【P290】2021年3月17日（水）荷力曲線群の追加作図

● 荷力曲線群の追加作図

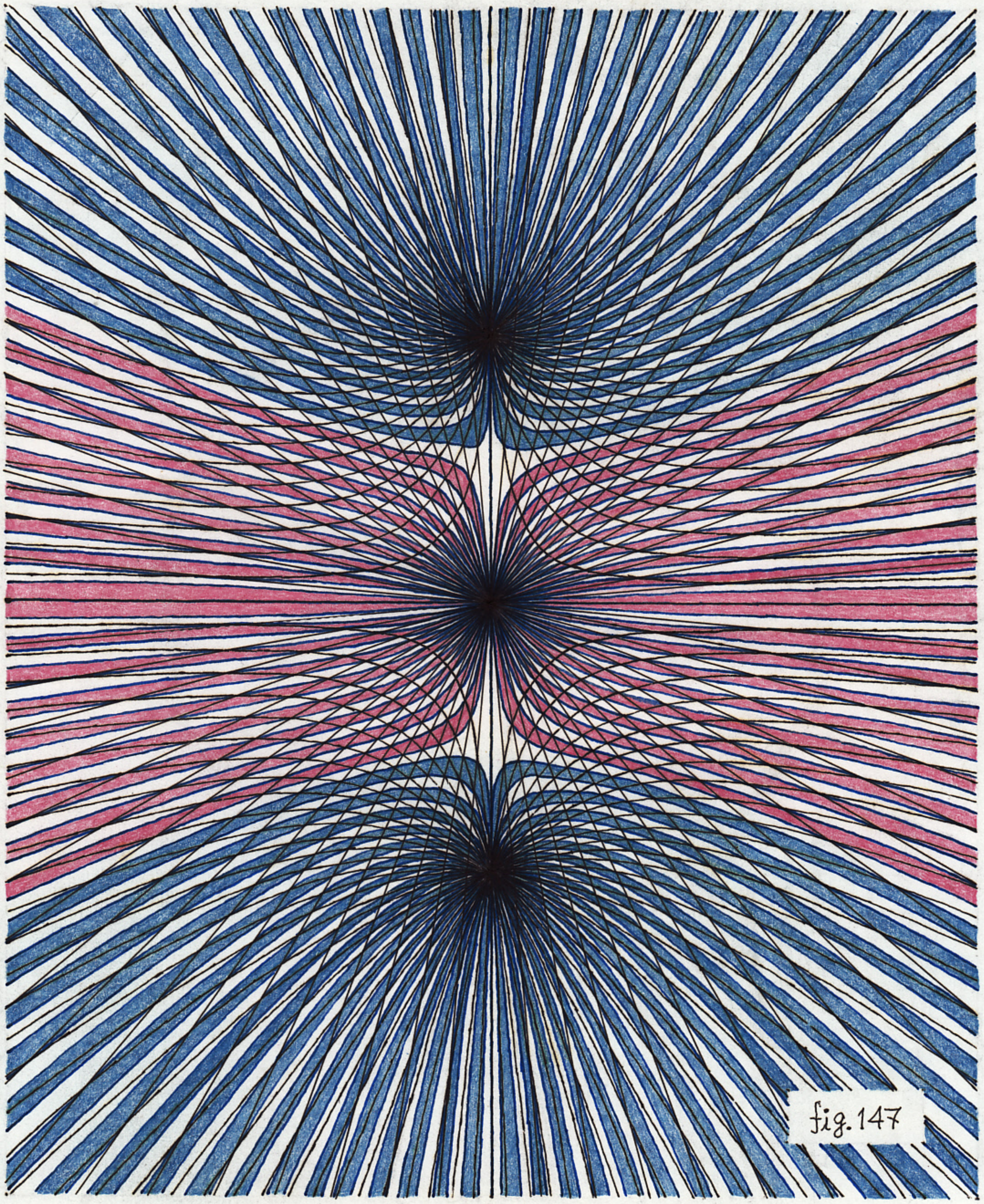


fig.147

＋72荷の3極から成る荷力曲線群です。全て中央の直線上の極で、等間隔に並んでいます。中央のあかむらさき（Magenta）色の曲線群には変曲点が有るように見えます。きれいな振鈴（Hand-Bell）ですね。

【P291】3月22日(月) 荷力曲線群の追加作図(続き)

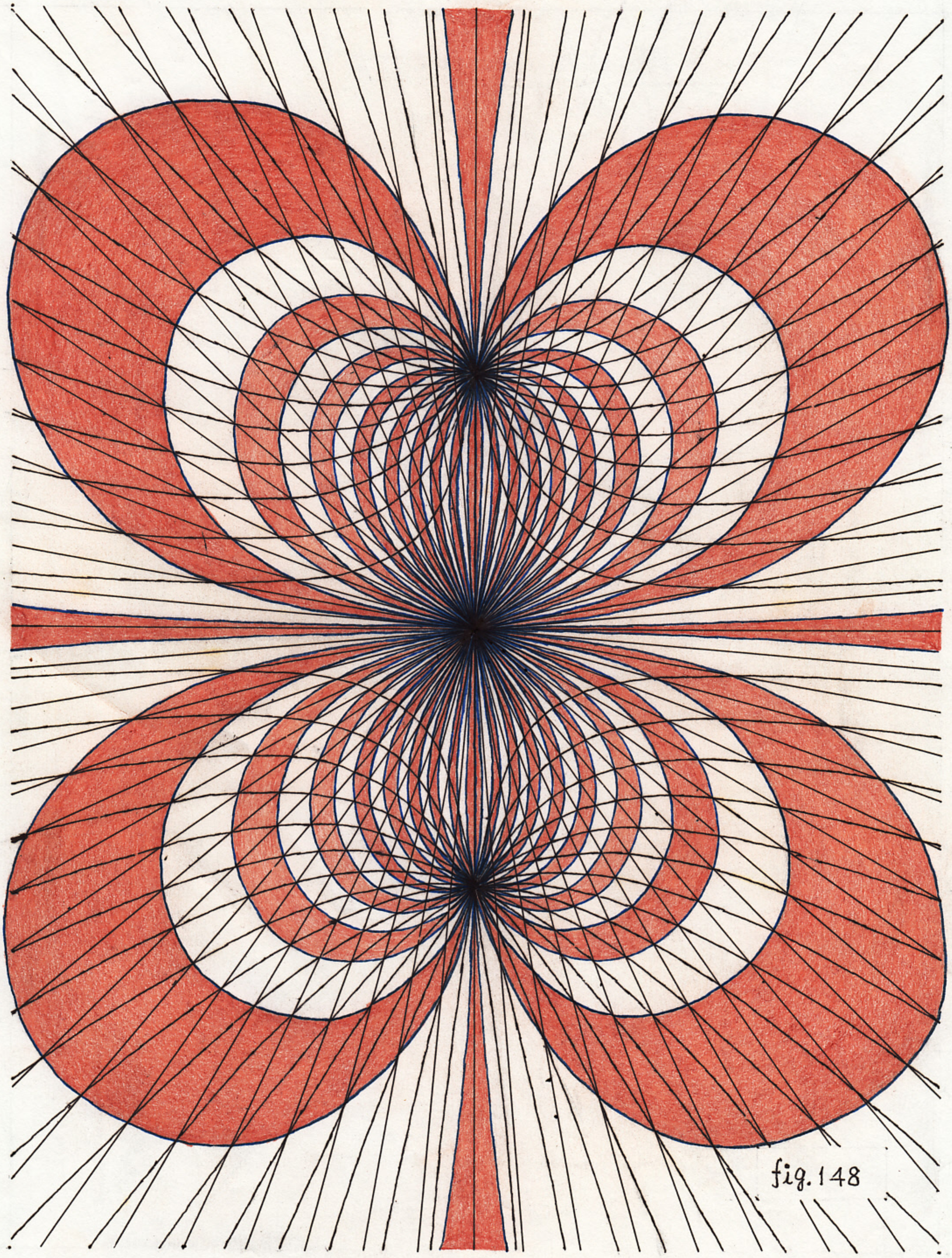
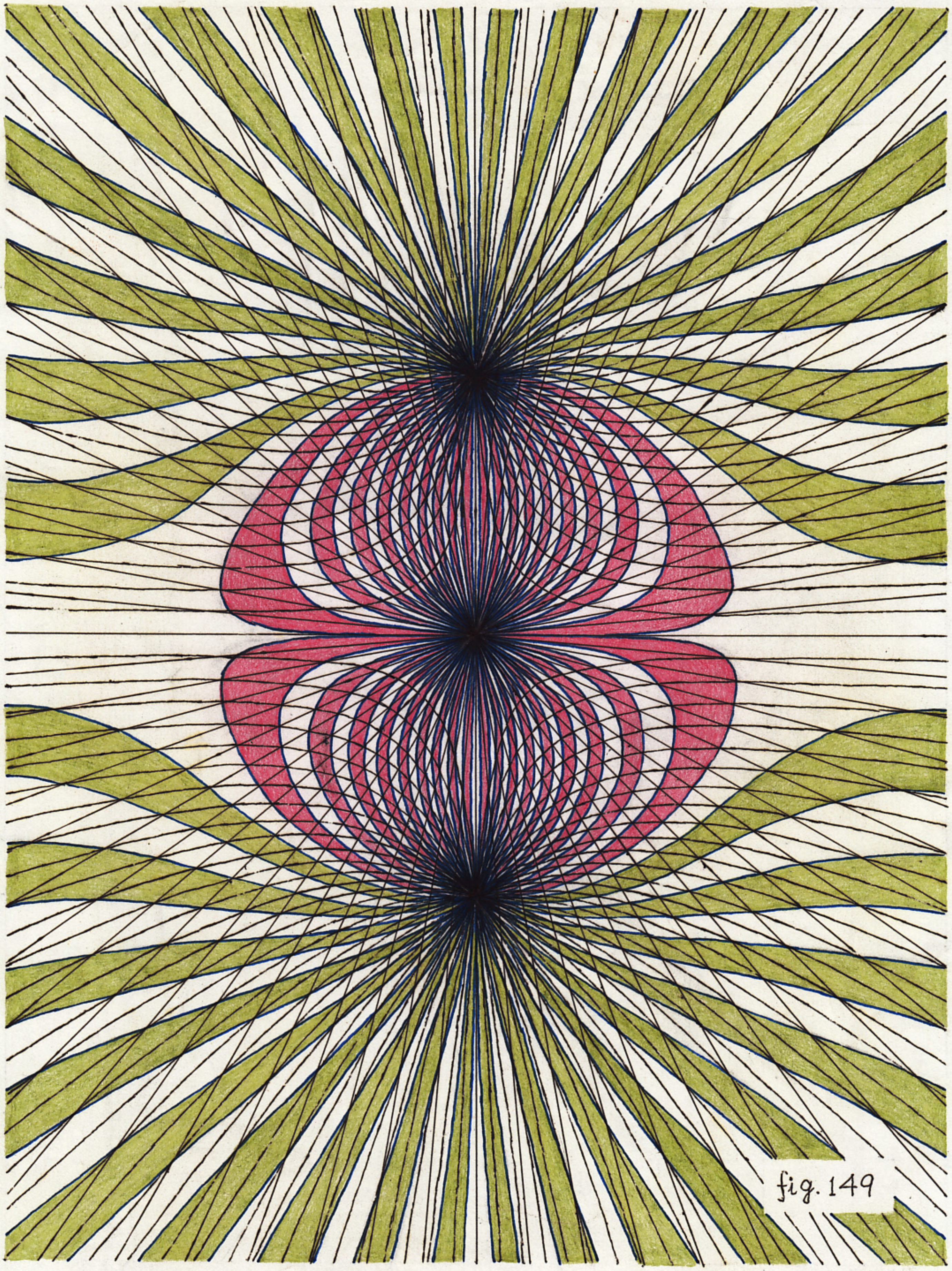


fig.148

上から順に、−36荷, ＋72荷, −36荷の3極から成る荷力曲線群です。
これらは等間隔に並んでいます。

 3月24日(水)　荷力曲線群の追加作図(続き)



上から順に、−72荷, +72荷, −72荷の3極から成る荷力曲線群です。

 3月28日（日） 荷力曲線群の追加作図（続き）

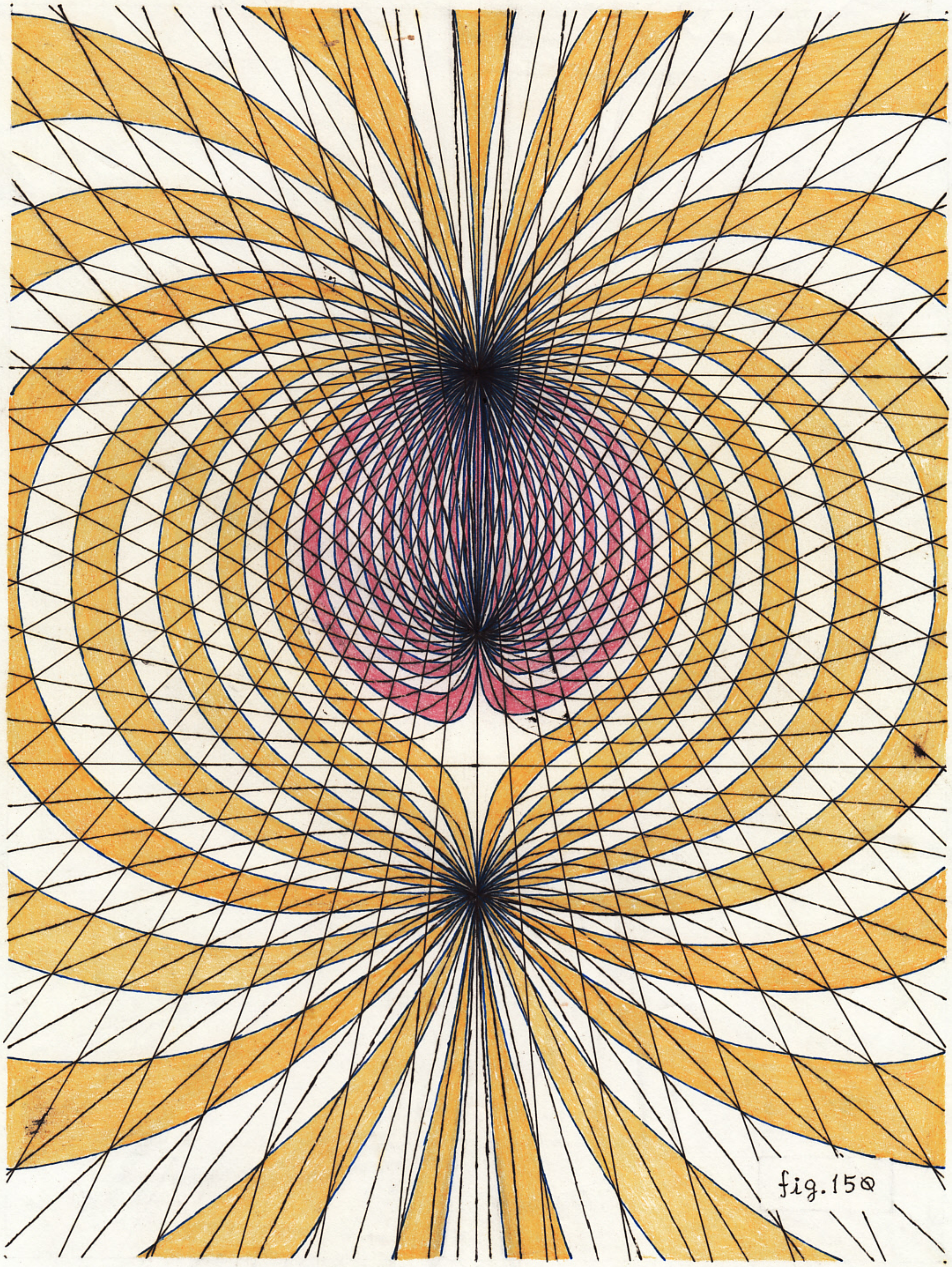
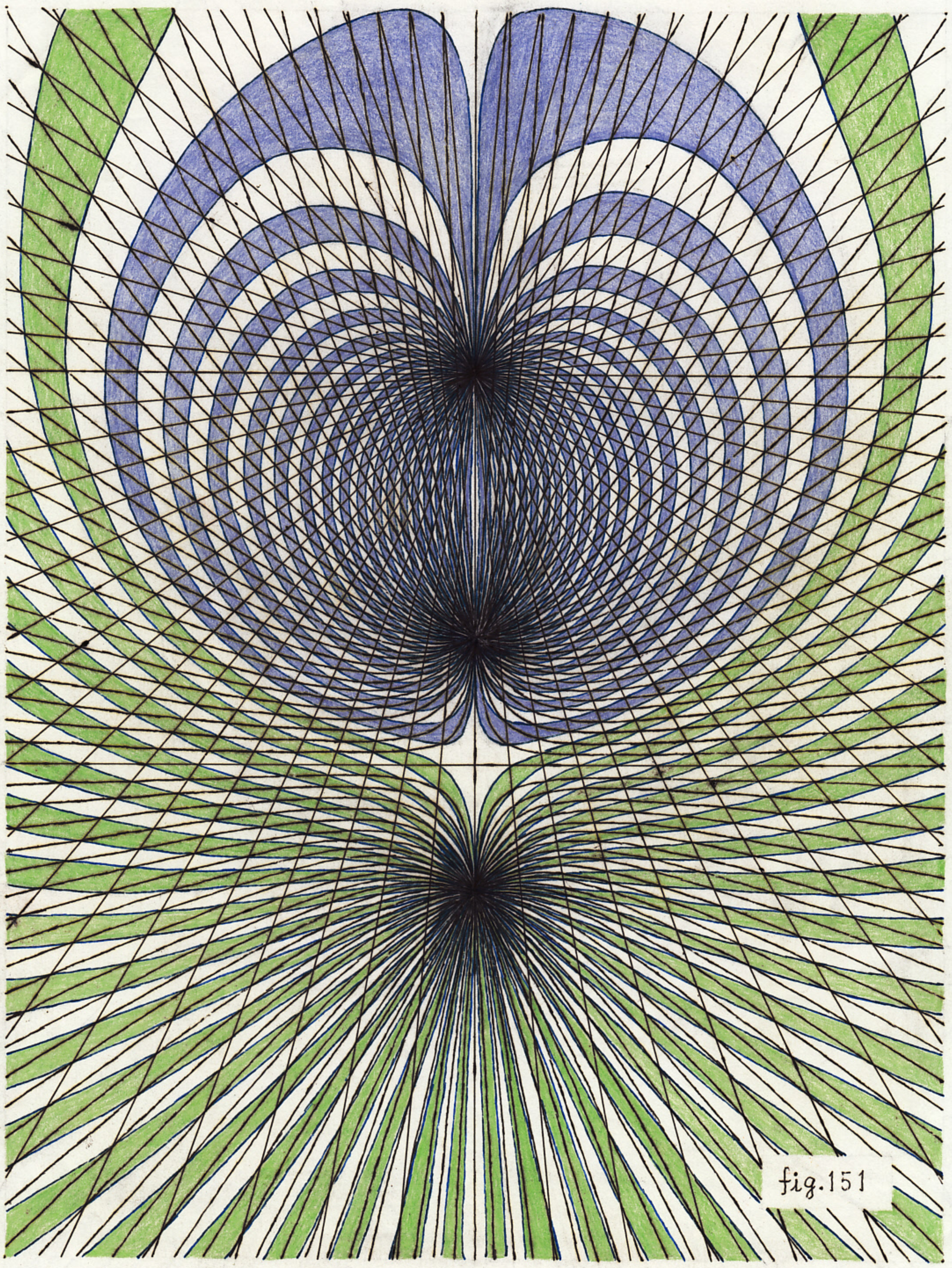


fig.150

上から順に、+72荷，−36荷，−36荷の3極から成る荷力曲線群です。

【P294】3月31日（水） 荷力曲線群の追加作図（続き）



上から順に、＋72荷，－72荷，－72荷の3極から成る荷力曲線群です。

きれいだ。青いりんごと緑のワイン・グラスだ。

● 3次元の回転と平行移動

3次元のAffine空間に、2つの正規直交座標系が与えられていて、一方が他方から見て、回転や平行移動しているとします。このとき、それぞれの座標系で表現された、同一点の座標値の関係を、具体的な変換式として求めることが、当主題の主たる目標です。

正規直交座標系に関しては既知とします。定義は省略します。まず、回転について考察しましょう。2次元や3次元の空間の場合には、回転の概念については僕も貴方もよく知っているあれのことですと云って済ますこともできると思いますが、4次元以上の空間における回転を考察する場合も考慮して、回転の定義を行うことにします。

n次元の座標系の回転の定義

n次元Affine空間に2つの正規直交座標系X, X′が存在し、X系で$\boldsymbol{x}$と成分表示される点PがX′系では$\boldsymbol{x}'$と成分表示されるとします。このとき、点Pに依存しないあるn次正方行列Rが存在し、

$$\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x} \qquad .1)$$

と表わされ、かつ下記の2つの条件を満たすとき、X′はXをRによって回転した座標系と呼び、Rをn次元の回転行列と呼びます。

$$R = \lim_{N\to\infty}\left(I + \frac{\theta}{N}M\right)^N \qquad .2)$$

ここでθは実数で、Mはθに依存しないn次正方行列です。

任意の2つのベクトル$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$に対して、$\boldsymbol{u}' = R\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}' = R\boldsymbol{v}$とするとき

$$\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} \qquad .3)$$

定義(78)

【P296】4月8日(木) 3次元の回転と平行移動(続き)

云い忘れましたが、.2)の行列Mは実行列です。つまりその全ての成分は実数です。.2)は唐突で恣意的ですらあると感じる方もいるかもしれませんが、Rの具体的な表現を求めるためには便利な式です。.2)は、鏡像変換を排除するための式でもあります。.3)を満たし、原点を不変にする変換だと鏡像変換も含まれてしまいます。.2)はまた、回転の直感的理解も与えてくれます。無限小回転を無限回繰り返せば回転が得られるということです。.3)は.2)の行列Mに対する制約を与える式としてとらえることができます。

Mがどんな行列であるかを導出する前に、次のほとんど自明な命題の呈示、証明を行う必要があるでしょう。

> 2つのn次正方行列A, Bが、任意の2つのn次元ベクトルu, vに対して、
>
> $${}^t u A v = {}^t u B v$$
>
> を満たすならば
>
> $$A = B$$
>
> である。　　　　定理(79)

証明) u, vは任意だから、次のようなu, vの場合を考えてみましょう。

$${}^t u = (0, 0, 0, \cdots, 0, \underset{i\text{番目の成分}}{1}, 0, \cdots, 0, 0)$$

$${}^t v = (0, 0, 0, \cdots, 0, \underset{j\text{番目の成分}}{1}, 0, \cdots, 0, 0)$$

【P297】 3次元の回転と平行移動（続き）

$\mathbf{u}$はi番目の成分が1で他の成分は全て0のベクトルで、$\mathbf{v}$はj番目の成分が1で他の成分は全て0のベクトルです。Kroneckerのdeltaを用いて表わすと、

$$u_k = \mathbf{u}|_k = \delta_{ki}, \qquad v_l = \mathbf{v}|_l = \delta_{lj}$$

この$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$に対して、

$$^t\mathbf{u} A \mathbf{v} = u_k A_{kl} v_l = \delta_{ki} A_{kl} \delta_{lj} = A_{ij}$$

同様に

$$^t\mathbf{u} B \mathbf{v} = B_{ij}$$

従って、$A_{ij} = B_{ij}$。 i, jの任意性より、$A = B$. Q.E.D.

（78.2）のMに対して、.3）がどんな制約を与えるのかを求めよう。無限小回転の場合に関して考察しよう。

$$R = I + \varepsilon M, \qquad \varepsilon = \frac{\theta}{N}, \quad 0 < |\varepsilon| \ll 1 \qquad \text{(W1)}$$

とすれば、.3）より、任意のn次元ベクトル$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$に対して、

$$\begin{aligned} ^t\mathbf{u} I \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}' \\ &= {}^t(R\mathbf{u}) I (R\mathbf{v}) \\ &= {}^t\mathbf{u} \, {}^tR R \mathbf{v} \\ &= {}^t\mathbf{u} (I + \varepsilon {}^tM)(I + \varepsilon M) \mathbf{v} \end{aligned}$$

従って、定理（79）より

$$I = (I + \varepsilon {}^tM)(I + \varepsilon M)$$

$$I = I + \varepsilon M + \varepsilon\, {}^tM + \varepsilon^2\, {}^tMM$$

ここで２次の微小量ε^2を無視すれば

$$Q = M + {}^tM \qquad (W2)$$

つまりMは反対称行列です。従って回転の定義（78）の.2）.3）は次のように書き換えることが出来ます。

n次元の回転行列の定義

n次の正方行列Rが次の２式を満たすとき、Rをn次の回転行列と呼びます。

$$R = \exp(\theta M) \qquad .1)$$

$${}^tM = -M \qquad .2)$$

定義（78）′

（78.2）式と上記の.1）が同値なことは、複素関数論において同様のことが云えるのと全く同じ理屈が成り立つことから明らかです。Mは M自身と可換だから、可換環の算法として複素数と同じ算法を用いることが出来るはずです。

（78）あるいは（78）′のMは、θMをMと置き換えても何ら問題がありません。このことはまだθの意味が与えられていないからです。後でθに幾何学的意味を与えるつもりですが、そのためにはMに対してある種の規格化を行うことに成ります。

（W2）の導出過程から、Rに関する興味深い恒等式が得ら

れます。次式です。

$$ {}^{t}RR = I \qquad \text{(W3)} $$

これより直ちに、

$$ R^{-1} = {}^{t}R, \qquad \det R = 1 \qquad \text{(W4)} $$

$\det({}^{t}R) = \det R$ より、(W3)からは、$(\det R)^2 = 1$ が云えるだけですから、$\det R = -1$ も有り得るのではないですか、と貴方は指摘するかも知れません。尤もな指摘です。$\det R \neq -1$ は(W3)だけからは云えないのですが、定義(78.1)′が有るからです。.1)′において $\theta = 0$ とすると $R = I$、つまり $\det R = 1$ です。パラメータ θ を連続的に変化させるならば、$\det R$ も連続的に変化します。ある θ において $\det R$ がいきなり(Suddenly) +1 から −1 に Jump するすることは有り得ません。

(W3), (W4)をまとめて定理として再記しておきましょう。

> R を n 次元の回転行列とすれば、次式が成り立つ。
>
> $$ {}^{t}RR = I, \quad R^{-1} = {}^{t}R \qquad .1) $$
>
> $$ \det R = 1 \qquad .2) $$
>
> 定理(80)

$\det R = 1$ は $\mathrm{abs}(e^{i\theta}) = 1$ を想起させます。数学的には、深い所である同じ論理が働いているのかも知れません。貴方はどう思いますか?

ここまでは一般の n 次元に関する議論でした。ここからは専ら3次元の回転に限った議論を行うことにしましょう。

3次の反対称行列 M を次のように定義します。

【P300】３次元の回転と平行移動（続き）

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(W5)}$$

このMは、『４次の反対称行列』で論じた下記のM

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(W6)}$$

から、0なる成分だけの４行，４列を削除した行列と見做すことが出来ます。（W5）のMが、（W6）のMが満たす恒等式たちから、４行，４列を削除した恒等式たちを満たすことは明らかです。従って定理（56）から直ちに下記が得られます。

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}, \quad \mu = \sqrt{\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mu}} \qquad .1)$$

$$M\boldsymbol{\mu} = 0 \qquad .2)$$

$$M^2 = -\mu^2 I + \boldsymbol{\mu}\,{}^t\boldsymbol{\mu} \qquad .3)$$

$$M^3 = -\mu^2 M \qquad .4)$$

定理（81）

定理(81)を再確認しましょう。.2)は自明です。.1)を見ながらたやすく目視検算することが出来ますね。また、.2)と.3)が成り立つならば.4)が得られることも自明です。問題は.3)だけです。M^2を直接手計算するのは容易い(Easy)ことですが、ここでは、3階の反対称単位テンソルε_{ijk}を用いて計算しましょう。

.1)で定義された3次の反対称行列Mは、実は次のようにも表現することが出来ます。

Mの才2の定義

$$M_{ij} = M|_{ij} = \varepsilon_{ijk}\mu_k \qquad \text{定義(82)}$$

上記の定義と(20.2)よりM^2は、

$$\begin{aligned} M^2|_{ij} &= M_{ik}M_{kj} \\ &= \varepsilon_{ikl}\mu_l\,\varepsilon_{kjm}\mu_m \\ &= -\varepsilon_{ilk}\,\varepsilon_{jmk}\,\mu_l\mu_m \\ &= -(\delta_{ij}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{lj})\mu_l\mu_m \\ &= -\delta_{ij}\mu_l\mu_l + \mu_i\mu_j \quad // \end{aligned}$$

3次の反対称行列が反対称単位テンソルで表わすことが出来るということは興味深いですね。『3次元のベクトル解析』でも論じた様に、外積やrot(curl)も反対称単位テンソルで表わされましたね。4次元以上の空間に関しては、反対称行列や、2項演算としての外積やrotに対応するような量を反対称単位テンソルを用いて定義することは出来ないと思われます。もしそうなら、数学(特に幾何学)

的に3次元の特殊性が見い出されたことになります。そしてもし、この特殊性が、巨視的にはこの我々の宇宙が、空間的には3次元のように見えるという物理学的事実の理由となっているとしたらとてもうれしいことです。その場合、超弦理論には未来はありません。但し、Polograph原理は生き残ると思います。これはLoop量子重力理論からも導出できる可能性があります。僕はどちらかというと、String派（School）ではなくLoop派です。でも僕は物理学者ではありません。あまり真剣にとらないで下さい。

定理(81)を満たすMを用いて(78.1)′のRを計算する前に、定義(78.2)と(81.2)から得られる重要な恒等式を示しましょう。(81.2)より

$$\left(I+\frac{\theta}{N}M\right)\mu = \mu + \frac{\theta}{N}M\mu = \mu \qquad \text{(W7)}$$

従って(78.2)より

$$R\mu = \exp\left(\theta\begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 \end{pmatrix}\right)\mu = \mu$$

定理(83)

μは回転Rで不変です。このμをRの回転軸と呼びます。μの幾何学的イメージは自明ですね。車輪（Wheel）の軸（Axis）であり、歯車（Gear）の軸です。ただし太さはありません。μをスカラー倍したベクトルは全て不変ですから、回転軸は、原点を通りμを含む直線です。但し、有向直線とします。その向はμと一致するものとします。

このように原点以外の不変量が存在するのは$\det M = 0$だからです。奇数次元の回転の場合は原点以外の不変な部分空間が存在します。偶

【P303】3次元の回転と平行移動（続き）

数次元の場合でも、$\det M$ が 0 ならば原点以外の不変部分空間が存在することになります。例えば4次元の場合には、『4次の反対称行列』に登場した $\omega = \mu \cdot w = 0$ であれば不変部分空間が存在します。一般に偶数次元の回転の場合には、その M のパッフ形式（Pfaffian）が 0 であれば $\det M = 0$ となります。Pfaffianについては主題をあらためて論じる予定です。

R を計算しよう。まず、$M^0, M^1, M^2, M^3, M^4, M^5, \cdots$ を、定理(81)を用いて列挙しよう。

$$
\begin{aligned}
M^0 &= && (-\mu^2)^0\, I \\
M^1 &= && (-\mu^2)^0\, M \\
M^2 &= && (-\mu^2)^1\, I + (-\mu^2)^0\, W, \quad W = \mu\, {}^t\mu \\
M^3 &= && (-\mu^2)^1\, M \\
M^4 &= (-\mu^2)^1\, M^2 &&= (-\mu^2)^2\, I + (-\mu^2)^1\, W \\
M^5 &= (-\mu^2)^1\, M^3 &&= (-\mu^2)^2\, M \\
M^6 &= (-\mu^2)^2\, M^2 &&= (-\mu^2)^3\, I + (-\mu^2)^2\, W \\
M^7 &= (-\mu^2)^2\, M^3 &&= (-\mu^2)^3\, M \\
M^8 &= (-\mu^2)^3\, M^2 &&= (-\mu^2)^4\, I + (-\mu^2)^3\, W \\
M^9 &= (-\mu^2)^3\, M^3 &&= (-\mu^2)^4\, M \\
M^{10} &= (-\mu^2)^4\, M^2 &&= (-\mu^2)^5\, I + (-\mu^2)^4\, W \\
M^{11} &= (-\mu^2)^4\, M^3 &&= (-\mu^2)^5\, M \\
M^{12} &= (-\mu^2)^5\, M^2 &&= (-\mu^2)^6\, I + (-\mu^2)^5\, W \\
M^{13} &= (-\mu^2)^5\, M^3 &&= (-\mu^2)^6\, M \\
M^{14} &= (-\mu^2)^6\, M^2 &&= (-\mu^2)^7\, I + (-\mu^2)^6\, W \\
M^{15} &= (-\mu^2)^6\, M^3 &&= (-\mu^2)^7\, M \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

(W6)を良く観察し(Observe)よう。次式が成り立っていることが見て取れますね。数学的帰納法で容易く証明出来ます。(証.略.)

$$M^0 = I \qquad .1)$$

$$M^{2m} = (-\mu^2)^m I + (-\mu^2)^{m-1} \mu\,{}^t\mu, \qquad (m = 1, 2, 3, 4, \cdots) \qquad ..2)$$

$$M^{2m+1} = (-\mu^2)^m M, \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \cdots) \qquad .3)$$

定理(84)

これでRを計算する準備が出来ました。Rはθと回転軸μの関数ですから$R = R_\mu(\theta)$と記すことにしましょう。もっと一般的に云えば、Rの右下に添える記号は回転軸の識別子です。後で$R_x(\theta)$, $R_Y(\theta)$, などが登場します。

$R_\mu(\theta)$をMの冪乗に展開し、和の順序を入れ換えて整理します。ちょっと長い計算になるはずですが、目視検算が出来る利点(Advantage, Merit)が有ります。和$\sum_m$のmの変域に注意して下さい。$\mu \neq 0$を仮定します。μに対しては、後ほどθの意味付けの際に、もっと強い要請が課されます。(78.1)', (84)より.

$$\begin{aligned}
R_\mu(\theta) &= \exp(\theta M) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\theta M)^k \\
&= I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} M^k \\
&= I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^{2m}}{(2m)!} M^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!} M^{2m+1} \\
&= I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^{2m}}{(2m)!} \left\{ (-\mu^2)^m I + (-\mu^2)^{m-1} \mu\,{}^t\mu \right\} \\
&\quad + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!} (-\mu^2)^m M
\end{aligned}$$

【P305】3次元の回転と平行移動(続き)

$$R_{\mu}(\theta) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m}}{(2m)!}(-1)^m \mu^{2m}\right) I + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\theta^{2m+1}}{(2m+1)!}(-1)^m \mu^{2m}\right) M$$

$$+ \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta^{2m}}{(2m)!}(-1)^{m-1} \mu^{2m-2}\right) \mu\, {}^t\mu$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}(\mu\theta)^{2m}\right) I + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(\mu\theta)^{2m+1}\right) \frac{M}{\mu}$$

$$- \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}(\mu\theta)^{2m}\right) \frac{\mu\, {}^t\mu}{\mu^2} + \frac{\mu\, {}^t\mu}{\mu^2}$$

$$R_{\mu}(\theta) = \cos(\mu\theta) I + \sin(\mu\theta)\frac{M}{\mu} + (1 - \cos(\mu\theta))\frac{\mu\, {}^t\mu}{\mu^2} \qquad (W9)$$

Rの逆行列を求めよう。I, $\mu\, {}^t\mu$ が対称行列で、Mが反対称行列で、$\cos(\mu\theta)$ が偶関数で $\sin(\mu\theta)$ が奇関数であることに注意すれば、(80.1)より、

$$R_{\mu}(\theta)^{-1} = {}^tR_{\mu}(\theta)$$

$$= \cos(-\mu\theta) I + \sin(-\mu\theta)\frac{M}{\mu} + (1 - \cos(-\mu\theta))\frac{\mu\, {}^t\mu}{\mu^2}$$

$$= R_{\mu}(-\theta) \qquad (W10)$$

(W9)に現われる、

$$\mu\theta, \quad \frac{M}{\mu}, \quad \frac{\mu\, {}^t\mu}{\mu^2}$$

の意味について良く考えよう。M と $\frac{M}{\mu}$、$\mu\theta$ と θ の位置付けに注意すれば、

$$\frac{\mu}{\mu} \to \mu, \quad \text{つまり} \quad \mu = \sqrt{\mu\, {}^t\mu} = 1 \qquad (W11)$$

とするならば(W9)は下記のようにSimpleになります。

$$R_{\mu}(\theta) = \cos\theta\, I + \sin\theta\, M + (1 - \cos\theta)\, \mu\, {}^t\mu \qquad (W12)$$

【P306】4月12日(月) 3次元の回転と平行移動(続き)

(W11) $\mu=1$ は 回転行列R に新たな制約 (Restrictin) を導入したと云う事では有りません。元々、

$$R = \exp(\theta M)$$

なる表現に有った、θ と M の不定性，非一意性 (Indfiniteness) に、$\mu=1$ なる M を選ぶ事によってけりをつけ (Settle) たまでの事です。

(W12) に $\theta=\pi$, $\theta=2\pi$ を代入すれば

$$R_\mu(\pi) = -I + 2\mu\,{}^t\mu \neq I, \quad R_\mu(2\pi) = I \qquad \text{(W13)}$$

これで θ の意味付けが出来ましたね。この θ を R の回転角と呼びます。

(W11), (82), (78.1), (W9), (W10), (W13) をまとめて再記しておきましょう。

$$\mu = {}^t(\mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad \mu = \sqrt{\mu\cdot\mu} = 1 \qquad .1)$$

$$M|_{ij} = \varepsilon_{ijk}\mu_k \qquad .2)$$

$$R_\mu(\theta) = \exp(\theta M) \qquad .3)$$

$$R_\mu(\theta) = \cos(\mu\theta)I + \sin(\mu\theta)\frac{M}{\mu} + (1-\cos(\mu\theta))\frac{\mu\,{}^t\mu}{\mu^2} \qquad .4)$$

$$R_\mu(\theta) = \cos\theta\, I + \sin\theta\, M + (1-\cos\theta)\mu\,{}^t\mu \qquad .5)$$

$$R_\mu^{-1}(\theta) = R_\mu(-\theta) \qquad .6)$$

$$R_\mu(\pi) \neq I, \qquad R_\mu(2\pi) = I \qquad .7)$$

定理(85)

.4) は .5) よりも多くの情報を含みます。$\mu=1/2$ としたら θ はどんな意味を持つことに成るのでしょうか？ .4) は捨て難い式です。ですから併記しました。

【P307】 3次元の回転と平行移動（続き）

.5) の $R_\mu(\theta)$ の各成分を具体的に書き下しておきましょう。

$$R_\mu(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta + \mu_1^2(1-\cos\theta) & \mu_3\sin\theta + \mu_1\mu_2(1-\cos\theta) & -\mu_2\sin\theta + \mu_1\mu_3(1-\cos\theta) \\ -\mu_3\sin\theta + \mu_2\mu_1(1-\cos\theta) & \cos\theta + \mu_2^2(1-\cos\theta) & \mu_1\sin\theta + \mu_2\mu_3(1-\cos\theta) \\ \mu_2\sin\theta + \mu_3\mu_1(1-\cos\theta) & -\mu_1\sin\theta + \mu_3\mu_2(1-\cos\theta) & \cos\theta + \mu_3^2(1-\cos\theta) \end{pmatrix} \quad .1)$$

$$R_\mu(\theta)\big|_{ij} = \cos\theta\,\delta_{ij} + \sin\theta\,\varepsilon_{ijk}\mu_k + (1-\cos\theta)\mu_i\mu_j \quad .2)$$

定理(86)

特に、

${}^t\mu = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ に対する R_μ をそれぞれ R_X, R_Y, R_Z とおけば、

$$R_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad .1) \qquad R_Y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \quad .2)$$

$$R_Z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .3)$$

定理(87)

$R_Z(\theta)$ を作図で確認しましょう。

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R_Z(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ -x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix} \tag{W13}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の場合の作図をします。

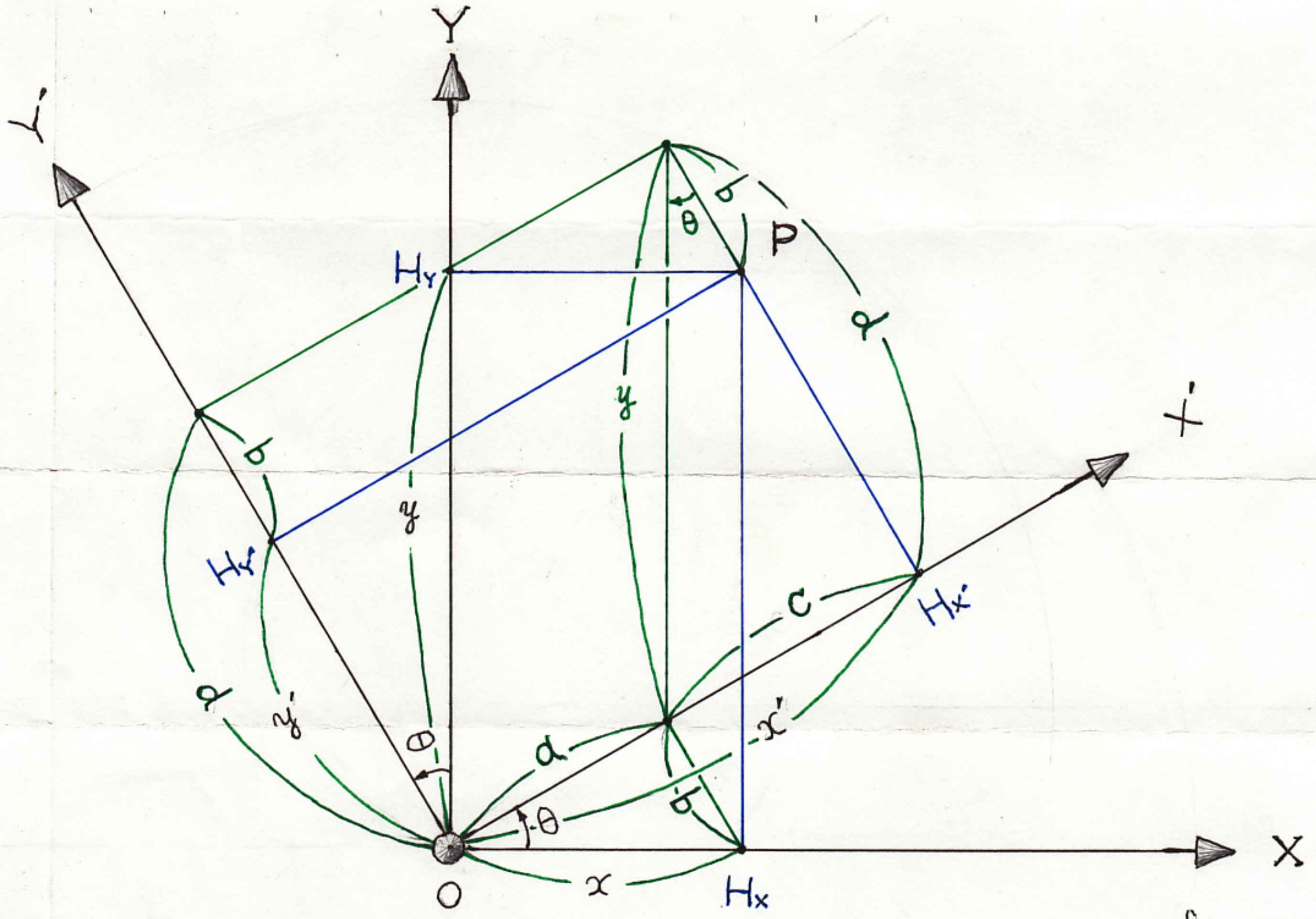


fig.152

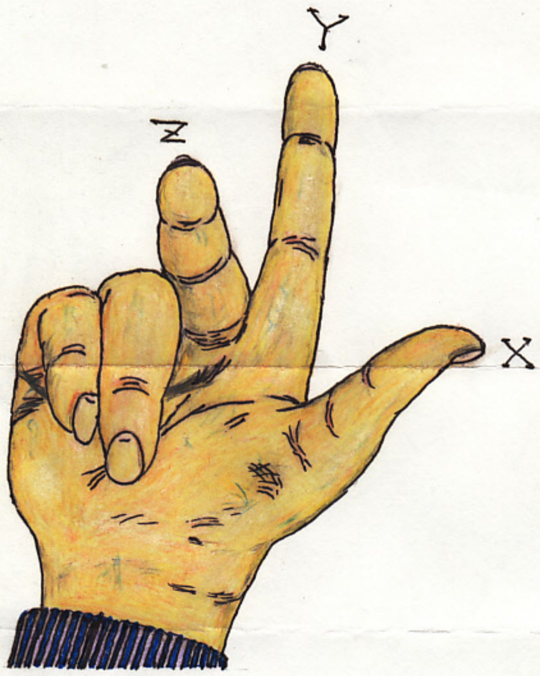
$$x' = a + c, \quad y' = d - b$$

$$a = x\cos\theta, \quad b = x\sin\theta, \quad c = y\sin\theta, \quad d = y\cos\theta \tag{W14}$$

説明は必要無いでしょう。Z軸は紙面に垂直で貴方の方に向っています。

【P329】3次元の回転と平行移動（続き）

fig.152から分るように、3次元の正規直行座標の回転$R_{\mu}(\theta)$は、座標系を右手系の座標系とするとき、回転軸μの方向を向いた右螺旋（Screw）を締めるときの、螺旋の回転方向に回転角θだけ回転させる回転変換と解釈することが出来ます。



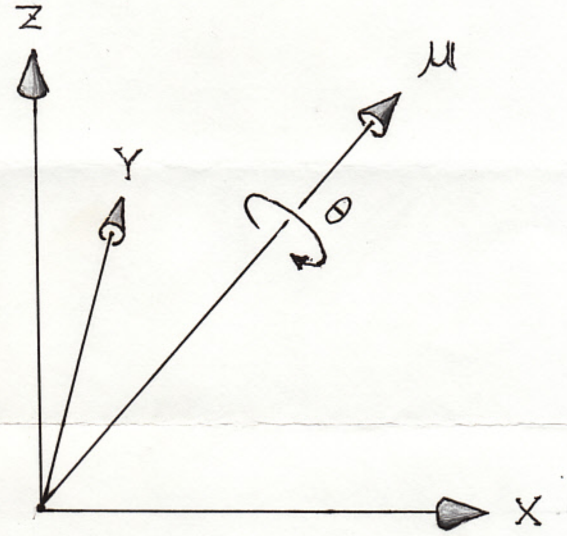


fig.153

僕は右利です。左の絵は、まず左手にポーズ（Pose）をとらせながら右手で模写し、さらに裏返して透かして擦ったものを書き写したものです。鏡像変換ですね。　3次元の回転についてはこれぐらいにしておきましょう。

3次元の正規直交座標系の平行移動について考際しましょう。

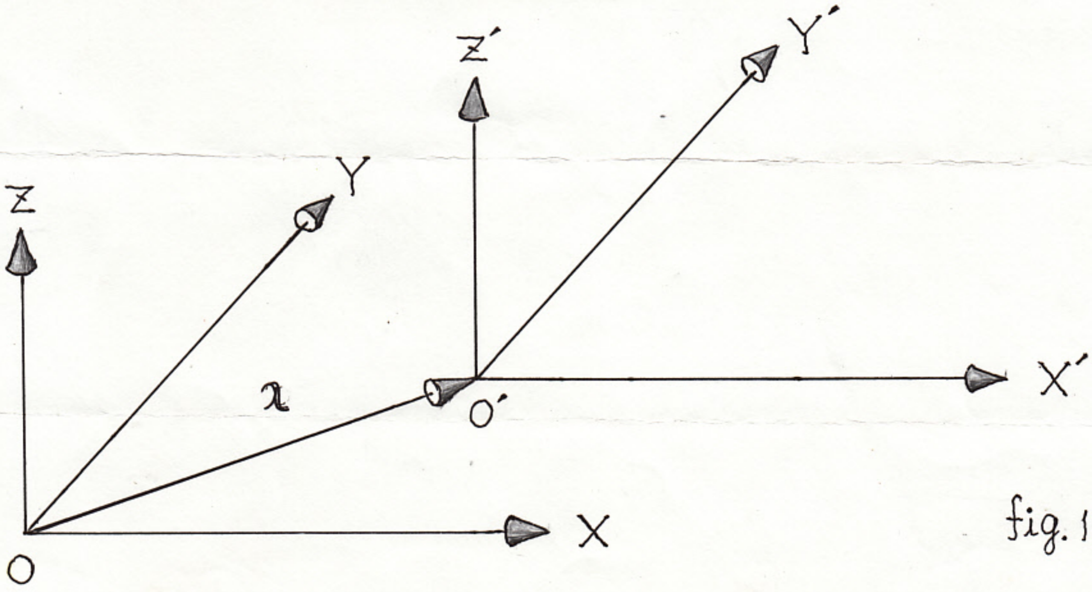


fig.154

【P310】4月14日(水) 3次元の回転と平行移動(続き)

平行移動については、fig.154で語り尽していると云えますね。fig.154のλを平行移動ベクトルと呼ぶことにしましょう。式で表わせば、${}^t\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$とおけば

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \lambda_1 \\ y - \lambda_2 \\ z - \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad \text{(W15)}$$

ここでλはx, y, zに依存しないベクトルとします。それだけ。

僕が当主題で回転だけでなく平行移動も同時に考察しようとしたのには訳が有ります。回転と平行移動を同じ土俵で論じたいと思ったからです。つまり平行移動も行列で表現したいからです。3次の正方行列では表現出来そうも有りませんね。でも4次の行列を用いるならば、それが可能なのです。3次元の回転は、4次元空間上のある3次元超平面上の変換と見做すことが出来ます。例えば、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} & & \\ & R_\mu(\theta) & \\ & & \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\mu(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(W16)}$$

上式の行列の4行4列の成分が1であることは必須(Essential, Necessary)です。上式の3つのベクトルの才4成分が全て1であることに注意しましょう。この事は必須ではありません。全て同じ値、例えば、回転のμ, θに依存しないνであれば良い事は明らかです。$\nu = 1$としたのは、平行移動の場合を考慮し(Consider)したからです。$\nu = 1$とすれば平行移動の行列がSimpleになるのです。この事は回転の議論で$\mu = 1$としたのと同様の事情(Reasons)です。

実際、$\nu=1$ を選ぶ事で、平行移動ベクトル λ に、原点を λ だけ平行移動させるベクトルという意味が与えられることに成るのです。

(W16)は、4次元空間上の、才4成分が1なる3次元超平面上の回転を表わしています。3次元の平行移動も同一超平面上の1次の同次変換として表現出来ます。その行列を $P(\lambda)$ と記すことにしましょう。PはParallelのPです。PointのPでは有りません。前に定義(78)や fig. 152 でPointを示すPを用いたので混乱し(Confuse)するといけないので指摘しました。悪しからず。$P(\lambda)$ は次式で定義されます。

3次元の平行移動の定義

$$\lambda = {}^t(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad P(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad .1)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = P(\lambda)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \lambda_1 \\ y - \lambda_2 \\ z - \lambda_3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad .2)$$

$$P^{-1}(\lambda) = P(-\lambda), \quad P(\lambda_a)P(\lambda_b) = P(\lambda_a + \lambda_2) \qquad .3)$$

定理(88)

(88)は定義+αです。.3)は定義から直ちに得られる命題です。平行移動の行列表現は $n \neq 3$ の任意の n に対しても同様に行うことが出来ることは自明ですね。行列表現は回転と平行移動が混在する問題を解くのに有用です。後で応用例を示す予定です。

【P312】2021年4月15日(木) 小休止：Adam's Brain

● 小休止：Adam's Brain

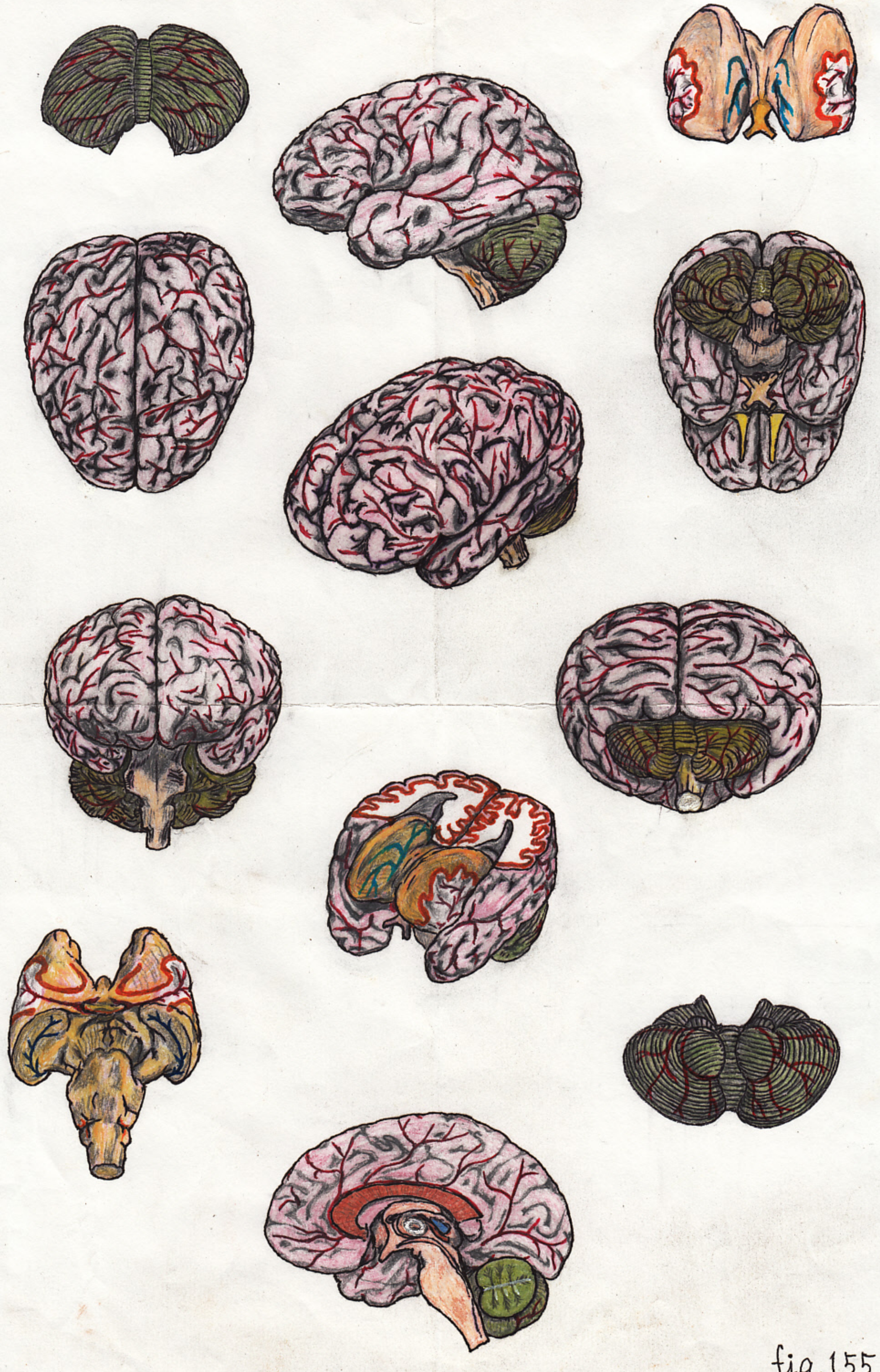


fig.155