影球面も描きました。但し、絵を複雑にするだけで、 η, ξ の定義には無関係なので、 S_1, S_2 は描きませんでした。
- $\tilde{S}_1$ と $\tilde{S}_2$ の交点 $\tilde{T}$ における、 $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ の接線をそれぞれ、 L_1, L_2 とします。
- 直線 L_1, L_2 は $\tilde{T}$ で交わります
- L_1, L_2 が円 $\tilde{S}_1$ と円 $\tilde{S}_2$ の外側に成す角を η とします。 $0 < \eta < \pi$ です。
- η ではない、 L_1 と L_2 の成す角を ξ とします。 $0 < \xi < \pi$ です。
- η, ξ が次の関係にあることは自明です。

$$\eta + \xi = \pi \quad .1)$$

- $\tilde{S}_1$ の $\tilde{T}$ における接ベクトル μ_1 は L_1 上の単位ベクトルです。 $\tilde{S}_2$ の $\tilde{T}$ における接ベクトル μ_2 は L_2 上の単位ベクトルです。 従って

$$\tilde{\tau} = \eta \quad \text{or} \quad \tilde{\tau} = \xi \quad .2)$$

定義(111)

.1) より

$$\cos \xi = \cos(\pi - \eta) = \cos \pi \cos(-\eta) - \sin \pi \sin(-\eta)$$

$$\cos \xi = -\cos \eta \quad (\text{W37})$$

また、下図より

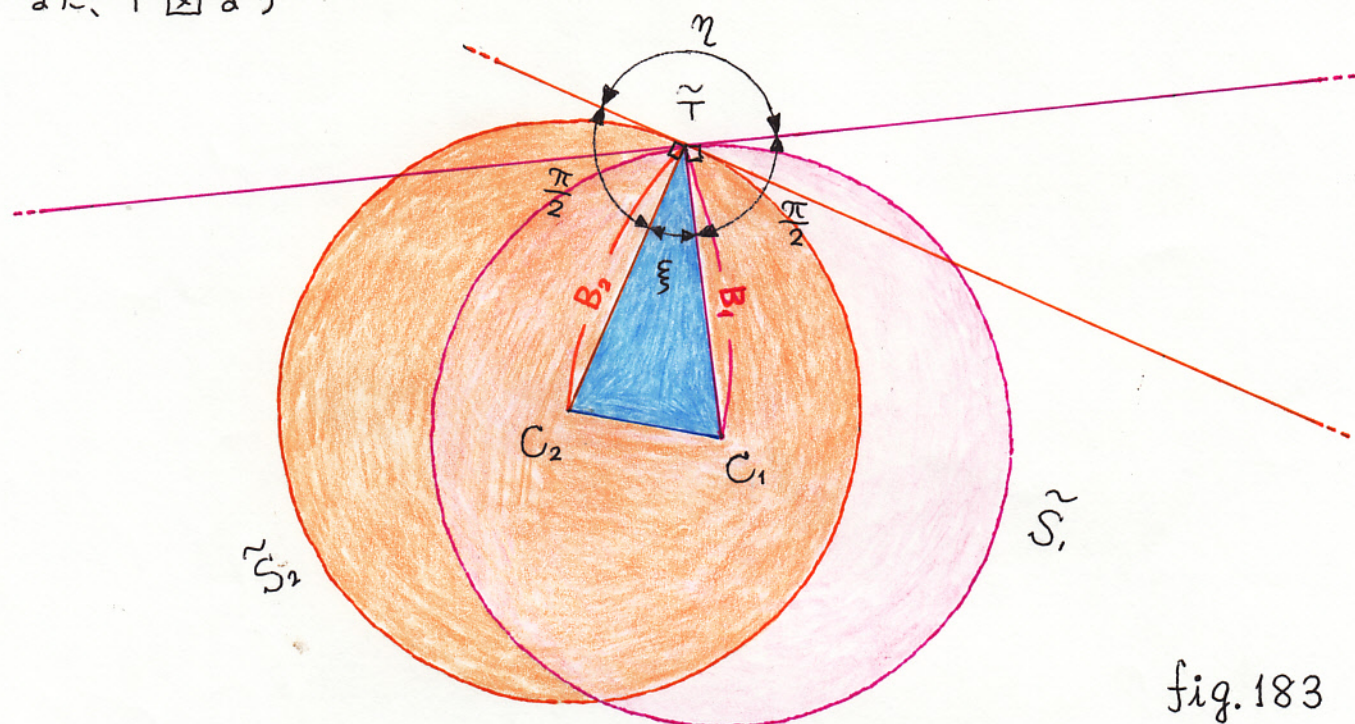


fig.183

$$\angle C_1 \tilde{T} C_2 + \frac{\pi}{2} + \eta + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$\angle C_1 \tilde{T} C_2 = \pi - \eta$$

$$\angle C_1 \tilde{T} C_2 = \xi \quad (\text{W38})$$

fig.182, fig.183における C_1, B_1, C_2, B_2 はそれぞれ、円 $\tilde{S}_1$ の中心と半径、円 $\tilde{S}_2$ の中心と半径です。

S_1 を定める法ベクトル n_1 , S_2 を定める法ベクトル n_2 , C_1, C_2 の座標値をそれぞれ、 $n_1 = {}^t(n_{1x}, n_{1y}, n_{1z})$, $n_2 = {}^t(n_{2x}, n_{2y}, n_{2z})$, $C_1 = {}^t(C_{1x}, C_{1y}, 0)$, $C_2 = {}^t(C_{2x}, C_{2y}, 0)$ とおけば、定理(103)より

$$C_{1x} = -\frac{n_{1x}}{n_{1z}}, C_{1y} = -\frac{n_{1y}}{n_{1z}}, B_1 = \frac{1}{|n_{1z}|}, C_{1x}^2 + C_{1y}^2 = B_1^2 - 1 \quad .1)$$

$$C_{2x} = -\frac{n_{2x}}{n_{2z}}, C_{2y} = -\frac{n_{2y}}{n_{2z}}, B_2 = \frac{1}{|n_{2z}|}, C_{2x}^2 + C_{2y}^2 = B_2^2 - 1 \quad .2)$$

(W39)

【P367】 極射影 (続き)

3角形 $C_1 \tilde{C}_2$ に注目しよう。才2余弦公式 (92.4) と (W39) より

$$\begin{aligned} \cos \xi &= \frac{B_1^2 + B_2^2 - (C_1 C_2)^2}{2B_1 B_2} \\ &= \frac{1}{2B_1 B_2} (B_1^2 + B_2^2 - (C_{1X} - C_{2X})^2 - (C_{1Y} - C_{2Y})^2) \\ &= \frac{1}{2B_1 B_2} (B_1^2 + B_2^2 - C_{1X}^2 + 2C_{1X}C_{2X} - C_{2X}^2 - C_{1Y}^2 + 2C_{1Y}C_{2Y} - C_{2Y}^2) \\ &= \frac{1}{2B_1 B_2} (B_1^2 + B_2^2 - B_1^2 + 1 - B_2^2 + 1 + 2C_{1X}C_{2X} + 2C_{1Y}C_{2Y}) \\ &= \frac{1}{B_1 B_2} (1 + C_{1X}C_{2X} + C_{1Y}C_{2Y}) \\ &= |n_{1Z}| |n_{2Z}| \left(1 + \frac{n_{1X}}{n_{1Z}} \frac{n_{2X}}{n_{2Z}} + \frac{n_{1Y}}{n_{1Z}} \frac{n_{2Y}}{n_{2Z}} \right) \\ &= \frac{|n_{1Z}|}{n_{1Z}} \frac{|n_{2Z}|}{n_{2Z}} (n_{1Z}n_{2Z} + n_{1X}n_{2X} + n_{1Y}n_{2Y}) \end{aligned}$$

$$\cos \xi = \frac{|n_{1Z}|}{n_{1Z}} \frac{|n_{2Z}|}{n_{2Z}} n_1 \cdot n_2 \quad (W40)$$

きれいな式ですね。面白く、不思議ですらあります。極射影の本質 (Essence) が詰まっているのでしょうか。そう思いませんか？

(W37), (W40) をまとめて、定理として再記しておきましょう。

$$\bullet \quad \cos \xi = -\cos \eta \quad .1)$$

$$\bullet \quad \cos \xi = \frac{|n_{1Z}|}{n_{1Z}} \frac{|n_{2Z}|}{n_{2Z}} n_1 \cdot n_2 \quad .2)$$

定理(112)

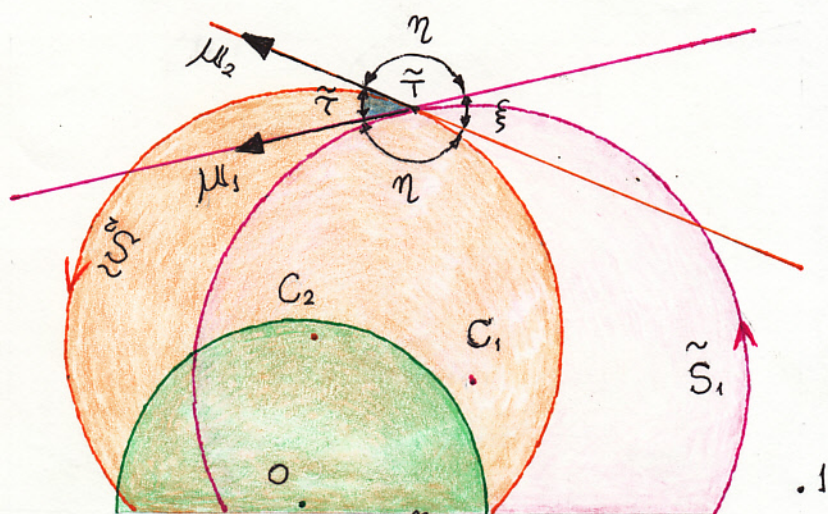
定理(107), (110), (112) から、 $\tau = \tilde{\tau}$ が証明できます。
場合分けして考察する必要があります。

Case 1 : $n_{1z} > 0$, and $n_{2z} > 0$

$$\cos \xi = n_1 \cdot n_2$$

$$\cos \eta = -n_1 \cdot n_2$$

$$\tilde{\tau} = \xi$$

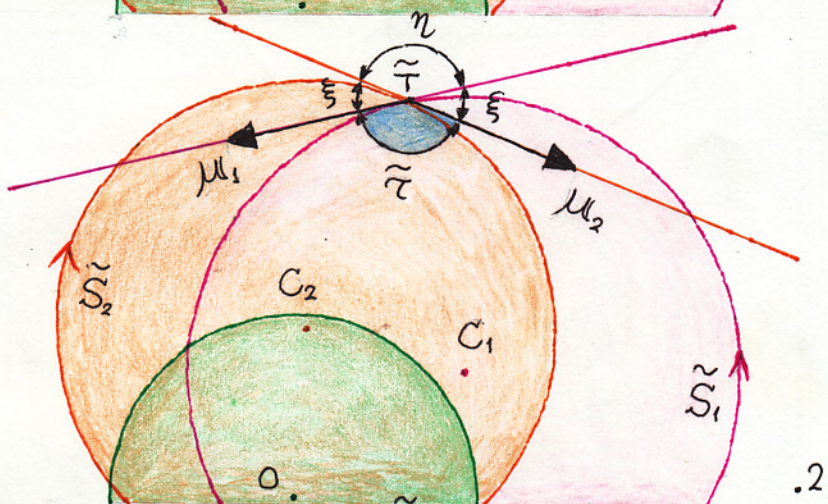


Case 2 : $n_{1z} > 0$, and $n_{2z} < 0$

$$\cos \xi = -n_1 \cdot n_2$$

$$\cos \eta = n_1 \cdot n_2$$

$$\tilde{\tau} = \eta$$

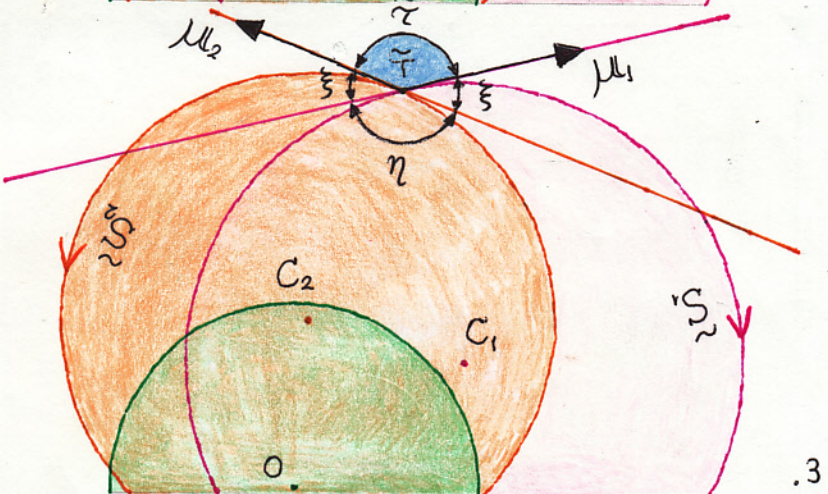


Case 3 : $n_{1z} < 0$, and $n_{2z} > 0$

$$\cos \xi = -n_1 \cdot n_2$$

$$\cos \eta = n_1 \cdot n_2$$

$$\tilde{\tau} = \eta$$

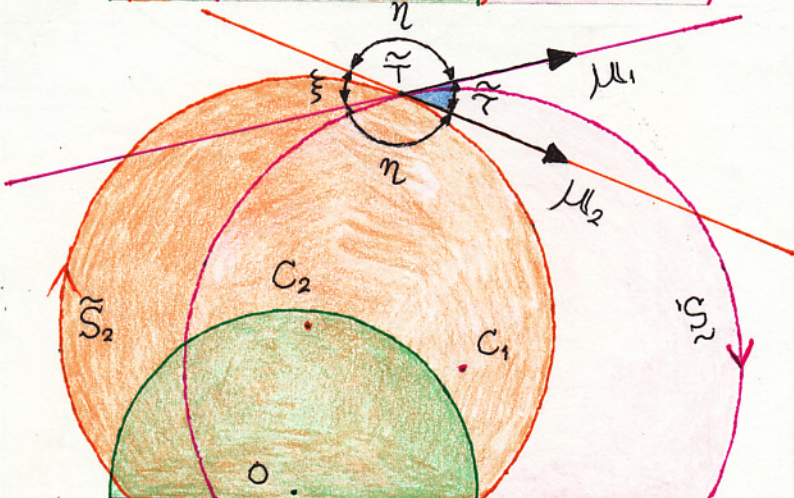


Case 4 : $n_{1z} < 0$, and $n_{2z} < 0$

$$\cos \xi = n_1 \cdot n_2$$

$$\cos \eta = -n_1 \cdot n_2$$

$$\tilde{\tau} = \xi$$



Case1, ~, Case4 のいずれの場合も、下記が成り立っています。

$$\cos \tilde{\gamma} = n_1 \cdot n_2 = \cos \gamma \quad (W41)$$

従って

(109) で定義された $\tilde{\gamma}$ は等しい。

$$\tilde{\gamma} = \gamma \quad \text{定理(113)}$$

定理(113)は、有向大円と、有向大円に極射影される有向円達に関する命題ですが、もっと一般化した命題が成り立ちます。

それを示すためには “なめらかな (Smooth)” の定義が必要です。

“なめらかな” の定義

- 射影球面上の有向曲線 Σ が、“ Σ 上の点 P でなめらかである” とは、点 P における Σ の単位接ベクトルが一意的に定まることを意味します。 .1)
- 射影平面上有向曲線 $\tilde{\Sigma}$ が、“ $\tilde{\Sigma}$ 上の点 $\tilde{P}$ でなめらかである” とは、点 $\tilde{P}$ における $\tilde{\Sigma}$ の単位接ベクトルが一意的に定まることを意味します。 .2)
- 射影球面上の有向曲線 Σ が、 Σ 上の点 P でなめらかであるとして、このとき、 Σ を射影平面に極射影した有向曲線を $\tilde{\Sigma}$ とし、 P を極射影した点を $\tilde{P}$ とすれば、 $\tilde{\Sigma}$ は点 $\tilde{P}$ でなめらかです。 .3)
- 射影平面上有向曲線 $\tilde{\Sigma}$ が、 $\tilde{\Sigma}$ 上の点 $\tilde{P}$ でなめらかであるとして、このとき、 $\tilde{\Sigma}$ を射影球面に極射影した有向曲線を Σ とし、 $\tilde{P}$ を極射影した点を P とすれば、 Σ は点 P でなめらかです。 .4)

定義(114)

【P370】極射影（続き）

射影球面上の有向大円 S はいたるところなめらかです。また、 S を射影平面に極射影した有向円 $\tilde{S}$ もいたるところなめらかです。

(114) は定義 + α です。 α は .3), .4) です。直観的に (Intuitively) は自明なので証明は省略します。貴方は試みてみませんか？ 案外難しいと思われます。というのも、“なめらかさ”の概念は解析学に關与する概念だと考えられるからです。貴方は、どの点でもなめらかでない有向曲線を想像できますか？

極射影の等角性

- 射影球面上の2つの有向曲線 Σ_1, Σ_2 が点 T で交わるとします。
- Σ_1, Σ_2 は共に (Both)、交点 T でなめらかであるとして。
- 点 T における Σ_1, Σ_2 の単位接ベクトルを、それぞれ m_1, m_2 とします。
- m_1 と m_2 の成す角の内、小さい方を τ とします。 $0 < \tau < \pi$ です。
- 有向曲線 Σ_1, Σ_2 , 交点 T の、射影平面への極射影を、それぞれ $\tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2, \tilde{T}$ とします。
- $\tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2$ は共に交点 $\tilde{T}$ でなめらかです。
- 点 $\tilde{T}$ における $\tilde{\Sigma}_1, \tilde{\Sigma}_2$ の単位接ベクトルを、それぞれ μ_1, μ_2 とします。
- μ_1 と μ_2 の成す角の内、小さい方を $\tilde{\tau}$ とします。 $0 < \tilde{\tau} < \pi$ です。
- 点 T , 接ベクトル m_1, m_2 に対して

$$n_1 = \vec{OT} \times m_1, \quad n_2 = \vec{OT} \times m_2$$

とするとき、 n_1 を法ベクトルとする有向大円を S_1 , n_2 を法ベクトルとする有向大円を S_2 とします。

- Σ_1 と S_1 , Σ_2 と S_2 はそれぞれ、点 T で接ベクトル m_1, m_2 を共有します。
- 点 $\tilde{T}$, 接ベクトル μ_1, μ_2 に対して

P351, P352 で記述した作図法で定まる

有向円をそれぞれ $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ とします。

【P371】 極射影 (続き)

- $\tilde{\Sigma}_1$ と $\tilde{S}_1$, $\tilde{\Sigma}_2$ と $\tilde{S}_2$ はそれぞれ、点 $\tilde{\gamma}$ で接ベクトル μ_1, μ_2 を共有します。
- S_1 と $\tilde{S}_1$, S_2 と $\tilde{S}_2$ は極射影によって、互いに一方から他方へ写像されます。
- 従って、定理(113)より

$$\tilde{\gamma} = \gamma$$

定理(115)

これで、極射影のもつ2つの性質、保円性と等角性が示されました。この2つの性質は、僕が定義として採用した極射影に限らず、任意の半径の射影球面、射影球面の中心から任意の距離だけ離れた射影平面に対して定義される極射影においても成り立つ性質です。証明はしません。

極射影の議論は今のところこれぐらいにしておきましょう。当主題の冒頭でふれた、極射影と Möbius 変換や、光線の Lorentz 変換との関係についての議論は、主題をあらためて、いつか、行いたいと思っています。

● Kepler Tiling

This work Inspired Penrose.

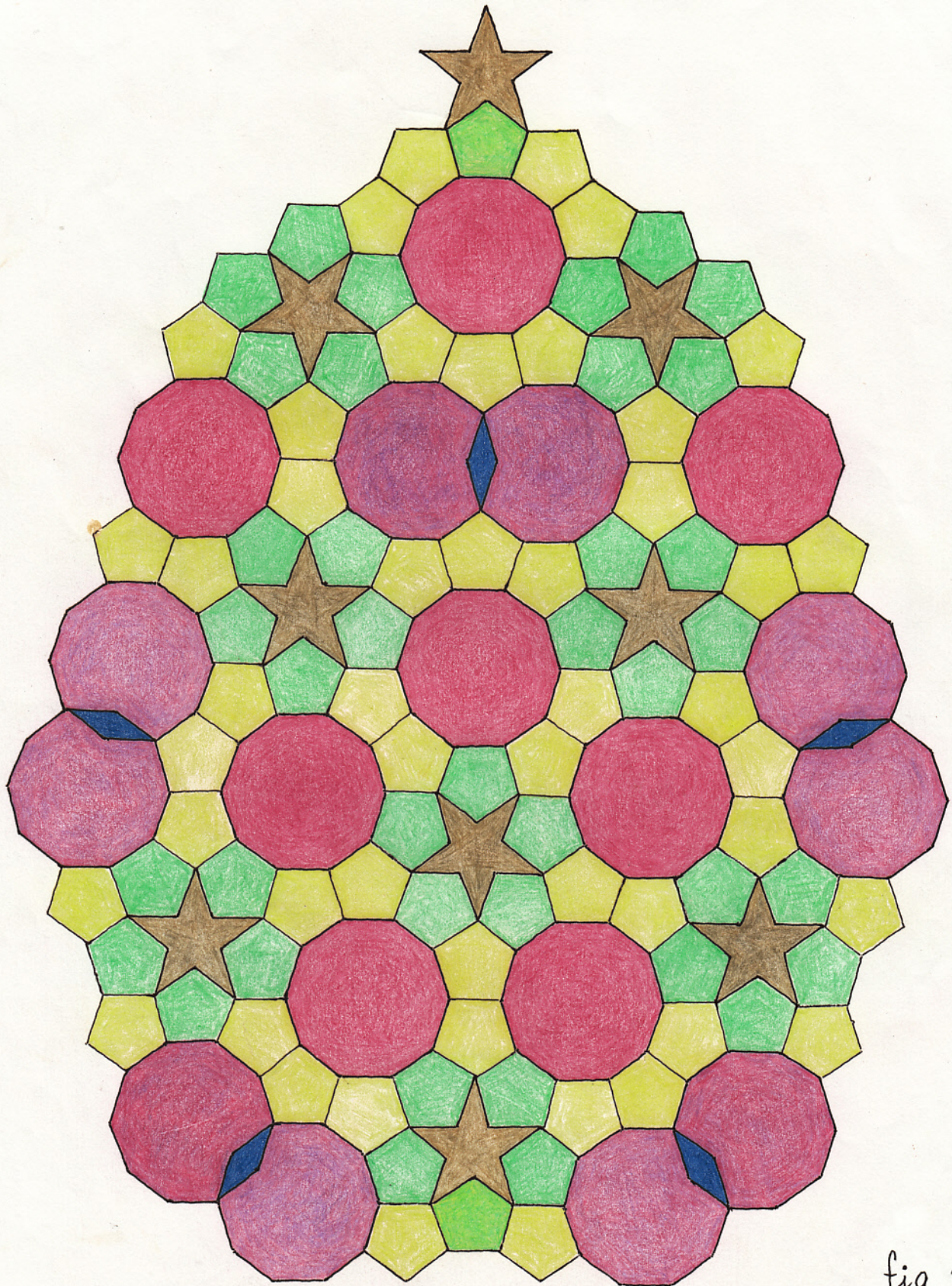


fig. 185

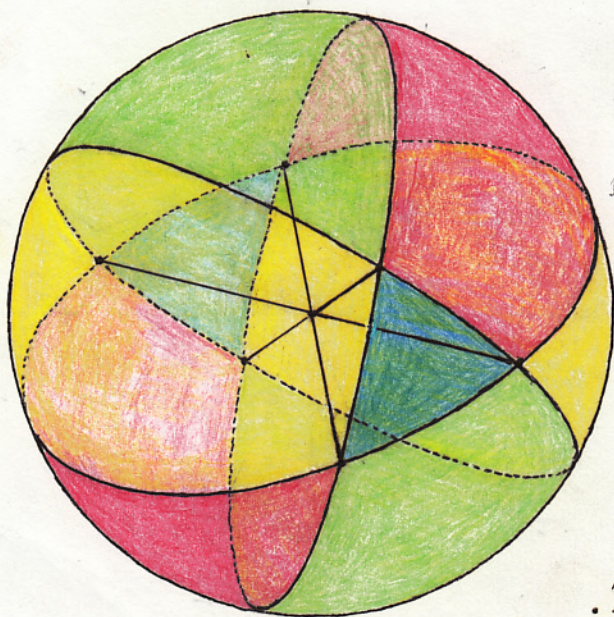
● 球面3角形の定義

球面3角形の定義を試みましょう。当文書のKey Wordの1つは単体(Simplex)です。球面3角形を2次元球面単体とも呼ぶことにします。とはいえ、3次元球面単体, 4次元球面単体, ... を議論する予定は、今のところありません。正直なところ、僕には難し過ぎると思われるのです。2次元球面単体の定義から、上手に出来ないかもしれません。兎も角(Anyway)やってみましょう

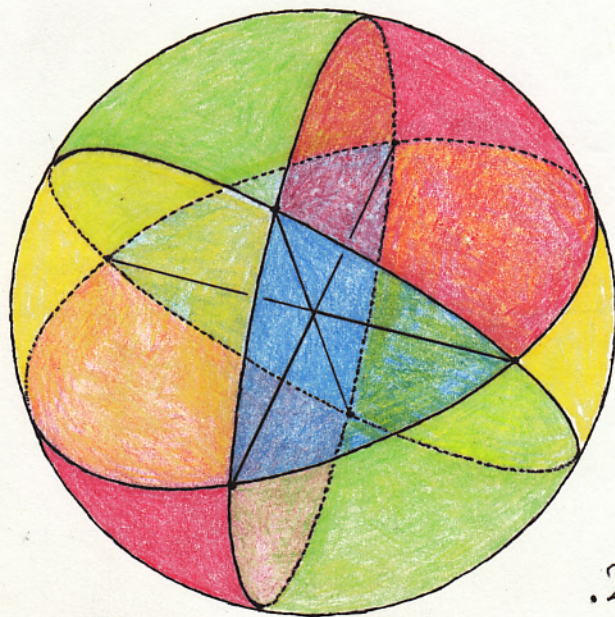
球面3角形は 2次元単位球面上の閉集合です。 定義(116)

(116)は定義の1部でしかありません。というより、定義の1部ですらありません。球面3角形の持つ性質の1部を述べただけのことです。つまり、仄めかし(Hint, Allusion)です。でも、導入部(Introduction)としては、そんなに悪く無い(Not so Bad)と思います。強調し(Emphasize)ておきたいのは、“単位球面上”というKey Wordです。

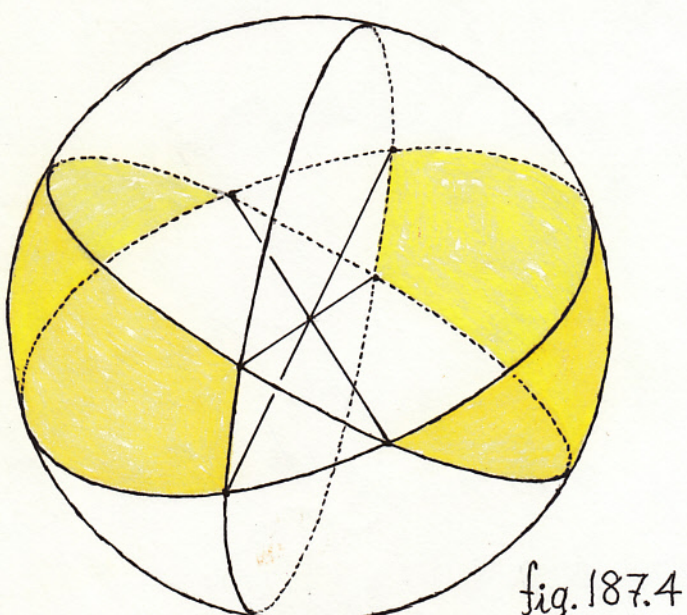
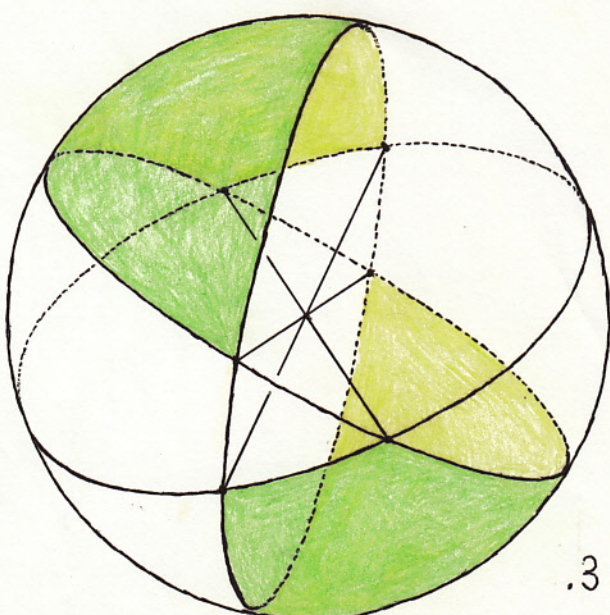
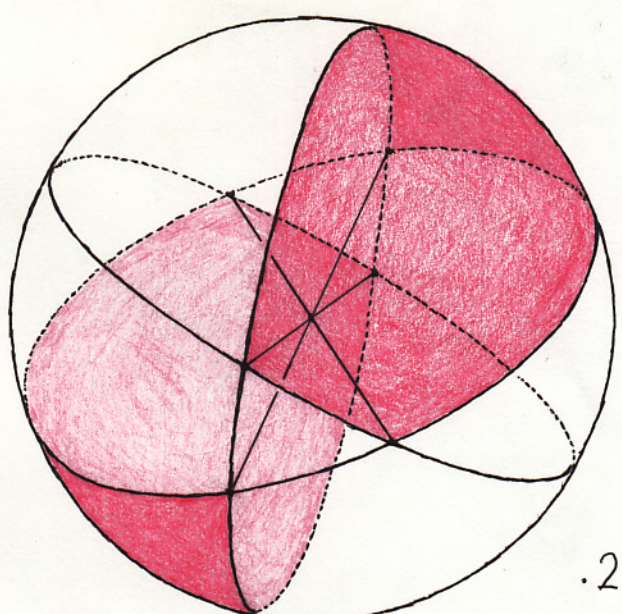
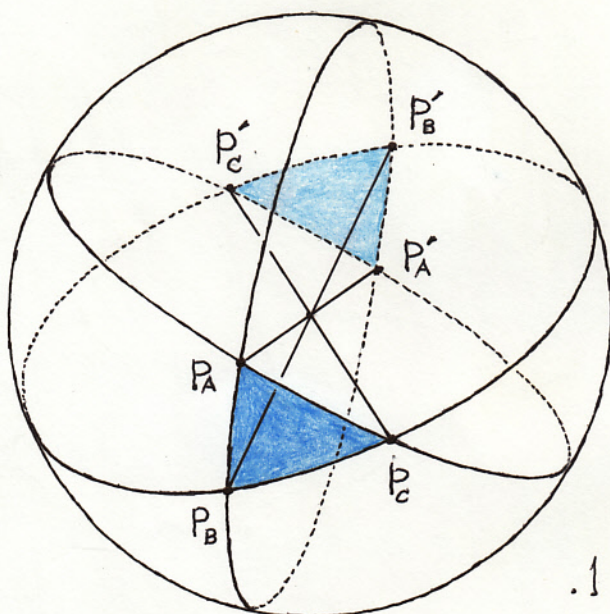
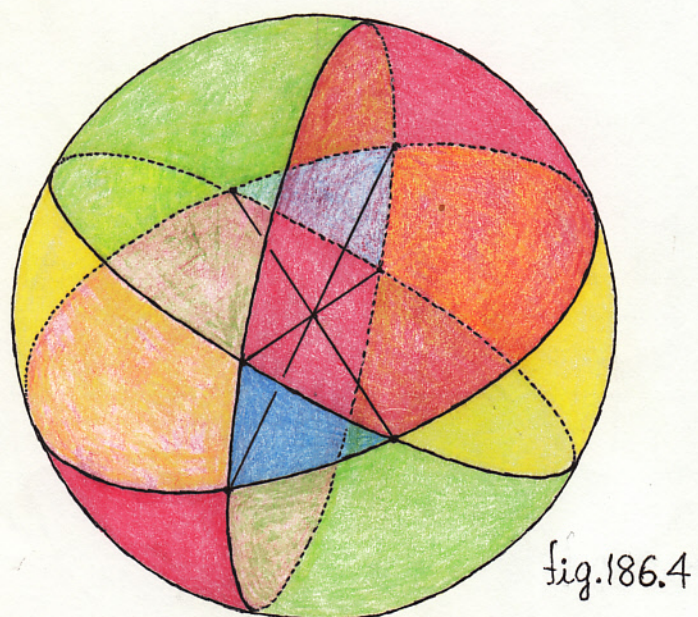
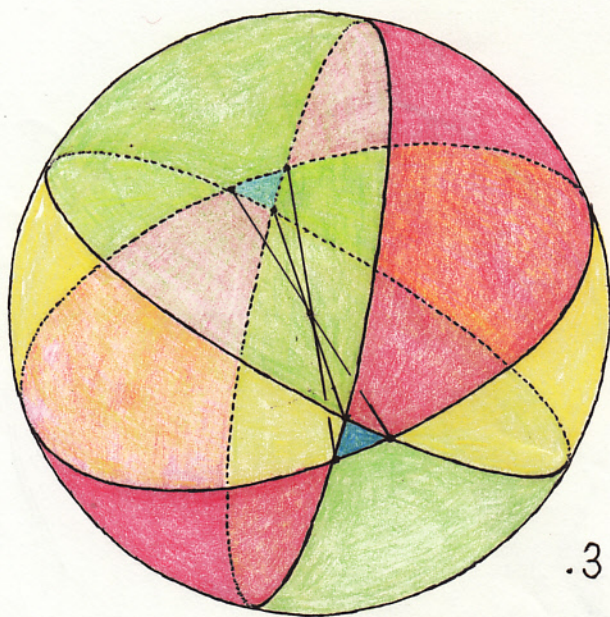
仄めかしついでに (by Way of)、幾つかの絵を描きましょう。説明はしません。仄めかしに過ぎない(Merely)のですから。

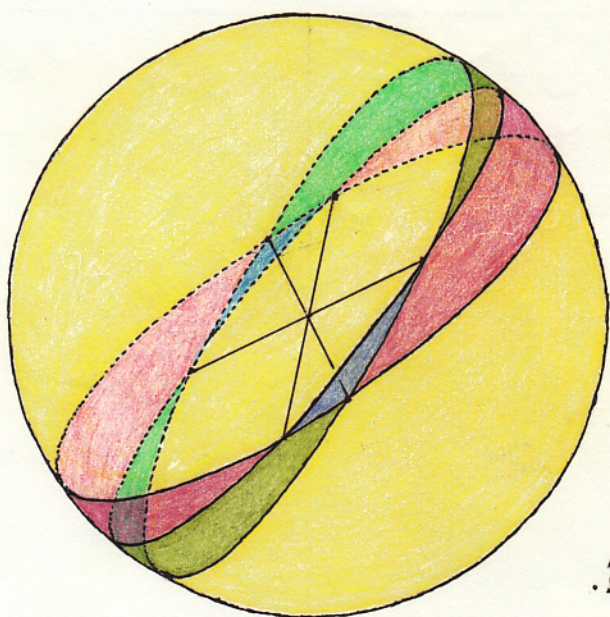


.1

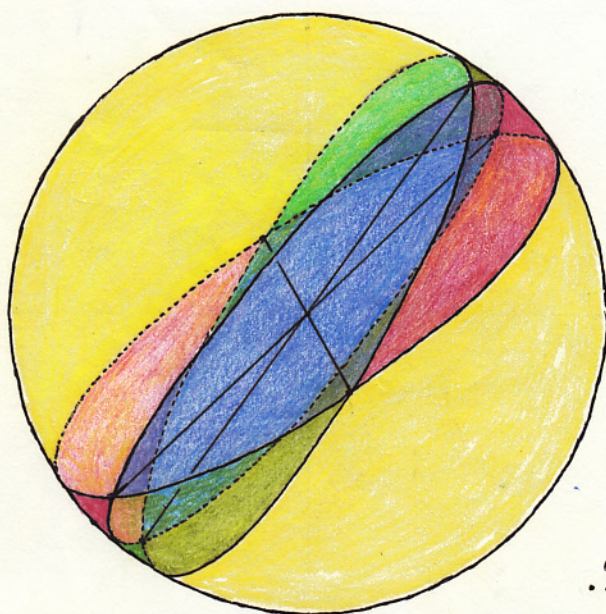


.2

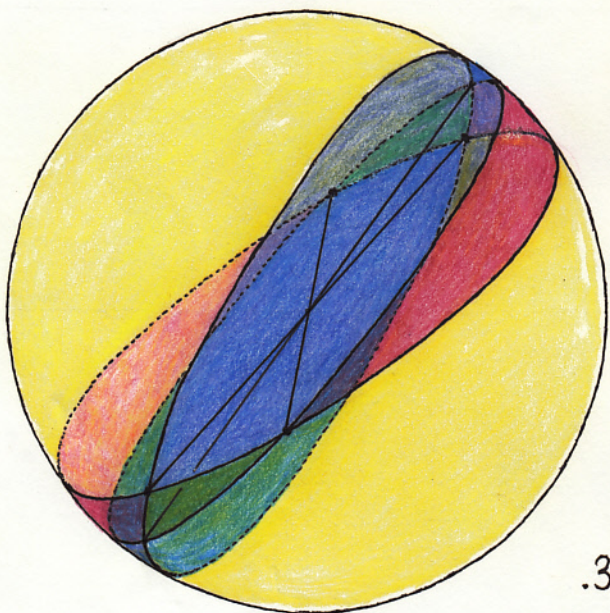




.1



.2



.3

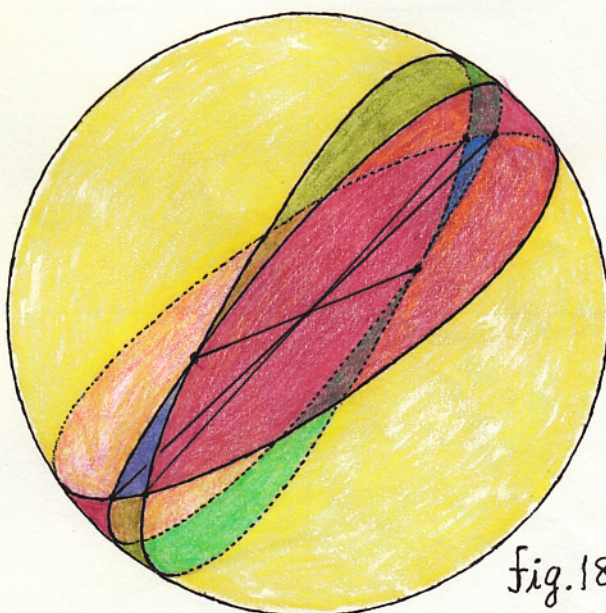
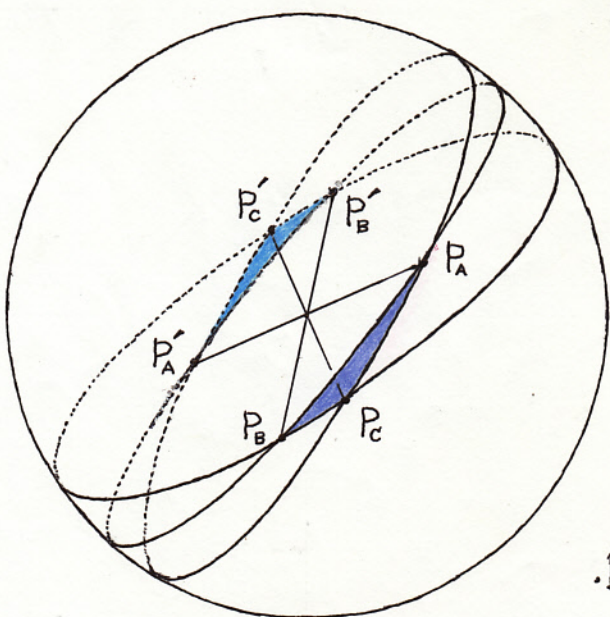
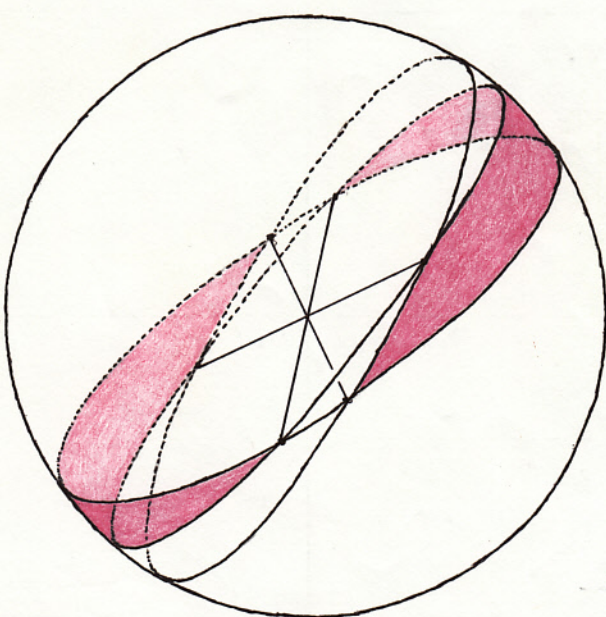


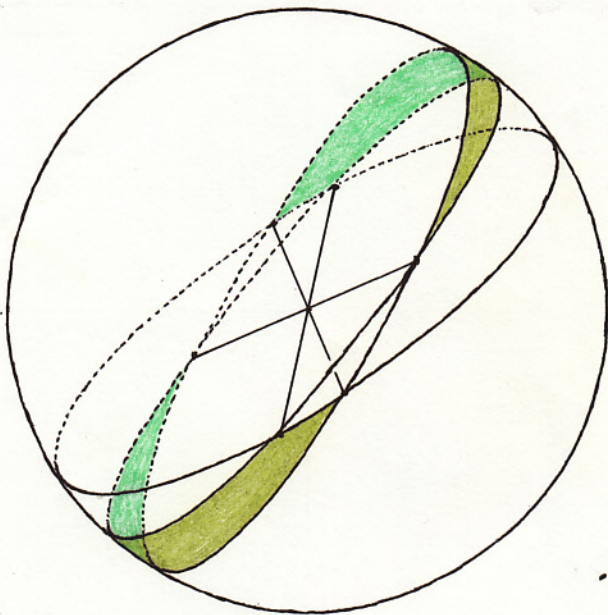
fig.188.4



.1



.2



.3

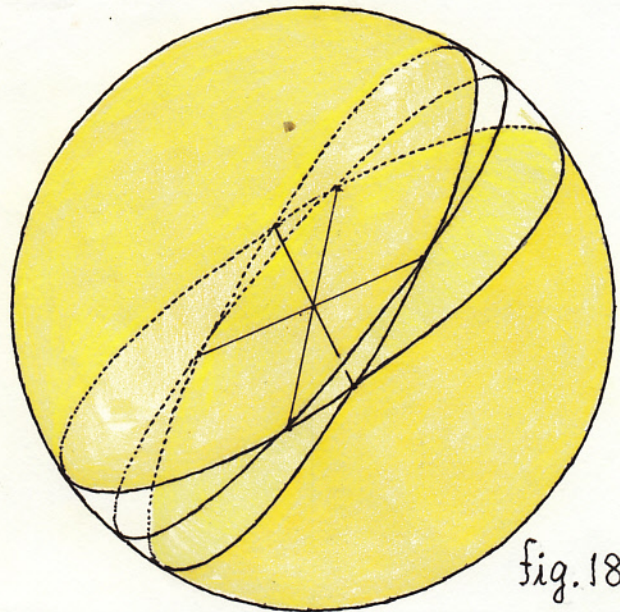


fig.189.4

対極点の定義

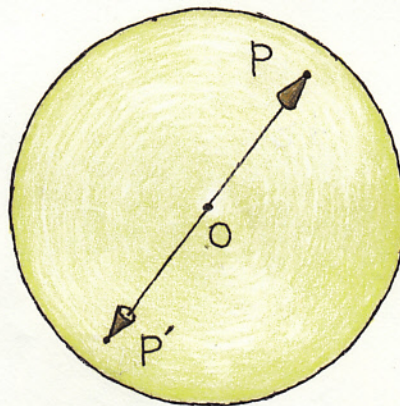


fig.190

- 単位球面の中心を O とします。
- 単位球面上の2点 P, P' が次式を満たすとき

$$\vec{OP} + \vec{OP'} = \mathbf{0}$$

.1)

P と P' は互いに対極点の関係にあると云います。

- P' を P の対極点と呼びます。
- P を P' の対極点と呼びます。
- 単位球面上の任意の点 P に対して、 P の対極点 P' が一意的に存在し(定まり)ます。

定義(117)

fig.187.1, fig.189.1の P_A と P'_A , P_B と P'_B , P_C と P'_C はそれぞれ、対極点の関係にあります。

単位球面上の大円と半球(Hemisphere)の定義を行きましょう。
大円に関しては、『極射影』で既に論じていますから、復習ということになりますね。

大円と半球の定義

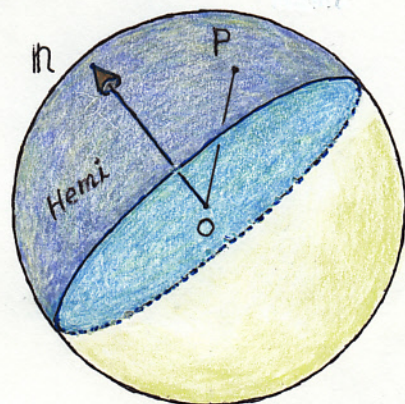
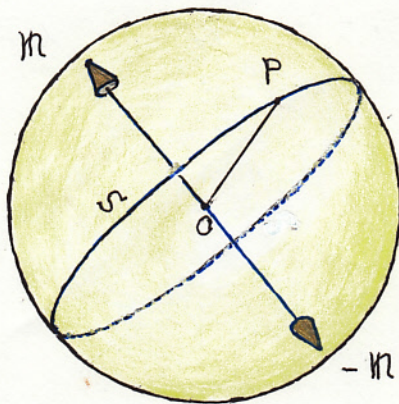


fig.191

- 単位ベクトル n が与えられているとします。
- 単位球面上の点 P で、次式

$$n \cdot \vec{OP} = 0 = (-n) \cdot \vec{OP} \quad .1)$$

を満たす点 P 全体から成る集合 S を、法ベクトル n で定まる大円と呼びます。 $-n$ も、同じ大円 S を定める法ベクトルです。
上式で、 O は単位球の中心です。

- 単位球面上の点 P で、次式

$$n \cdot \vec{OP} \geq 0 \quad .2)$$

を満たす点 P 全体から成る集合 $Hemi$ を、法ベクトル n で定まる半球と呼びます。

- 単位球面上の大円は、単位球面を2つの半球に分割します。
もっと正確に述べましょう。

n を法ベクトルとする大円を $S(n)$ と記すことにします。また、 n を法ベクトルとする半球を $Hemi(n)$ と記すことにします。このとき、下記が成り立ちます。

$$Hemi(n) \cup Hemi(-n) = \text{単位球面全体}$$

$$Hemi(n) \cap Hemi(-n) = S(n) \quad .3)$$

ここで、記号 " $\cup$ ", " $\cap$ " はそれぞれ、和集合、積集合(共通集合)を表わす、集合の演算子です。

定義(118)

.3) は大円と半球の定義から直ちに得られる自明な命題です。でもそれだけではありません。"分割"の概念の1例でもあります。

以後の議論では、大円や半球を取り扱う際には、必ずしも、定義(118)の法ベクトルが登場するとは限りません。単に貴方の直観に訴える場合もあるかも知れません。それでは、(118)は何の為の定義だったのでしょうか？ それは、大円と半球に関する、僕と貴方の直観を同期(同調)させることを目的として定義だとも云えます。勿論それだけではありません。正確な議論を行う際に必要になる定義でもあります。

ちょっと、横道に逸れてしまいましたね。

『極射影』のところでは、その等角性を論じるために用いた大円は有向大円でした。それは単なる集合としての大円ではありません。それ以上の幾何学的実体です。でも、当主題『球面3角形の定義』で論じられる大円は無向大円です。単なる集合としての大円です。つまり、

$$S(n) = S(-n)$$

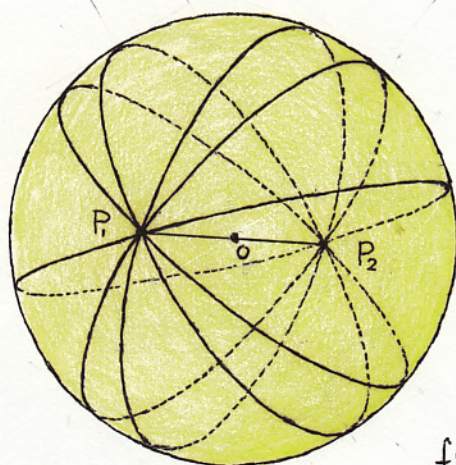
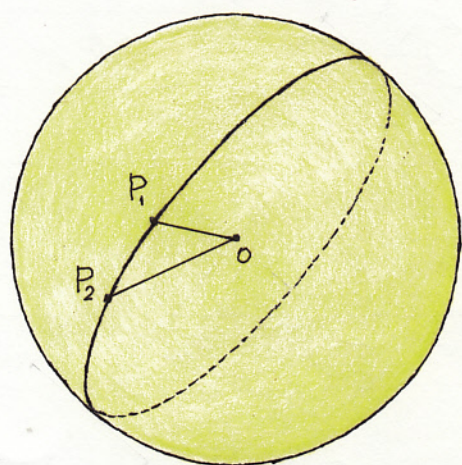


fig.192

2点を通る大円

- 単位球面上の異なる2点 P_1, P_2 が与えられているとします。
- P_1, P_2 が互いに対極点の関係にないならば、2点 P_1, P_2 を通る大円が一意的に定まります。(1つだけ存在します。)
- P_1, P_2 が互いに対極点の関係にあるならば、2点 P_1, P_2 を通る大円は無限に存在します。どれほど無限に存在するかと云えば、単位球面を埋め尽くす程無限にです。

定理(119)

(119)を証明する前に、あまりにも自明なので定義(118)で言い忘れてしまったことがあります。ここに(118)の追記として記しておきます。

- 単位ベクトル μ が与えられたとします。 μ を法ベクトルとして定まる大円, 半球は一意的に存在します。

定義(118.4)

これは、大円, 半球の定義から直ちに得られる命題なので、(118)の中で述べるべきでしたので、定義ではないのですが、定義(118.4)という識別子を与えることにしました。

【P380】 6月5日(土) 球面3角形の定義(続き)

定理(119)を証明します。まず前半の命題を証明しましょう。
3次元のベクトル解析の公式、(52.5), .8), .15) を用います。
これらを再記しておきましょう。

- $A \times B = -B \times A$.5)
- $A \cdot (B \times C) = [ABC] = [BCA] = [CAB]$.8)
- $(A \times B) \cdot (A \times B) = (AB \sin \theta)^2$.15)

再記(52)

単位球面上の異なる2点 P_1, P_2 が互いに対極点の関係にないします。
 $\vec{OP}_1$ と $\vec{OP}_2$ の成す角の内、大きくない方の角を θ とします。 $0 < \theta < \pi$ です。
 $\vec{OP}_1 \times \vec{OP}_2$ は 0 ベクトルではありません。何故ならば

$$(\vec{OP}_1 \times \vec{OP}_2) \cdot (\vec{OP}_1 \times \vec{OP}_2) = \sin^2 \theta \neq 0 \quad (W1)$$

だからです。そこで、単位ベクトル n を次式で定めます。

$$n = \frac{1}{\sin \theta} \vec{OP}_1 \times \vec{OP}_2 \quad (W2)$$

n は $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2$ のどちらとも直交します。このことを示しましょう。

$$\begin{aligned} \vec{OP}_1 \cdot (\vec{OP}_1 \times \vec{OP}_2) &= [\vec{OP}_1 \vec{OP}_1 \vec{OP}_2] = [\vec{OP}_2 \vec{OP}_1 \vec{OP}_1] \\ &= \vec{OP}_2 \cdot (\vec{OP}_1 \times \vec{OP}_1) = 0 \end{aligned} \quad (W3)$$

$$\begin{aligned} \vec{OP}_2 \cdot (\vec{OP}_1 \times \vec{OP}_2) &= [\vec{OP}_2 \vec{OP}_1 \vec{OP}_2] = [\vec{OP}_1 \vec{OP}_2 \vec{OP}_2] \\ &= \vec{OP}_1 \cdot (\vec{OP}_2 \times \vec{OP}_2) = 0 \end{aligned} \quad (W4)$$

(W2), (W3), (W4) より

$$\vec{OP}_1 \cdot n = 0 = \vec{OP}_2 \cdot n \quad (W5)$$

【P381】 球面3角形の定義 (続き)

ℓ を法ベクトルとする大円を $S(\ell)$ と記すことにします。 $S(\ell) = S(-\ell)$ です。(W5)より、2点 P_1, P_2 を通る大円が少なくとも1つ存在することが示されました。 $S(\ell)$ です。問題は一意性です。つまり $\pm \ell$ の一意性を示す必要があります。

P_1, P_2 が互いに対極点の関係にない と言うことは、2つのベクトル、 $\vec{OP}_1, \vec{OP}_2$ が一次独立であることと同値です。従って、3点 O, P_1, P_2 を含む2次元平面が一意的に定まります。よって、 O を通り、この平面と垂直な直線も一意的に定まります。この直線上の単位ベクトルが $\pm \ell$ に外なりません。これで、定理(119)の前半が証明されました。

貴方は納得し(Consent, Comply)てくれましたか? 正直なところ(Frankly Speaking)、僕自身はもやもやした(Misty)ものを感じています。でも、その理由は理解しているつもりです。それは、

- 3次元のAffine空間を定める公理系
- 公理系から諸命題を導出するための推論規則

が明示的に示されていないからです。しかし、これは当書の意図の範疇を越えています。上記の証明で甚か弁してもらうほかありません。

次に、定理(119)の後半を証明しましょう。

単位球面上の2点 P_1, P_2 が互いに対極点の関係にあるとします。単位ベクトル $\vec{OP}_1$ を法ベクトルとする大円を $S(\vec{OP}_1)$ と記すことにします。次が成り立ちます。

$$S(\vec{OP}_1) = S(-\vec{OP}_1) = S(\vec{OP}_2) \quad (W6)$$

大円 $S(\vec{OP}_1)$ 上の任意の1点を選び N とします。 N に対して、 $\vec{ON}$ を ℓ とおきます。

$$\forall N \in S(\vec{OP}_1), \quad \ell = \vec{ON} \quad (W7)$$

【P382】 6月6日(日) 球面3角形の定義(続き)

$N \in S(\vec{OP}_1), N \in S(\vec{OP}_2)$ より

$$n \cdot \vec{OP}_1 = 0 = n \cdot \vec{OP}_2 \quad (W8)$$

n を法ベクトルとする大円を $S(n)$ とすれば、(W8)より、2点 P_1, P_2 は大円 $S(n)$ 上の点である。従って、2点 P_1, P_2 を通る大円は少なくとも1つ存在することが示されました。それが $S(n)$ です。 $S(\vec{OP}_1)$ 上のからてな点 N ごとに、2点 P_1, P_2 を通る大円が定まるので、そのような大円が無限に存在するのは当然だと考えがちですが、自明ではありません。証明する必要があります。

次の自明な命題を用います。

- 単位球面上のからてな大円を S とします。 S 上の任意の点を P とするとき、 P の対極点を P' とすれば、 P' も S 上の点です。

定義(118.5)

これも、定義(118)から直ちに得られる命題なので、定義ではないのですが、定義(118.5)という識別子を与えることにしました。

互いに対極点の関係にある2点 P_1, P_2 のどちらとも異なる、単位球面上の任意の1点を P_3 とします。2点 P_1, P_3 は互いに対極点の関係にある点ではありません。従って、証明済の(119)の前半の命題より、2点 P_1, P_3 を通る大円 S が(一意的に)存在します。また、(118.5)より、 P_1 の対極点 P_2 も S 上の点です。従って、 S は互いに対極点の関係にある2点 P_1, P_2 を通る大円です。点 P_3 の任意性より、2点 P_1, P_2 を通る大円は、単位球面を埋め尽くす程無限に存在します。 Q.E.D.

対極点の関係にある2点に関する(119)の後半の命題が、球面3角形の定義の作業を、厄介で煩わしい(Troublesome)ものになっています。

【P.383】 球面3角形の定義 (続き)

3次正方行列の逆行列

$m = {}^t(m_x, m_y, m_z)$, $n = {}^t(n_x, n_y, n_z)$, $P = {}^t(P_x, P_y, P_z)$ とします。
 m, n, P は一次独立だとします。 m, n, P に対して 3×3 の行列 A を次のように定めます。

$$A = \begin{pmatrix} m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \\ P_x & P_y & P_z \end{pmatrix} \quad .1)$$

このとき、 A^{-1} は下記で表わされます。

$$A^{-1} = \frac{1}{(m \times n) \cdot P} \begin{pmatrix} n \times P |_x & P \times m |_x & m \times n |_x \\ n \times P |_y & P \times m |_y & m \times n |_y \\ n \times P |_z & P \times m |_z & m \times n |_z \end{pmatrix} \quad .2)$$

定理(120)

計算します。まず、 $\det A$ から、

$$\begin{aligned} \det A &= m_x n_y P_z + m_z n_x P_y + m_y n_z P_x \\ &\quad - m_z n_y P_x - m_x n_z P_y - m_y n_x P_z \\ &= (m_y n_z - m_z n_y) P_x + (m_z n_x - m_x n_z) P_y \\ &\quad + (m_x n_y - m_y n_x) P_z \\ &= m \times n |_x P_x + m \times n |_y P_y + m \times n |_z P_z \\ &= (m \times n) \cdot P = [m \ n \ P] \end{aligned}$$

この値は、 m, n, P の成す 3次元平行体の符号付き 体積です。

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} n_y & n_z \\ p_y & p_z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m_y & m_z \\ p_y & p_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_y & m_z \\ n_y & n_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} n_x & n_z \\ p_x & p_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_x & m_z \\ p_x & p_z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m_x & m_z \\ n_x & n_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} n_x & n_y \\ p_x & p_y \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m_x & m_y \\ p_x & p_y \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_x & m_y \\ n_x & n_y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} n_y p_z - n_z p_y & p_y m_z - p_z m_y & m_y n_z - m_z n_y \\ n_z p_x - n_x p_z & p_z m_x - p_x m_z & m_z n_x - m_x n_z \\ n_x p_y - n_y p_x & p_x m_y - p_y m_x & m_x n_y - m_y n_x \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(m \times n) \cdot P} \begin{pmatrix} n \times p |_x & p \times m |_x & m \times n |_x \\ n \times p |_y & p \times m |_y & m \times n |_y \\ n \times p |_z & p \times m |_z & m \times n |_z \end{pmatrix}$$

『極射影』のところ(P363)で、自明なこととして、2つの異なる大円は2点で交わる、と述べましたね。

当主題では、これを定理として呈示、証明することにしましょう。

異なる2つの大円の交点

- 単位球面上の異なる(集合としても異なる)2つの大円は異なる2点で交わります。
- この2交点は互いに対極点の関係にあります。

定理(121)

具体的に計算することによって証明します。

定理(120)を用います。

【P385】球面3角形の定義（続き）

m, n を法ベクトルとする大円をそれぞれ、 $S(m), S(n)$ とします。これら2つの大円は異なる（集合としても異なる）ものとします。このことは、

$$m \neq \pm n, \quad m \times n \neq \mathbf{0} \quad (W9)$$

であるということです。 $S(m), S(n)$ のどちらにも含まれる点（もしそれが存在するならば）を P とします。

$m = {}^t(m_x, m_y, m_z), n = {}^t(n_x, n_y, n_z), P = {}^t(P_x, P_y, P_z)$ とします。 P が $S(m)$ 上の点であること、 P が $S(n)$ 上の点であること、 P が単位球面上の点であること、これらを式で表わせば、

$$m_x P_x + m_y P_y + m_z P_z = 0$$

$$n_x P_x + n_y P_y + n_z P_z = 0$$

$$P_x P_x + P_y P_y + P_z P_z = 1$$

行列を用いて表現すると、

$$\begin{pmatrix} m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \\ P_x & P_y & P_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (W10)$$

面白い式ですね。連立一次方程式だとみなすとするならば、解くべきベクトルの成分が、係数行列にも含まれているのです。このような式を見るのは初めてです。（120）より

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \frac{1}{(m \times n) \cdot P} \begin{pmatrix} n \times P|_x & P \times m|_x & m \times n|_x \\ n \times P|_y & P \times m|_y & m \times n|_y \\ n \times P|_z & P \times m|_z & m \times n|_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

従って、

$$((m \times n) \cdot P) P = m \times n \quad (W11)$$

(W11)より直ちに

$$P = \pm \frac{m \times n}{|m \times n|} \quad (W12)$$

僕にとって、1見はてなと思われながら、よく考えてみれば、自明な、面白い命題があります。それを呈示しましょう。

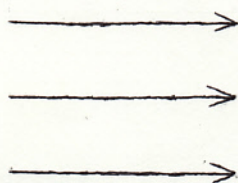
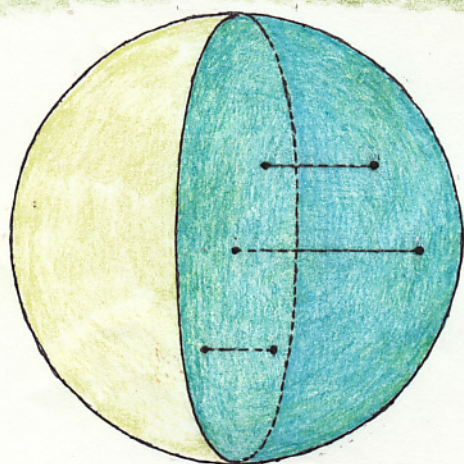


fig.193

3点を含む半球の存在

- 単位球面上の、与えられたどんな3点に対しても、これら3点全てが同時に見える方向が存在します。但し、正射影的な目で見るとすればのことです。また、単位球面は不透明であるとして。
- 正確に言えば、単位球面上の、かつて与えられたどのような3点に対しても、少なくとも1つの半球が存在し、これら3点は全てこの半球上の点である、ということです。

定理(122)

証明しましょう。単位球面上の、かつて与えられた3点を P_A, P_B, P_C とします。定理(119)より、2点 P_A, P_B を通る大円 S が少なくとも1つ存在します。定義(118)で述べたように、大円 S は単位球面を2つの半球に分割します。従って3点 P_C は少なくとも一方の半球 Hem_i 上の点です。この半

【P387】 6月9日(水) 球面3角形の定義(続き)

球Hemiが、3点 P_A, P_B, P_C を含む半球(の1つ)です。 Q.E.D.

球面3角形の定義に取り掛り(Begin)ましょう。まず、球面3角形を表現するのに必要な用語(Terms)の呈示をしよう。これらの用語の定義はあいあい行うことにします。

球面3角形を表現する用語の呈示

- 頂点: 3個の点。それぞれ、内角と呼ばれる属性を持ちます。
- 辺: 3個の曲線分。それぞれ、長さと呼ばれる属性を持ちます。
- 領域: 集合としての球面3角形。面積と呼ばれる属性を持ちます。

呈示(123)

(116)で述べたように、球面3角形は単位球面上の閉集合です。従って頂点、辺も単位球面上の点、曲線分です。

球面3角形を分類します。3個の頂点を P_A, P_B, P_C と記すことにします。球面3角形が乗っている単位球面の中心を O と記すことにします。

球面3角形の分類

- 病的な(Ill)球面3角形: $\vec{OP_A}, \vec{OP_B}, \vec{OP_C}$ が1次従属
- 健全な(Well)球面3角形: $\vec{OP_A}, \vec{OP_B}, \vec{OP_C}$ が1次独立

分類(124)

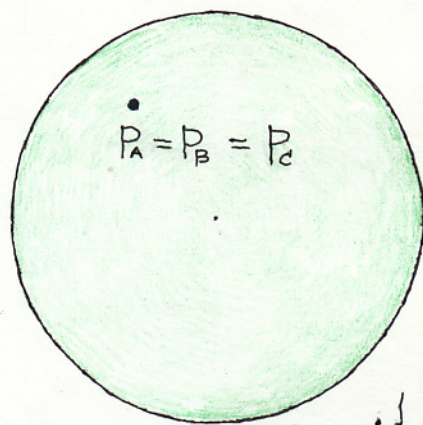
病的な球面3角形は、次の4つの範疇(Category)の組合せによって、さらに分類されます。

- 多重的: 頂点が多重(2重, 3重)的か否か。
- 縮退的: 集合として大円の弧(Arc)か(面積が0か)否か。
- 対極的: 2頂点が互いに対極点の関係にあるか否か。
- 半球的: 集合として半球であるか否か。

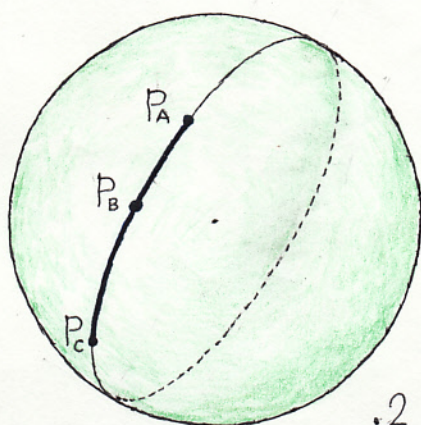
【P388】 6月11日(金) 球面3角形の定義(続き)

病的な球面3角形を、思い付く限り描いてみます。間違っ(Mistake)いるかも知れません。また、漏れ(Omission)があるかも知れません。でも問題はありません(No Problem)。これについては後述します。

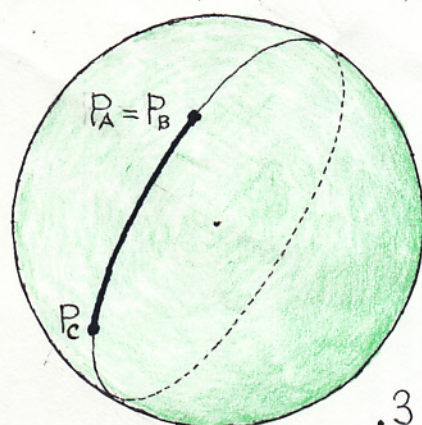
3重的(1点のみ)



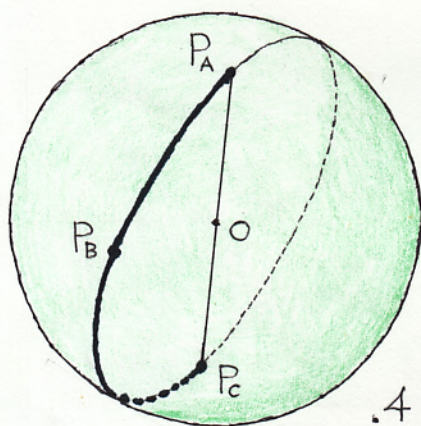
縮退的



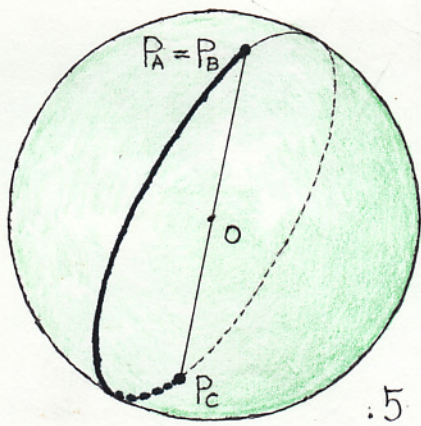
2重的 & 縮退的



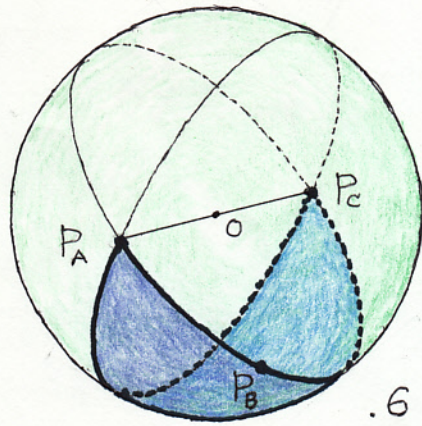
縮退的 & 対極的



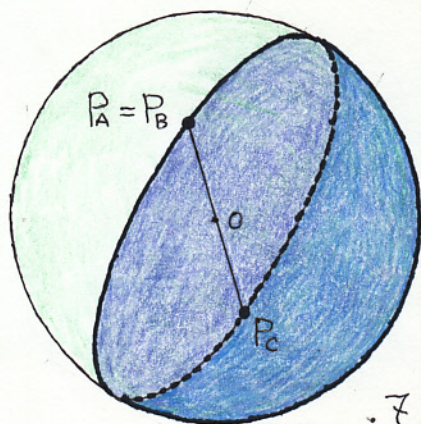
2重的 & 縮退的 & 対極的



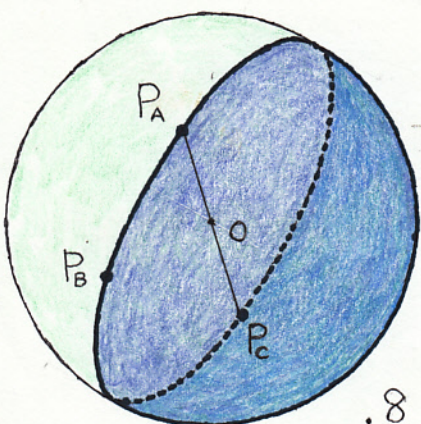
対極的



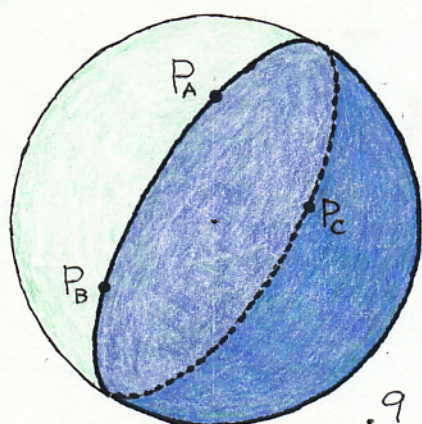
2重的 & 対極的 & 半球の



対極的 & 半球の



半球の



案の定(Sure Enough)、心配していた通り、漏れが見付かりました。
 追加作図しておきます。まだ有るかも知れないので、余白も残しておきます。
 2重的&対極的

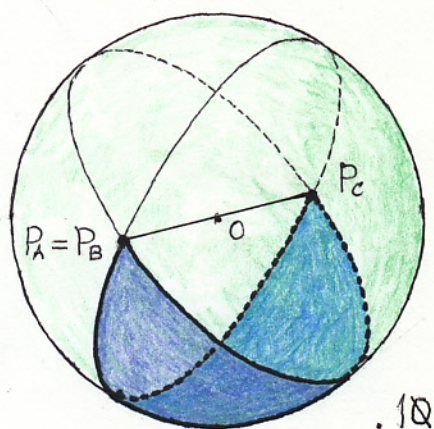


fig.195

健全,病的によらず、球面3角形の頂点 P_A, P_B, P_C における内角を、それぞれ単に A, B, C と記すことにします。また**辺は2つの頂点を2端点とする大円弧です**。それらをそれぞれ $\widehat{P_AP_B}, \widehat{P_BP_C}, \widehat{P_CP_A}$ と記すことにします。さらに、辺 $\widehat{P_AP_B}, \widehat{P_BP_C}, \widehat{P_CP_A}$ の長さをそれぞれ c, a, b と記すことにします。病的な球面3角形は下記が云えます。

病的な球面3角形の 内角と辺の長さの範囲

$$0 \leq A, B, C \leq \pi \quad .1)$$

$$0 \leq a, b, c \leq \pi \quad .2)$$

定義(125)

(125)は病的な球面3角形では、定理ではなく定義と見做すべき命題です。健全な球面3角形でも(125)と同様な命題(但し、等号は含まれません。)が成り立ちますが、健全な球面3角形の定義から得られる定理です。また、辺が大円弧であるという命題も、病的な球面3角形では

【P390】球面3角形の定義(続き)

定義の1部ですが、健全な球面3角形では証明すべき定理の1つです。

病的な球面3角形は、正にその名の通り、健全な球面3角形には無い、病的な性質を持つものが有ります。

病的な球面3角形の特性

- 3頂点が定まっても領域が定まらない場合が有ります。 .1)
- 領域が定まっても3頂点が定まらない場合が有ります。 .2)
- 3頂点と領域が定まっても内角が定まらない場合が有ります。 .3)

性質(126)

.1)は3頂点が同じで領域の異なる病的な球面3角形が無限に存在することを意味します。 .2)は領域が同じで3頂点が異なる病的な球面3角形が無限に存在することを意味します。 .3)は3頂点と領域が同じで内角が異なる病的な球面3角形が無限に存在することを意味します。問題は.3)です。かってな内角(の組)を全てとれるとする訳にはいきません。その理由は、健全な球面3角形が満たすある等式たちが病的な球面3角形でも成り立つようにすべきだからです。例えば面積を表わす等式です。 .3)の性質を持つのは多重的球面3角形です。それらの内角に対して、次のように制約条件を付与します。

多重的球面3角形の内角

- fig.194.1 3重的 : $A + B + C = \pi$.1)
- fig.194.3 2重的&縮退的 : $A + B = \pi$.2)
- fig.194.5 2重的&縮退的&対極的 : $A + B = \pi$.3)
- fig.194.7 2重的&対極的&半球形的 : $A = B = \pi$.4)
- fig.195.1 2重的&対極的 : $A + B = C$.5)

定義(127)

【P391】 6月13日(日) 球面3角形の定義(続き)

病的な球面3角形の議論はこれぐらいで十分でしょう。これまでの議論で、病的な球面3角形に関する直感的な概念 (Concept, Idea) を持って頂けたと思うからです。それだけではありません。次がいえるからです。

健全な球面3角形の極限としての病的な球面3角形

どんな病的な球面3角形も、その3つの頂点のうち、1つ(あるいは2つ)の頂点を、無限小だけ、適切な方向へ移動させることによって、健全な球面3角形にすることができます。

性質(128)

従って、病的な球面3角形を直接考察の対象にする代わりに (Substitute)、それと無限に近い (Almost Close) 健全な球面3角形を考察対象にすれば十分です。何故なら、後述予定の『球面3角法』や『球面3角形の面積』等で登場する等式たちは全て、(非負)実数 A, B, C, a, b, c たちの正則関数で表現されるはずだからです。よって、健全な球面3角形に対して成り立つ等式は、解析接続によって、そのまま病的な球面3角形に対しても成り立ちます。

健全な球面3角形の定義をしましょう。

色々な定義が可能でしょう。例えば、3つの半球の積集合として定義するとか、3つの大円弧で囲まれた領域として定義するとか、... 等々。

指針 (Guiding Principle) を設けよう。『 n 次元平行体の呈示』を思い出して下さい。そこでは、 n 次元平行体の定義を、 n 個のベクトルの集合 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ を用いて行ないましたね。『 n 次元単体の定義』はまだ行なわれていませんが、 n 次元平行体の定義に若干の (Some) 条件式を加えて行うつもりでいます。球面3角形は2次元球面単体です。

【P392】球面3角形の定義(続き)

平面ではなく球面上の単体ではあるとしても、2次元平面単体の定義と似た定義が可能なのはです。また、当主題の冒頭で、“僕には難し過ぎるので、一般の n 次元球面単体を議論する予定はない”と述べましたが、 n 次元平面単体の定義を参考にすれば、3次元、4次元、...、 n 次元球面体の定義も出来て、それらの性質を考察できる可能性が有ります。もしそうだとしたら、それだけでは有りません。無限小の n 次元球面単体として n 次元平面単体を捕えることができるので、“ n 次元球面単体法”を構築することができれば、“ n 次元平面単体法”も導出されます。当文書の主題は Simplex です。 n 次元球面単体を主題に含めないのは愚の骨張です。(Very Silly)。

記述を簡略化するため、 $\vec{OP}_A, \vec{OP}_B, \vec{OP}_C$ をそれぞれ、 P_A, P_B, P_C と記すことにします。

健全な球面3角形の定義

- 1次独立な、3つの単位ベクトルの集合 $\{P_A, P_B, P_C\}$ が与えられたとします。3点 P_A, P_B, P_C をそれぞれ球面3角形 $P_AP_BP_C$ の頂点と呼びます。
- 次式で定まる集合を、球面3角形 $P_AP_BP_C$ の領域と呼びます。

$$\left\{ P \mid \vec{OP} = \frac{V}{|V|}, V = \lambda_A P_A + \lambda_B P_B + \lambda_C P_C \right.$$

$$, 0 \leq \lambda_A \leq 1$$

$$, 0 \leq \lambda_B \leq 1$$

$$, 0 \leq \lambda_C \leq 1$$

$$, \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 1$$

} .1)

【P393】 球面三角形の定義 (続き)

- 辺 $\widehat{P_A P_B}$ を次式で定義します。辺 $\widehat{P_A P_B}$ を、2 頂点 P_A, P_B を端点とする、球面三角形 $P_A P_B P_C$ の辺と呼びます。他の 2 辺 $\widehat{P_B P_C}$, $\widehat{P_C P_A}$ も同様に定義します。

$$\widehat{P_A P_B} = \left\{ P \mid \overrightarrow{OP} = \frac{V}{|V|}, V = \lambda_A P_A + \lambda_B P_B \right. \\ \left. \begin{array}{l} , 0 \leq \lambda_A \leq 1 \\ , 0 \leq \lambda_B \leq 1 \\ , \lambda_A + \lambda_B = 1 \end{array} \right\} \quad .2)$$

- 頂点 P_A において、辺 $\widehat{P_A P_B}$, $\widehat{P_C P_A}$ が領域側に成す角を頂点 P_A の内角と呼び、 A と記すことにします。頂点 P_B の内角 B , 頂点 P_C の内角 C も同様に定義します。
- 辺 $\widehat{P_A P_B}$, $\widehat{P_B P_C}$, $\widehat{P_C P_A}$ の長さをそれぞれ c, a, b と記すことにします。

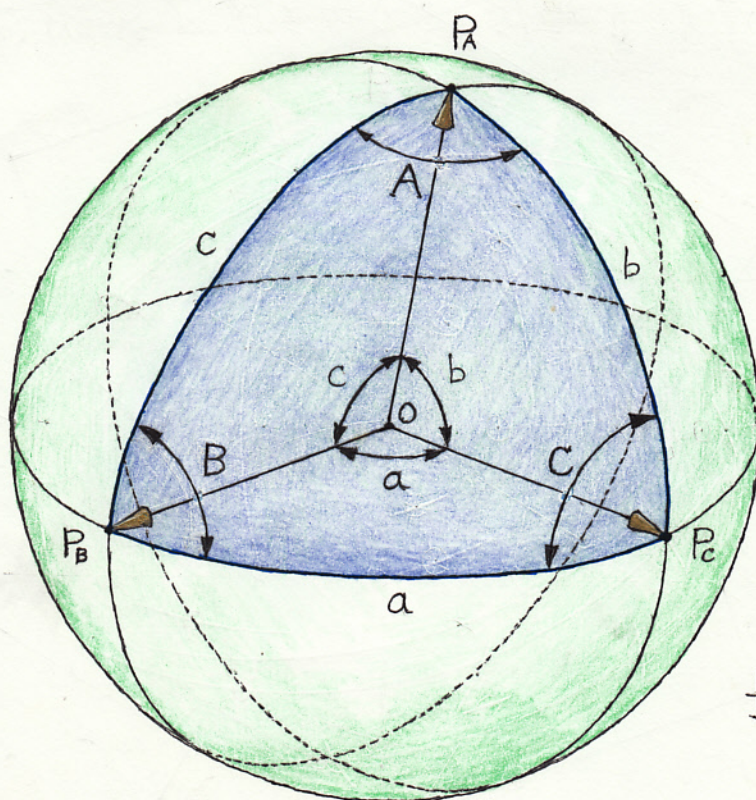


fig.196

定理(122)と似た、やはり面白い命題があります。下記です。

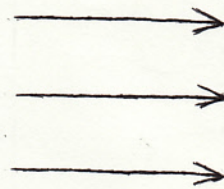
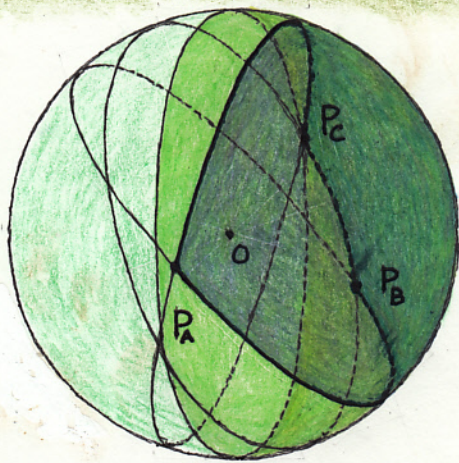


fig. 197

健全な球面3角形を含む半球の存在

- 単位球面上の、与えられたどんな健全な球面3角形に対しても、この球面3角形の領域全体が同時に見える方向が存在します。但し、正射影的な目で見るとすればのことです。また、単位球面は不透明であるとして。
- 正確に言えば、単位球面上の、かつて与えられたどのような健全な球面3角形に対しても、少なくとも1つの半球が存在し、この球面3角形の領域は全てこの半球に含まれる、ということです。

定理(130)

証明します。中心をOとする単位球面上の、かつて与えられた健全な球面3角形を $P_AP_BP_C$ とします。 P_A, P_B, P_C はこの球面3角形の頂点です。定理(122)より、3頂点 P_A, P_B, P_C 全てを含む半球が存在します。その1つをかつて選び、その半球を定める単位法ベクトルを n とします。半球自身を $Hemi(n)$ と記すことにしましょう。 $P_A, P_B, P_C \in Hemi(n)$ です。半球の定義(118.2)より、

$$P_A \cdot n \geq 0, \quad P_B \cdot n \geq 0, \quad P_C \cdot n \geq 0 \quad (W13)$$

【P395】6月16日(水)球面3角形の定義(続き)

ここで $P_A = \vec{OP}_A$, $P_B = \vec{OP}_B$, $P_C = \vec{OP}_C$ です。球面3角形 $P_A P_B P_C$ 上の任意の1点を P とします。定義(129.1)より、

$$\begin{aligned}\vec{OP} \cdot \mathbf{n} &= \frac{V}{|V|} \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{|V|} \cdot (\lambda_A P_A \cdot \mathbf{n} + \lambda_B P_B \cdot \mathbf{n} + \lambda_C P_C \cdot \mathbf{n}) \quad (W14)\end{aligned}$$

$$\lambda_A \geq 0, \lambda_B \geq 0, \lambda_C \geq 0 \quad (W15)$$

(W13), (W14), (W15)より

$$\vec{OP} \cdot \mathbf{n} \geq 0$$

従って、 $\text{Hemi}(\mathbf{n})$ の定義(118.2)より、 $P \in \text{Hemi}(\mathbf{n})$. Q.E.D.

定理(130)は、病的な球面3角形でも成り立ちます。 このことは、fig.194, fig.195, 定義(125)から、あるいは性質(128)から、直感的には自明です。証明は省略します。それは、厳密な(Exact)証明ができるほど正確な定義を病的な球面3角形に対しては与えられていないからです。ただただ、貴方の直感に訴えるのみです。

次が成り立ちます。

健全な球面3角形の性質

健全な球面3角形では(でも)、下記が成り立ちます。

- 辺は2頂点を端点とする大円弧です。 .1)
- $0 < a, b, c < \pi$.2)
- $0 < A, B, C < \pi$.3)

定理(131)

【P396】6月17日(木) 球面3角形の定義(続き)

病的な球面3角形に関しても、.1), .2), .3)に対応する命題が成り立ちましたね。P389でも言及し(Touch Upon, Mention)のように、病的な球面3角形に対応する.1), .2), .3)は定理ではなく定義の一部ですが、健全な球面3角形では、その定義から証明されるべき定理です。

まず.1)を証明します。辺 $\widehat{P_A P_B}$ について示せば十分です。辺 $\widehat{P_A P_B}$ の定義(129.2)は次のようにも表現できます。

$$\widehat{P_A P_B} = \left\{ P(\tau) \mid \begin{aligned} \vec{OP}(\tau) &= \frac{V(\tau)}{|V(\tau)|}, \quad V(\tau) = (1-\tau)P_A + \tau P_B \\ &, 0 \leq \tau \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (W16)$$

$P(\tau)$ は、 $0 \leq \tau \leq 1$ なる1つだけの連続変数 τ で一意的に定まる、単位球面上の点です。しかも

$$P(0) = P_A, \quad P(1) = P_B \quad (W17)$$

従って、 $\widehat{P_A P_B}$ は、 P_A, P_B を両端点とする、単位球面上の連続曲線です。

(129)より、 $\{P_A, P_B, P_C\}$ は1次独立ですから、 $\{P_A, P_B\}$ も1次独立です。これは、3点 O, P_A, P_B を含む2次元平面が一意的に存在することを意味します。(W16)より $P(\tau)$ はこの平面上の点です。単位球面の中心 O を通る任意の2次元平面と、単位球面の交線は大円です(証略)。以上より、 $\widehat{P_A P_B}$ は、 P_A, P_B を2端点とする大円弧です。

次に.2)を証明します。 .1) が成り立つことに留意し(Pay Attention to)しましょう。また、直ぐ後で描く予定の fig. 198 も参照して下さい。辺 $\widehat{P_A P_B}$ 上の任意の1点を $P(\tau)$ とします。 τ は(W16)の τ です。 $P(\tau)$ の対極点を $P'(\tau)$ とします。対極点の定義(117)より

$$\vec{OP'}(\tau) = -\vec{OP}(\tau) = \frac{1}{|V(\tau)|} \{(\tau-1)P_A + (-\tau)P_B\} \quad (W18)$$

$0 \leq \tau \leq 1$ ですから

$$\tau - 1 \leq 0 \quad \text{and} \quad -\tau \leq 0$$

しかも、 $\tau - 1$ と $-\tau$ が共に同時に0になることはないから

$$\tau - 1 < 0 \quad \text{or} \quad -\tau < 0 \quad (\text{W19})$$

(W18), (W19)より、 $P(\tau) \notin \widehat{P_A P_B}$ 。従って、大円弧 $\widehat{P_A P_B}$ は、互いに対極点の関係にあるどんな2点の組も含みません。大円の長さは 2π ですから、 $0 < C < \pi$ です。 a, b に関しても同様です。

最後に、3)を示します。 $0 < B < \pi$ を示せば十分です。

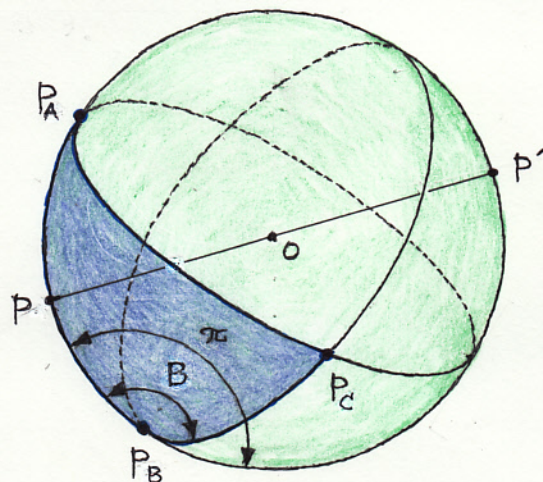


fig.198

上図は、健全な球面3角形 $P_A P_B P_C$ を含む半球のうち、辺 $\widehat{P_A P_B}$ が赤道の大円弧に見える北半球の北極点方向から正射影的に見た場合に見える絵を描いたつもりです。図より明らかな様に、 $0 < B < \pi$ です。

絵だけからは、 $B = 0$, $B = \pi$ の可能性もありますが、この場合の球面3角形 $P_A P_B P_C$ は病的な球面3角形です。 Q.E.D.

球面3角形の定義に関しては、これぐらいにしておきましょう。これから取り上げる予定の球面3角形の問題に関しては、専ら健全な球面3角形を図示することによって議論を進めることになるでしょうが、それから得られる結論は病的な球面3角形に対しても成り立つでしょう。

【P398】小休止：Here am I. (その1)

● 小休止：Here am I. (その1)

Here am I.

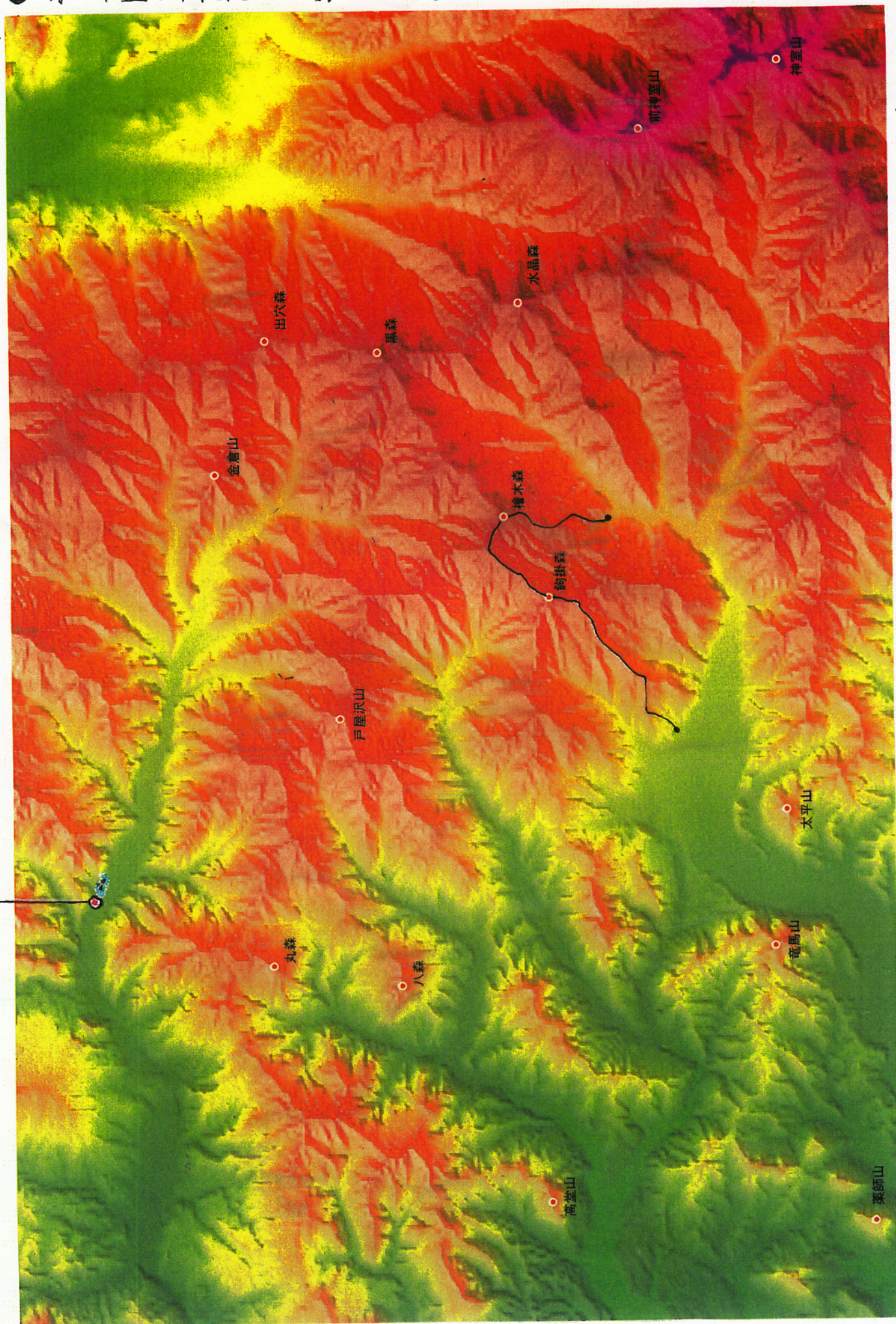


fig. 199