● 5次の反対称行列

5次の反対称行列に関連する諸恒等式を導出しましょう。この際、やはり『Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理』で論じた一切を知らない振りをしましょう。その目的，理由は『4次の反対称行列』の場合と同様です。

5次の反対称行列の自由度は

$$1+2+3+4=10=2\cdot 5$$

ですから、5次元ベクトル2個で表現するのが自然だと思います。但し、これは主観の問題です。行列の成分表示 A_{ij} をそのまま用いても数学的には同じことです。ですから2つの5次元ベクトルを行と列にどう割り当てるかも主観の問題と云えます。6次の反対称行列の自由度は

$$1+2+3+4+5=15=3\times 5$$

ですから、5次元ベクトル3個で表現することが出来ることに注目しましょう。この場合4次の反対称行列の場合にそうしたように

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 5\text{次の} \\ \text{反対称行列} \\ (\alpha,\beta) \end{matrix}} & \begin{matrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{matrix} \\ -\gamma_1\ -\gamma_2\ -\gamma_3\ -\gamma_4\ -\gamma_5 & 0 \end{pmatrix}$$

fig. 135

とするのが自然です。このことに留意しておきましょう　2つの5次元ベクトルをどう割り当てるか？ 3つの問題があります。

> - ベクトルのラベルの配置パタン : L. Ptn.
> - ベクトルの添字の配置パタン : I. Ptn.
> - ベクトルの符号の配置パタン : S. Ptn.
>
> (W1)

これらのパタンは、それぞれたいへんな個数の組み合わせがあります。何らかの(主観的な)規約(Rule)を定める必要があります。ラベルとしてB, Cを用いることにします。添字は{1, 2, 3, 4, 5}です。符号は{+1, -1}です。

【P198】 5次の反対称行列（続き）

まず、L.Ptn. に関して、次のような規約を設けることにします。

L.Ptn. Rule（その1）

- 右上端（1行5列）のラベルをBに固定する。 .1)
- どの行にもBとCを同数（=2個）づつ配置する。 .2)
- どの列にもBとCを同数（=2個）づつ配置する。 .3)
- 対称的であること、つまり i行 j列のラベルは、j行 i列のラベルと等しく配置する。 .4)

規約（W2）

.1) と .4) は当然なことです。真の規約となるのは .2) と .3) です。これらを満たす L.Ptn. は下記の6パタンだけです。ちょっとしたパズル（Puzzle）ですね。

L.Ptn.1

	B	C	C	B
B		B	C	C
C	B		B	C
C	C	B		B
B	C	C	B	

L.Ptn.2

	B	C	C	B
B		C	B	C
C	C		B	B
C	B	B		C
B	C	B	C	

L.Ptn.3

	C	B	C	B
C		B	B	C
B	B		C	C
C	B	C		B
B	C	C	B	

L.Ptn.4

	C	B	C	B
C		C	B	B
B	C		B	C
C	B	B		C
B	B	C	C	

L.Ptn.5

	C	C	B	B
C		B	B	C
C	B		C	B
B	B	C		C
B	C	B	C	

L.Ptn.6

	C	C	B	B
C		B	C	B
C	B		B	C
B	C	B		C
B	B	C	C	

fig. 136

Hint. ○ で囲んだラベルが与えられたとしたら、他のラベルは全て、L.Ptn. Rule によって、一意的に定まります。貴方も確認して下さい。

【P199】12月14日（月）5次の反対称行列（続き）

次に、I. Ptn. に関しては、下記のような規約を設けることにしましょう。

I. Ptn. Rule

- i 行には i 以外の添字を配置する。 .1)
- j 列には j 以外の添字を配置する。 .2)
- 同一行の添字は全て異なるように配置する。 .3)
- 同一列の添字は全て異なるように配置する。 .4)
- 対称的であること、つまり i 行 j 列の添字は、j 行 i 列の添字と等しく配置する。 .5)

規約(W3)

.5 は当然です。.3) と .4)、及び 6 次の反対称行列に関する fig. 135 を要請するならば、.1), .2) となります。これらを満たす I. Ptn. は下記の 6 パタンだけです。これも Puzzle ですね。

I. Ptn. 1

	4	2	5	3
4		5	3	1
2	5		1	4
5	3	1		2
3	1	4	2	

I. Ptn. 2

	3	5	2	4
3		4	5	1
5	4		1	2
2	5	1		3
4	1	2	3	

I. Ptn. 3

	3	4	5	2
3		5	1	4
4	5		2	1
5	1	2		3
2	4	1	3	

I. Ptn. 4

	5	2	3	4
5		4	1	3
2	4		5	1
3	1	5		2
4	3	1	2	

I. Ptn. 5

	4	5	3	2
4		1	5	3
5	1		2	4
3	5	2		1
2	3	4	1	

I. Ptn. 6

	5	4	2	3
5		1	3	4
4	1		5	2
2	3	5		1
3	4	2	1	

fig. 137

【P200】5次の反対称行列（続き）

Hint. L.Ptn.と同様に、●で囲んだ添字が与えられたとしたら、他の添字は全て、I.Ptn.Ruleによって、一意的に定まります。見掛けによらず難しい数独(Num.Ple.)です。貴方も挑戦してみて下さい。6個のI.Ptn.を良く観察すると、共通の性質が見出されます。どのI.Ptn.にも、どの添字も調度4個づつ出現します。そうでなければ使えません。でもこのことは、I.Ptn.Ruleで要請した訳では無いのです。面白いですね。何故でしょうか？

6個のL.Ptn.と6個のI.Ptn.を重ね合わせてみましょう。全部で36個のパタンが存在します。その中には使えるパタンと使えないパタンが有るでしょう。使えないパタンとは、$B_1, B_2, \cdots, B_5, C_1, C_2, \cdots, C_5$のどれかが出現しないパタンです。これを**NG.**とします。全てが出現するパタンを**OK.**とします。やってみましょう。

L.Ptn.1 &

fig.138.1

L.Ptn.1 & I.Ptn.1 ➡ **OK.**

	B_4	C_2	C_5	B_3
B_4		B_5	C_3	C_1
C_2	B_5		B_1	C_4
C_5	C_3	B_1		B_2
B_3	C_1	C_4	B_2	

L.Ptn.1 & I.Ptn.2 ➡ **NG.**

	B_3	C_5	C_2	B_4
B_3		B_4	C_5	C_1
C_5	B_4		B_1	C_2
C_2	C_5	B_1		B_3
B_4	C_1	C_2	B_3	

L.Ptn.1 & I.Ptn.3 ➡ **NG.**

	B_3	C_4	C_5	B_2
B_3		B_5	C_1	C_4
C_4	B_5		B_2	C_1
C_5	C_1	B_2		B_3
B_2	C_4	C_1	B_3	

L.Ptn.1 & I.Ptn.4 ➡ **NG.**

	B_5	C_2	C_3	B_4
B_5		B_4	C_1	C_3
C_2	B_4		B_5	C_1
C_3	C_1	B_5		B_2
B_4	C_3	C_1	B_2	

L.Ptn.1 & I.Ptn.5 ➡ **NG.**

	B_4	C_5	C_3	B_2
B_4		B_1	C_5	C_3
C_5	B_1		B_2	C_4
C_3	C_5	B_2		B_1
B_2	C_3	C_4	B_1	

L.Ptn.1 & I.Ptn.6 ➡ **NG.**

	B_5	C_4	C_2	B_3
B_5		B_1	C_3	C_4
C_4	B_1		B_5	C_2
C_2	C_3	B_5		B_1
B_3	C_4	C_2	B_1	

L.Ptn.2 &

fig.138.2

【P201】12月15日(火)5次の反対称行列(続き)

L.Ptn.2 & I.Ptn.1 → NG.

	B_4	C_2	C_5	B_3
B_4		C_5	B_3	C_1
C_2	C_5		B_1	B_4
C_5	B_3	B_1		C_2
B_3	C_1	B_4	C_2	

L.Ptn.2 & I.Ptn.2 → OK.

	B_3	C_5	C_2	B_4
B_3		C_4	B_5	C_1
C_5	C_4		B_1	B_2
C_2	B_5	B_1		C_3
B_4	C_1	B_2	C_3	

L.Ptn.2 & I.Ptn.3 → NG.

	B_3	C_4	C_5	B_2
B_3		C_5	B_1	C_4
C_4	C_5		B_2	B_1
C_5	B_1	B_2		C_3
B_2	C_4	B_1	C_3	

L.Ptn.2 & I.Ptn.4 → NG.

	B_5	C_2	C_3	B_4
B_5		C_4	B_1	C_3
C_2	C_4		B_5	B_1
C_3	B_1	B_5		C_2
B_4	C_3	B_1	C_2	

L.Ptn.2 & I.Ptn.5 → NG.

	B_4	C_5	C_3	B_2
B_4		C_1	B_5	C_3
C_5	C_1		B_2	B_4
C_3	B_5	B_2		C_1
B_2	C_3	B_4	C_1	

L.Ptn.2 & I.Ptn.6 → NG.

	B_5	C_4	C_2	B_3
B_5		C_1	B_3	C_4
C_4	C_1		B_5	B_2
C_2	B_3	B_5		C_1
B_3	C_4	B_2	C_1	

L.Ptn.3 &

fig.138.3

L.Ptn.3 & I.Ptn.1 → NG.

	C_4	B_2	C_5	B_3
C_4		B_5	B_3	C_1
B_2	B_5		C_1	C_4
C_5	B_3	C_1		B_2
B_3	C_1	C_4	B_2	

L.Ptn.3 & I.Ptn.2 → NG.

	C_3	B_5	C_2	B_4
C_3		B_4	B_5	C_1
B_5	B_4		C_1	C_2
C_2	B_5	C_1		B_3
B_4	C_1	C_2	B_3	

L.Ptn.3 & I.Ptn.3 → OK.

	C_3	B_4	C_5	B_2
C_3		B_5	B_1	C_4
B_4	B_5		C_2	C_1
C_5	B_1	C_2		B_3
B_2	C_4	C_1	B_3	

L.Ptn.3 & I.Ptn.4 → NG.

	C_5	B_2	C_3	B_4
C_5		B_4	B_1	C_3
B_2	B_4		C_5	C_1
C_3	B_1	C_5		B_2
B_4	C_3	C_1	B_2	

L.Ptn.3 & I.Ptn.5 → NG.

	C_4	B_5	C_3	B_2
C_4		B_1	B_5	C_3
B_5	B_1		C_2	C_4
C_3	B_5	C_2		B_1
B_2	C_3	C_4	B_1	

L.Ptn.3 & I.Ptn.6 → NG.

	C_5	B_4	C_2	B_3
C_5		B_1	B_3	C_4
B_4	B_1		C_5	C_2
C_2	B_3	C_5		B_1
B_3	C_4	C_2	B_1	

【P202】5次の反対称行列（続き）

L.Ptn.4 &

fig. 138.4

L.Ptn.4 & I.Ptn.1 ➡ NG.

	C_4	B_2	C_5	B_3
C_4		C_5	B_3	B_1
B_2	C_5		B_1	C_4
C_5	B_3	B_1		C_2
B_3	B_1	C_4	C_2	

L.Ptn.4 & I.Ptn.2 ➡ NG.

	C_3	B_5	C_2	B_4
C_3		C_4	B_5	B_1
B_5	C_4		B_1	C_2
C_2	B_5	B_1		C_3
B_4	B_1	C_2	C_3	

L.Ptn.4 & I.Ptn.3 ➡ NG.

	C_3	B_4	C_5	B_2
C_3		C_5	B_1	B_4
B_4	C_5		B_2	C_1
C_5	B_1	B_2		C_3
B_2	B_4	C_1	C_3	

L.Ptn.4 & I.Ptn.4 ➡ OK.

	C_5	B_2	C_3	B_4
C_5		C_4	B_1	B_3
B_2	C_4		B_5	C_1
C_3	B_1	B_5		C_2
B_4	B_3	C_1	C_2	

L.Ptn.4 & I.Ptn.5 ➡ NG.

	C_4	B_5	C_3	B_2
C_4		C_1	B_5	B_3
B_5	C_1		B_2	C_4
C_3	B_5	B_2		C_1
B_2	B_3	C_4	C_1	

L.Ptn.4 & I.Ptn.6 ➡ NG.

	C_5	B_4	C_2	B_3
C_5		C_1	B_3	B_4
B_4	C_1		B_5	C_2
C_2	B_3	B_5		C_1
B_3	B_4	C_2	C_1	

L.Ptn.5 &

fig. 138.5

L.Ptn.5 & I.Ptn.1 ➡ NG.

	C_4	C_2	B_5	B_3
C_4		B_5	B_3	C_1
C_2	B_5		C_1	B_4
B_5	B_3	C_1		C_2
B_3	C_1	B_4	C_2	

L.Ptn.5 & I.Ptn.2 ➡ NG.

	C_3	C_5	B_2	B_4
C_3		B_4	B_5	C_1
C_5	B_4		C_1	B_2
B_2	B_5	C_1		C_3
B_4	C_1	B_2	C_3	

L.Ptn.5 & I.Ptn.3 ➡ NG.

	C_3	C_4	B_5	B_2
C_3		B_5	B_1	C_4
C_4	B_5		C_2	B_1
B_5	B_1	C_2		C_3
B_2	C_4	B_1	C_3	

L.Ptn.5 & I.Ptn.4 ➡ NG.

	C_5	C_2	B_3	B_4
C_5		B_4	B_1	C_3
C_2	B_4		C_5	B_1
B_3	B_1	C_5		C_2
B_4	C_3	B_1	C_2	

L.Ptn.5 & I.Ptn.5 ➡ OK.

	C_4	C_5	B_3	B_2
C_4		B_1	B_5	C_3
C_5	B_1		C_2	B_4
B_3	B_5	C_2		C_1
B_2	C_3	B_4	C_1	

L.Ptn.5 & I.Ptn.6 ➡ NG.

	C_5	C_4	B_2	B_3
C_5		B_1	B_3	C_4
C_4	B_1		C_5	B_2
B_2	B_3	C_5		C_1
B_3	C_4	B_2	C_1	

【P203】12月16日（水）5次の反対称行列（続き）

L. Ptn.6 &

fig.138.6

L.Ptn.6 & I.Ptn.1 ➡ NG.

	C_4	C_2	B_5	B_3
C_4		B_5	C_3	B_1
C_2	B_5		B_1	C_4
B_5	C_3	B_1		C_2
B_3	B_1	C_4	C_2	

L.Ptn.6 & I.Ptn.2 ➡ NG.

	C_3	C_5	B_2	B_4
C_3		B_4	C_5	B_1
C_5	B_4		B_1	C_2
B_2	C_5	B_1		C_3
B_4	B_1	C_2	C_3	

L.Ptn.6 & I.Ptn.3 ➡ NG.

	C_3	C_4	B_5	B_2
C_3		B_5	C_1	B_4
C_4	B_5		B_2	C_1
B_5	C_1	B_2		C_3
B_2	B_4	C_1	C_3	

L.Ptn.6 & I.Ptn.4 ➡ NG.

	C_5	C_2	B_3	B_4
C_5		B_4	C_1	B_3
C_2	B_4		B_5	C_1
B_3	C_1	B_5		C_2
B_4	B_3	C_1	C_2	

L.Ptn.6 & I.Ptn.5 ➡ NG.

	C_4	C_5	B_3	B_2
C_4		B_1	C_5	B_3
C_5	B_1		B_2	C_4
B_3	C_5	B_2		C_1
B_2	B_3	C_4	C_1	

L.Ptn.6 & I.Ptn.6 ➡ OK.

	C_5	C_4	B_2	B_3
C_5		B_1	C_3	B_4
C_4	B_1		B_5	C_2
B_2	C_3	B_5		C_1
B_3	B_4	C_2	C_1	

OKとなったパタンをまとめて再記しておきます。

LI.Ptn.1

	B_4	C_2	C_5	B_3
B_4		B_5	C_3	C_1
C_2	B_5		B_1	C_4
C_5	C_3	B_1		B_2
B_3	C_1	C_4	B_2	

LI.Ptn.2

	B_3	C_5	C_2	B_4
B_3		C_4	B_5	C_1
C_5	C_4		B_1	B_2
C_2	B_5	B_1		C_3
B_4	C_1	B_2	C_3	

LI.Ptn.3

	C_3	B_4	C_5	B_2
C_3		B_5	B_1	C_4
B_4	B_5		C_2	C_1
C_5	B_1	C_2		B_3
B_2	C_4	C_1	B_3	

LI.Ptn.4

	C_5	B_2	C_3	B_4
C_5		C_4	B_1	B_3
B_2	C_4		B_5	C_1
C_3	B_1	B_5		C_2
B_4	B_3	C_1	C_2	

LI.Ptn.5

	C_4	C_5	B_3	B_2
C_4		B_1	B_5	C_3
C_5	B_1		C_2	B_4
B_3	B_5	C_2		C_1
B_2	C_3	B_4	C_1	

LI.Ptn.6

	C_5	C_4	B_2	B_3
C_5		B_1	C_3	B_4
C_4	B_1		B_5	C_2
B_2	C_3	B_5		C_1
B_3	B_4	C_2	C_1	

fig.139

【P204】12月19日（土） 5次元の反対称行列（続き）

結局、1つのL.Ptn.に対して、唯1つだけのI.Ptn.が**OK.**となりました。逆も云えます。L.Ptn.とI.Ptn.は、使えるPtn.として1対1に対応します。面白いですね。

S.Ptn.に対する（主観的な）要請は、L.Ptn.に対する要請と似たものになります。どちらも2つの識別子から成るからです。次のような規約を設けることにしましょう。

S.Ptn.Rule

- 右上端（1行5列）の符号を－に固定する。 .1)
- どの行にも－と＋を同数（＝2個）づつ配置する。 .2)
- どの列にも－と＋を同数（＝2個）づつ配置する。 .3)
- 反対称的であること。つまりi行j列の符号は、j行i列の符号と異符号となるように配置する。 .4)

規約(W4)

.1)と.4)は当然なことです。真の規約となるのは.2)と.3)です。これらを満たすS.Ptn.は下記の12パタンだけです。これもちょっとしたパズル（Puzzle）ですね。S.Ptn.RuleはL.Ptn.Ruleと似ているので、対応関係が分るように採番することにしましょう。

S.Ptn.1

	−	+	+	−
+		−	−	+
−	+		−	+
−	+	+		−
+	−	−	+	

S.Ptn.2.1

	−	+	+	−
+		−	−	+
−	+		+	−
−	+	−		+
+	−	+	−	

S.Ptn.2.2

	−	+	+	−
+		+	−	−
−	−		+	+
−	+	−		+
+	+	−	−	

【P205】5次の反対称行列（続き）

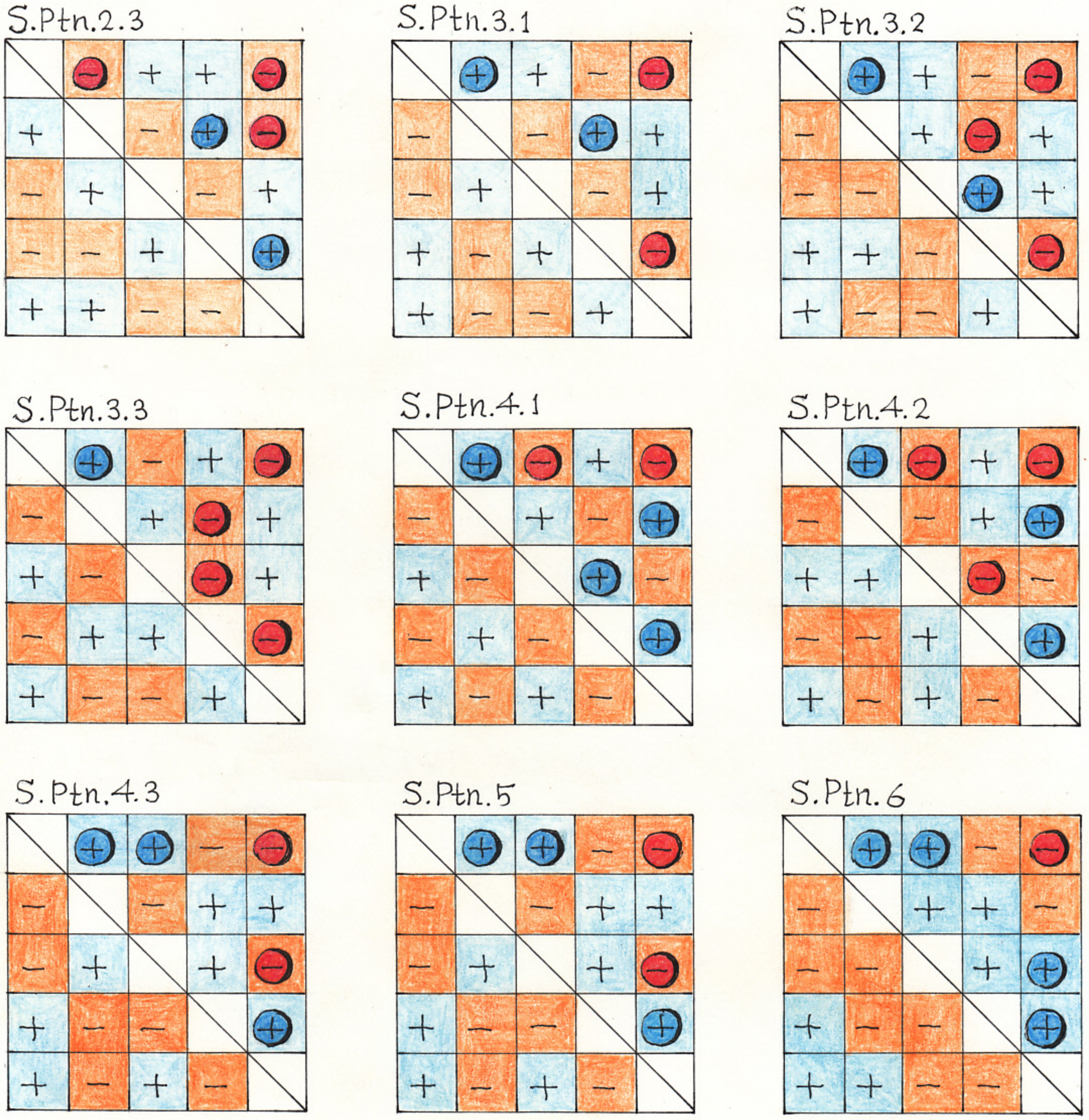

fig.140

Hint. ● で囲んだ符号が与えられたなら、他の符号は全て、S.Ptn.Ruleによって一意的に定まります。これも、貴方も確認して下さい。対称性の要請と反対称性の要請は似て非なるものと云えますね。反対称性の要請の方が明らかに、緩いようですね。2倍のパタンが出現しました。さらに対称性の場合には、右上のラベルの個数と左下のラベルの個数は、B, Cとも5個づつと自動的に

【P206】12月20日(日) 5次の反対称行列(続き)

同数個現われるのですが、反対称の場合は、右上の符号の個数と左下の符号の個数は－も＋も色々です。例えば、どちらも5個づつ現われるのは、

S.Ptn.2.1, S.Ptn.2.3, S.Ptn.3.1, S.Ptn.3.3, S.Ptn.4.2

の5パタンだけです。このことに何か意味が有るのでしょうか？

L.Ptn.とS.Ptn.の対応関係のグラフを作図しましょう。L.Ptn.で◎で囲ったパタンに一致するS.Ptnを対応させたグラフです。

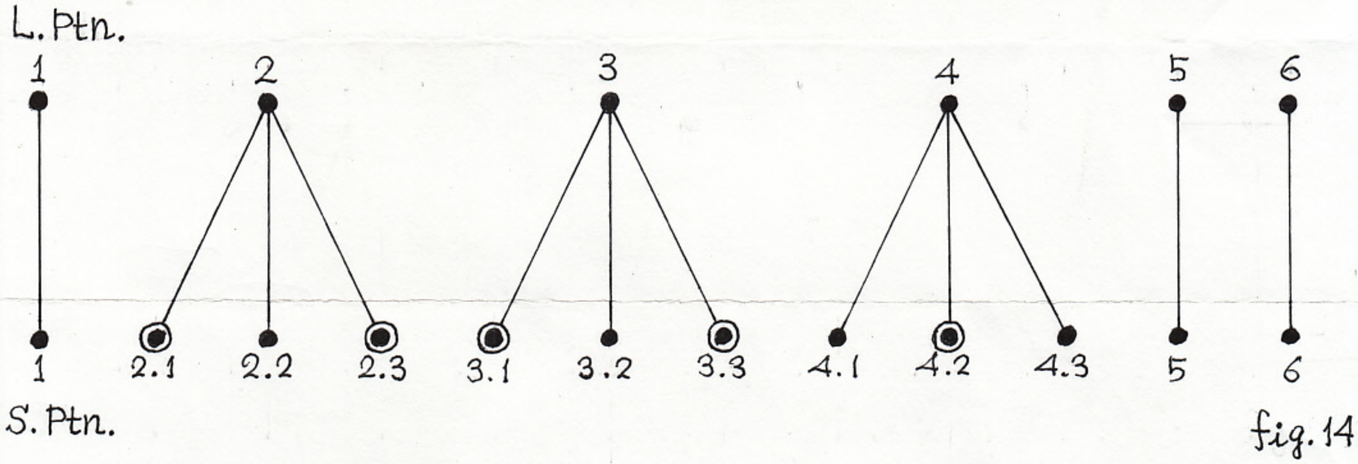

fig.141

このグラフから何かを主張するつもりは有りません。面白いと思ったので描いたまでです。

…………………

うまく行きませんね。僕が期待していたのは、下記の2式の少なくとも一方を満たすパタンです。

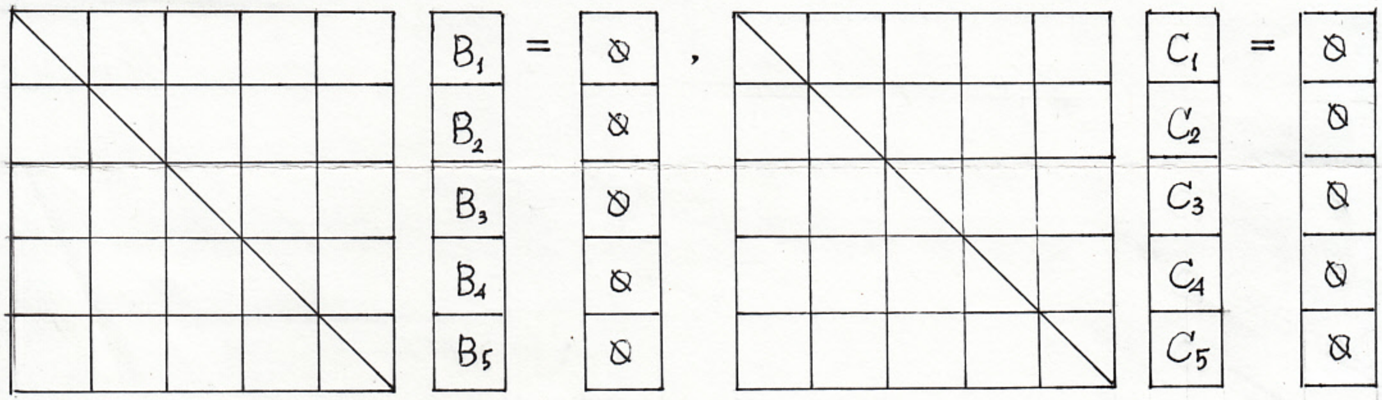

fig.142

一般に奇数次の反対称行列の行列式は0ですから、上記のような非0ベク

は常に存在します。そのようなベクトルが、定数倍の不定さを除いて1つしか存在しないのか、それとも(一般的に)一次独立な2つ以上のベクトルが存在するのかは今のところ僕には確信がありません。そのようなベクトルの成分を用いて反対称行列の成分を表現したいというのが僕の希望です。でもうまく行きません。3次の場合には下記が成り立ちます。

$$\begin{pmatrix} 0 & C_3 & -C_2 \\ -C_3 & 0 & C_1 \\ C_2 & -C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

定理(61)

5次の場合のこのような式を期待したのです。何故反対称行列の表現にこだわるのかはまだ説明していませんでしたね。それは、正規直交座標系の回転に関連するからです。回転については主題をあらためて考察することにします。

5次の反対称行列を表現するのに、単なるラベルや添字などのパタンを選択するだけでなく、始めから構造を導入するという方法も有ります。幾つか例示しましょう。 $A = (A_{ij})$ を5次の反対称行列とします。$\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}$ 等を5次元のベクトルとします。$\mathbb{u}|_i = u_i$ 等とします。1つ目の例を示します。

$$A = \mathbb{u}\,{}^t\mathbb{v} - \mathbb{v}\,{}^t\mathbb{u}, \quad A_{ij} = u_i v_j - v_i u_j$$

構造例(W5)

Aが反対称行列になるのは明らかです。

$$A_{ji} = u_j v_i - v_j u_i = -(u_i v_j - v_i u_j) = -A_{ij}$$

(W5)は任意の次数に対して反対称行列を作り得る構造例の1つです。$\mathbb{u}, \mathbb{v}$ と2つの5次元ベクトルを用いているので、これが5次の反対称行列の一般的表現であると期待したくなりますね。$\mathbb{u}$ と $\mathbb{v}$ のどちらとも直行するベクトルを $\mathbb{z}$ とすると、$\mathbb{z}$ は fig.142 を満たします。$\mathbb{z}$ は3次元空間を構成します。$\mathbb{u} = 0$ とすると A は 0 行列に成ってしまいます。このことは、(W5)が10個の自由度を持たないことを意味します。

【P208】5次の反対称行列（続き）

構造例（W5）の応用例として、ベクトルを3個，4個用いる表現例を示します。

$$A = u\,{}^t v - v\,{}^t u + v\,{}^t w - w\,{}^t v + w\,{}^t u - u\,{}^t w \qquad \text{構造例(W6)}$$

これは u, v, w の3個を用いる例です。これら3個のベクトルすべてと直交するベクトルを z とすると、z は fig. 142 を満たします。z は2次元空間を構成します。$u = 0$ としても A は 0 行列には成りません。

$$A = u\,{}^t v - v\,{}^t u + w\,{}^t x - x\,{}^t w \qquad \text{構造例(W7)}$$

これは4個のベクトルを用いる例です。これらすべてと直交するベクトル z は、fig. 142 を満たします。z は1次元空間を構成します。このような構造例が存在するということは、5次元の回転には回転軸なる概念が存在すると云うことでしょうか？ 一般に奇数次元の回転には回転軸が1つだけ存在すると云うことを示唆しているのでしょうか？ 僕としてはそうだと予想しています。そうであってほしいと思っています。偶数次元の回転では不変なベクトルは 0 ベクトルだけです。これは偶数次の反対称行列の行列式が一般的には 0 でないことと関係しています。回転の話をしてしまいました。主題は反対称行列でした。（W6），（W7）も次数によらず反対称行列を構成します。5個以上のベクトルを用いる構造も作れることは明らかですね。（W6）も（W7）もパラメタの個数が多過ぎます。

（W5）の応用でない、5次に固有の構造例を示しましょう。

$$A_{ij} = \varepsilon_{ijklm} u_k v_l w_m \qquad \text{構造例(W8.1)}$$

ここで ε_{ijklm} は5階の反対称単位テンソルです。k, l, m はダミー添字です。つまりこれらの添字は $1 \sim 5$ まで和をとることを意味しています。

（W8）には面白い構造が有ります。次式を満たします。

$$A\mathbf{u} = A\mathbf{v} = A\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

構造例(W8.2)

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ 全てが fig.142 を満たします。これらは3次元空間を構成します。回転で云えば、3次元部分空間が不変だと云うことです。構造例（W5）と似てますね。$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$のどれか1つでも$\mathbf{0}$ベクトルとすれば A は$\mathbf{0}$行列に成ってしまいます。これも（W5）と同様に10個の自由度を持たないことを意味します。

（W5）から（W6）や（W7）の構造例を作ったと同様に、（W8）から、4個以上のベクトルを用いた反対称行列を構成することが出来ます。でも省略します。パラメタが多過ぎます。

A そのものに構造を持たせるという考え方には無理が有りますね。やはり、ラベル、添字パタンの選択問題として考察するべきだと思われます。

符号パタンは fig.140 の12個のパタンのどれでも、L.I.Ptn. のどれともマッチします。つまり $\pm B_i$, $\pm C_i$ の全てが出現します。符号パタンのRuleはどうでも良いのです。反対称でさえあればどの符号パタンにも優劣は無りません。問題はラベルと添字のパタンです。

L.Ptn.Rule を次のように変えてみましょう。I.Ptn.Rule はそのままとします。

L.Ptn.Rule（その2）

- 右上端（1行5列）のラベルをBに固定する。 .1)
- 5列のラベルを全て等しく配置する。 .2)
- B, C とも同数（=10個）づつ配置する。 .3)
- 対称的であること、つまりi行j列のラベルは、j行i列のラベルと等しく配置する。 .4)

規約(W9)

この規約の意図は、fig.142 とは無関係です。2次，3次，4次の反対称行列の構造がCに出現することを狙ったものです。これらを満たすL.Ptn.は次の6パタンだけです。このことは自明ですね。

L.Ptn.7

	C	C	B	B
C		C	C	B
C	C		C	B
B	C	C		B
B	B	B	B	

L.Ptn.8

	C	B	C	B
C		C	C	B
B	C		C	B
C	C	C		B
B	B	B	B	

L.Ptn.9

	C	C	C	B
C		B	C	B
C	B		C	B
C	C	C		B
B	B	B	B	

L.Ptn.10

	B	C	C	B
B		C	C	B
C	C		C	B
C	C	C		B
B	B	B	B	

L.Ptn.11

	C	C	C	B
C		C	B	B
C	C		C	B
C	B	C		B
B	B	B	B	

L.Ptn.12

	C	C	C	B
C		C	C	B
C	C		B	B
C	C	B		B
B	B	B	B	

fig.143

上記の6個のL.Ptn.とfig.137の6個のI.Ptn.を重ね合わせてみましょう。全部で36個のパタンが存在します。B_i, C_i（$i=1,2,3,4,5$）の全てが出現するパタンを**OK.**とし、そうでないパタンを**NG.**とします。fig.138のように6個のパタンだけが**OK.**となるのでしょうか？ 紙面を食いますがやってみましょう。

L.Ptn.7 &　　fig.144.1

I.Ptn.1 → **OK.**

	C_4	C_2	B_5	B_3
		C_5	C_3	B_1
			C_1	B_4
				B_2

I.Ptn.2 → **NG.**

	C_3	C_5	B_2	B_4
		C_4	C_5	B_1
			C_1	B_2
				B_3

I.Ptn.3 → **OK.**

	C_3	C_4	B_5	B_2
		C_5	C_1	B_4
			C_2	B_1
				B_3

12月26日(土) 5次の反対称行列(続き)

I.Ptn.4 → NG.

	C_5	C_2	B_3	B_4
		C_4	C_1	B_3
			C_5	B_1
				B_2

I.Ptn.5 → NG.

	C_4	C_5	B_3	B_2
		C_1	C_5	B_3
			C_2	B_4
				B_1

I.Ptn.6 → NG.

	C_5	C_4	B_2	B_3
		C_1	C_3	B_4
			C_5	B_2
				B_1

L.Ptn.8 &

fig.144.2

I.Ptn.1 → NG.

	C_4	B_2	C_5	B_3
		C_5	C_3	B_1
			C_1	B_4
				B_2

I.Ptn.2 → OK.

	C_3	B_5	C_2	B_4
		C_4	C_5	B_1
			C_1	B_2
				B_3

I.Ptn.3 → NG.

	C_3	B_4	C_5	B_2
		C_5	C_1	B_4
			C_2	B_1
				B_3

I.Ptn.4 → NG.

	C_5	B_2	C_3	B_4
		C_4	C_1	B_3
			C_5	B_1
				B_2

I.Ptn.5 → OK.

	C_4	B_5	C_3	B_2
		C_1	C_5	B_3
			C_2	B_4
				B_1

I.Ptn.6 → NG.

	C_5	B_4	C_2	B_3
		C_1	C_3	B_4
			C_5	B_2
				B_1

L.Ptn.9 &

fig.144.3

I.Ptn.1 → OK.

	C_4	C_2	C_5	B_3
		B_5	C_3	B_1
			C_1	B_4
				B_2

I.Ptn.2 → NG.

	C_3	C_5	C_2	B_4
		B_4	C_5	B_1
			C_1	B_2
				B_3

I.Ptn.3 → OK.

	C_3	C_4	C_5	B_2
		B_5	C_2	B_4
			C_1	B_1
				B_3

【P212】5次の反対称行列（続き）

I.Ptn.4 → NG.

	C_5	C_2	C_3	B_4
		B_4	C_1	B_3
			C_5	B_1
				B_2

I.Ptn.5 → NG.

	C_4	C_5	C_3	B_2
		B_1	C_5	B_3
			C_2	B_4
				B_1

I.Ptn.6 → NG.

	C_5	C_4	C_2	B_3
		B_1	C_3	B_4
			C_5	B_2
				B_1

fig.144.4

L.Ptn.10 &

I.Ptn.1 → NG.

	B_4	C_2	C_5	B_3
		C_5	C_3	B_1
			C_1	B_4
				B_2

I.Ptn.2 → NG.

	B_3	C_5	C_2	B_4
		C_4	C_5	B_1
			C_1	B_2
				B_3

I.Ptn.3 → NG.

	B_3	C_4	C_5	B_2
		C_5	C_1	B_4
			C_2	B_1
				B_3

I.Ptn.4 → OK.

	B_5	C_2	C_3	B_4
		C_4	C_1	B_3
			C_5	B_1
				B_2

I.Ptn.5 → NG.

	B_4	C_5	C_3	B_2
		C_1	C_5	B_3
			C_2	B_4
				B_1

I.Ptn.6 → OK.

	B_5	C_4	C_2	B_3
		C_1	C_3	B_4
			C_5	B_2
				B_1

fig.144.5

L.Ptn.11 &

I.Ptn.1 → NG.

	C_4	C_2	C_5	B_3
		C_5	B_3	B_1
			C_1	B_4
				B_2

I.Ptn.2 → OK.

	C_3	C_5	C_2	B_4
		C_4	B_5	B_1
			C_1	B_2
				B_3

I.Ptn.3 → NG.

	C_3	C_4	C_5	B_2
		C_5	B_1	B_4
			C_2	B_1
				B_3

【P213】12月27日（日）5次の反対称行列（続き）

I.Ptn.4 → NG.

	C_5	C_2	C_3	B_4
		C_4	B_1	B_3
			C_5	B_1
				B_2

I.Ptn.5 → OK.

	C_4	C_5	C_3	B_2
		C_1	B_5	B_3
			C_2	B_4
				B_1

I.Ptn.6 → NG.

	C_5	C_4	C_2	B_3
		C_1	B_3	B_4
			C_5	B_2
				B_1

L.Ptn.12 & 　　　　　　　　　　　　fig.144.6

I.Ptn.1 → NG.

	C_4	C_2	C_5	B_3
		C_5	C_3	B_1
			B_1	B_4
				B_2

I.Ptn.2 → NG.

	C_3	C_5	C_2	B_4
		C_4	C_5	B_1
			B_1	B_2
				B_3

I.Ptn.3 → NG.

	C_3	C_4	C_5	B_2
		C_5	C_1	B_4
			B_2	B_1
				B_3

I.Ptn.4 → OK.

	C_5	C_2	C_3	B_4
		C_4	C_1	B_3
			B_5	B_1
				B_2

I.Ptn.5 → NG.

	C_4	C_5	C_3	B_2
		C_1	C_5	B_3
			B_2	B_4
				B_1

I.Ptn.6 → OK.

	C_5	C_4	C_2	B_3
		C_1	C_3	B_4
			B_5	B_2
				B_1

以外なことに、6個ではなく2倍の12個のパタンがOK.となりました。しかも各L.Ptn.に対して2個のI.Ptn.がOK.となっています。

S.Ptn.でそうしたように、小数点を用いて採番して、まとめて再記しておきましょう。

（次ページへ）

【P214】5次の反対称行列（続き）

LI. Ptn. 7.1

	C_4	C_2	B_5	B_3
C_4		C_5	C_3	B_1
C_2	C_5		C_1	B_4
B_5	C_3	C_1		B_2
B_3	B_1	B_4	B_2	

LI. Ptn. 7.2

	C_3	C_4	B_5	B_2
C_3		C_5	C_1	B_4
C_4	C_5		C_2	B_1
B_5	C_1	C_2		B_3
B_2	B_4	B_1	B_3	

LI. Ptn. 8.1

	C_3	B_5	C_2	B_4
C_3		C_4	C_5	B_1
B_5	C_4		C_1	B_2
C_2	C_5	C_1		B_3
B_4	B_1	B_2	B_3	

LI. Ptn. 8.2

	C_4	B_5	C_3	B_2
C_4		C_1	C_5	B_3
B_5	C_1		C_2	B_4
C_3	C_5	C_2		B_1
B_2	B_3	B_4	B_1	

LI. Ptn. 9.1

	C_4	C_2	C_5	B_3
C_4		B_5	C_3	B_1
C_2	B_5		C_1	B_4
C_5	C_3	C_1		B_2
B_3	B_1	B_4	B_2	

LI. Ptn. 9.2

	C_3	C_4	C_5	B_2
C_3		B_5	C_2	B_4
C_4	B_5		C_1	B_1
C_5	C_2	C_1		B_3
B_2	B_4	B_1	B_3	

LI. Ptn. 10.1

	B_5	C_2	C_3	B_4
B_5		C_4	C_1	B_3
C_2	C_4		C_5	B_1
C_3	C_1	C_5		B_2
B_4	B_3	B_1	B_2	

LI. Ptn. 10.2

	B_5	C_4	C_2	B_3
B_5		C_1	C_3	B_4
C_4	C_1		C_5	B_2
C_2	C_3	C_5		B_1
B_3	B_4	B_2	B_1	

LI. Ptn. 11.1

	C_3	C_5	C_2	B_4
C_3		C_4	B_5	B_1
C_5	C_4		C_1	B_2
C_2	B_5	C_1		B_3
B_4	B_1	B_2	B_3	

LI. Ptn. 11.2

	C_4	C_5	C_3	B_2
C_4		C_1	B_5	B_3
C_5	C_1		C_2	B_4
C_3	B_5	C_2		B_1
B_2	B_3	B_4	B_1	

LI. Ptn. 12.1

	C_5	C_2	C_3	B_4
C_5		C_4	C_1	B_3
C_2	C_4		B_5	B_1
C_3	C_1	B_5		B_2
B_4	B_3	B_1	B_2	

LI. Ptn. 12.2

	C_5	C_4	C_2	B_3
C_5		C_1	C_3	B_4
C_4	C_1		B_5	B_2
C_2	C_3	B_5		B_1
B_3	B_4	B_2	B_1	

fig. 145

I. Ptn. と LI. Ptn. の対応関係のグラフを作図しましょう。

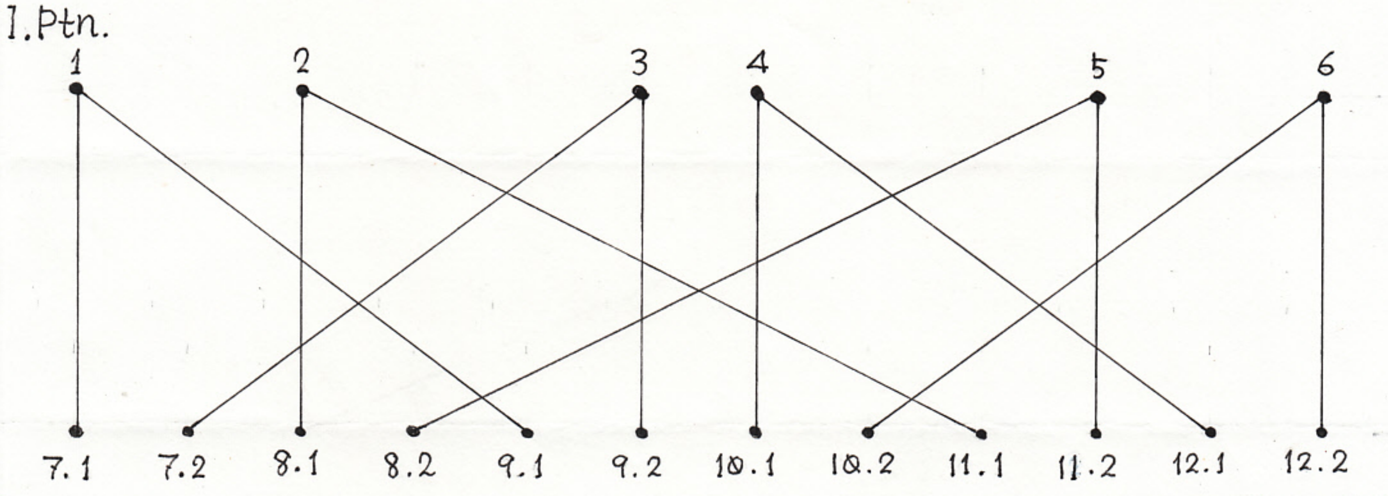

fig.146

fig.141 と同様に、このグラフから何かを主張するつもりは有りません。面白いと思ったので描いたまでです。但し、どの I. Ptn. も 2度づつ採用されたことは指摘しておきます。何故でしょう？ 偶然でしょうか？ 解りません。

LI. Ptn.7.1 ～ 12.2 のどのパタンも、符号パタンがどうであれ、fig.142 の2つの式のどちらも満たしません。尤もそれを期待して、L. Ptn. Rule（その2）を設定した訳では無いので、当然ということでしょう。

実は次が云えます。

5次の反対称行列 A に対して 2個の5次元ベクトル $\mathbb{B} = {}^t(B_1, B_2, \dots, B_5)$, $\mathbb{C} = (C_1, C_2, \dots, C_5)$ を用いて、A の成分に、ラベル, 添字, 符号をどう配置しようとも、

$$A\mathbb{B} = \mathbb{O} \qquad .1)$$

$$A\mathbb{C} = \mathbb{O} \qquad .2)$$

のどちらも満たすことは不可能です。ここで配置するという意味は、A の非対角成分を、$\pm B_i$, $\pm C_i$ で表わすという意味です。しかも真の10の自由度を持たなければなりません。このことは、$B_1, B_2, \dots, B_5$, $C_1, C_2, \dots, C_5$ の全てを用いるということです。

定理（62）

【P216】12月29(火) 5次の反対称行列(続き)

定理(62)を証明しましよう。あまり良い証明は出来ませんが、何とか貴方にも納得してもらえたらと思います。

.1), .2)のどちらを満たすとしても、どの行にもラベルBもラベルCも偶数個づつ配置する必要が有ります。そうで無いとすると、どんな添字であれ、Aのどの行ベクトルも、$\mathbb{B}$とも$\mathbb{C}$ともその内積は$\mathbb{O}$に成りません。打ち消し合って$\mathbb{O}$に成るペア(Pair)が必要だからです。また、BまたはCがAのある行の全て(4個)を占めるとしたら、fig.143からも分るように、どの行かは必らず奇数個(3個)の同じラベルが配置されてしまうので、打ち消し合う相棒(Partner)持たない項が出現してしまいます。従って、Aのどの行にも、BとCが2個づつ配置される必要が有ります。つまり、L.Ptn.Rule(その1)を満たさなければならないということです。実は、.1)と.2)のいずれかを満たすことを狙って(期待して) L.Ptn.Rule(その1)を要請した次第です。考え不足でしたね。でも、fig.136やfig.139を見出したことは無駄にならない気がします。いずれ分るかも知れません。L.Ptn.Rule(その1)を満たす6個のパタンfig.136のそれぞれについて、.1), .2)を満たすことが出来るか?それとも出来ないのかを調べることにしましよう。Aの行と$\mathbb{B}$または$\mathbb{C}$との内積が$\mathbb{O}$となるためには、BB, CC, BCの項たちは、次のような制約を満たす必要が有ります。

- BBの項:B_iB_jとB_jB_iの両方が出現すること。 (Wa)
- CCの項:C_iC_jとC_jC_iの両方が出現すること。 (Wb)
- BCの項:同じiに対して、B_iC_iなる2つの項が出現すること。 (Wc)

そうでなければ打ち消し合う相棒とならないからです。(Wc)が特に重要です。Aの1行目だけを調べれば十分であることが後で分ります。

まず.1)を調べましよう。s_{ij}は符号です。

L.Ptn.1 : $s_{12}B_{?1}B_2 + s_{13}C_{?2}B_3 + s_{14}C_{?3}B_4 + s_{15}B_{?4}B_5$

才2項と才3項は$3 \neq 4$だから消えません。

L.Ptn.2 : L.Ptn.1と同じです。

L.Ptn.3 : $s_{12}C_{?1}B_2 + s_{13}B_{?2}B_3 + s_{14}C_{?3}B_4 + s_{15}B_{?4}B_5$

才1項と才3項は$2 \neq 4$だから消えません。

L.Ptn.4：　L.Ptn.3と同じです。

L.Ptn.5：　$s_{12}C_{?1}B_2 + s_{13}B_{?2}B_3 + s_{14}C_{?3}B_4 + s_{15}B_{?4}B_5$

才1項と才3項は $2 \neq 4$ だから消えません。

L.Ptn.6：　L.Ptn.5と同じです。

次に、.2)を調べます。

L.Ptn.1：　$s_{12}B_{?1}C_2 + s_{13}C_{?2}C_3 + s_{14}C_{?3}C_4 + s_{15}B_{?4}C_5$

才1項と才4項は $2 \neq 5$ だから消えません。

L.Ptn.2：　L.Ptn.1と同じです。

L.Ptn.3：　$s_{12}C_{?1}C_2 + s_{13}B_{?2}C_3 + s_{14}C_{?3}C_4 + s_{15}B_{?4}C_5$

才2項と才4項は $3 \neq 5$ だから消えません。

L.Ptn.4：　L.Ptn.3と同じです。

L.Ptn.5：　$s_{12}C_{?1}C_2 + s_{13}C_{?2}C_3 + s_{14}B_{?3}C_4 + s_{15}B_{?4}C_5$

才3項と才4項は $4 \neq 5$ だから消えません。

L.Ptn.6：　L.Ptn.5と同じです。

以上。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　Q.E.D.

(62.1), .2)を満たすことは出来ないとしても、fig.136のL.Ptn.の中には、もしかしたら、これらのそれぞれに適切な添字と符号を割り当てれば、下記を満たすLIS.Ptn.が少なくとも1つ存在する可能性は残ります。もしそうなら、とても嬉しいことです。

fig.136.のL.Ptn.の中には、適切に添字,符号を付与すれば

- $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbb{B}, \mathbb{C}) = \mathbb{A}(\mathbb{B}, \mathbb{O}) + \mathbb{A}(\mathbb{O}, \mathbb{C})$,　　.1)
- $\mathbb{A}(\mathbb{B}, \mathbb{O})\mathbb{B} = \mathbb{O}$,　　.2)
- $\mathbb{A}(\mathbb{O}, \mathbb{C})\mathbb{C} = \mathbb{O}$　　.3)

の全てを満たすLIS.Ptn.は存在するだろうか?

期待(W9)

ここで注意すべきは次のことです。残念ながら、I.Ptn.Rule (W3)、つまり fig.139 の LI.Ptn も、S.Ptn.Rule (W4) つまり fig.140 の S.Ptn. も全て知らないふりをする必要があるということです。専ら期待 (W9) の.2) と.3) を満たすことのみを要請して、あらゆる、可能な添字パタン，符号パタンを選択対象とする必要が有ります。

.2) は $\mathbb{B}$ を $-\mathbb{B}$ と入れ換えても不変です。また、.3) は $\mathbb{C}$ を $-\mathbb{C}$ に入れ換えても不変です。.2), .3) のどちらの右辺も $\mathbf{0}$ ベクトルだからです。このことは、A の 20個の反対称成分の内どれか2つの成分の符号をかってに定めることが出来るということです。

fig.136 の 6個の L.Ptn. それぞれ毎に、(W9.2), (W9.3) を満たす IS.Ptn. を決定できるか、試みることにします。

まず .2) を調べましょう。

L.Ptn.1

	$+B_5$			$-B_2$
$-B_5$		B		
	B		B	
		B		B
$+B_2$			B	

$s_{15} = -1$,

1行目 : $s_{12} B_{?1} B_2 - B_{?2} B_5 = \mathbf{0}$,

$?1 = 5$, $?2 = 2$, $s_{12} = +1$

2行目 : $-B_5 B_1 + s_{23} B_{?1} B_3 = \mathbf{0}$,

$?1$: 解無し　→ NG.

L.Ptn.2

	$+B_5$			$-B_2$
$-B_5$			B	
			B	B
	B	B		
$+B_2$		B		

$s_{15} = -1$,

1行目 : $s_{12} B_{?1} B_2 - B_{?2} B_5 = \mathbf{0}$,

$?1 = 5$, $?2 = 2$, $s_{12} = +1$

2行目 : $-B_5 B_1 + s_{24} B_{?1} B_4 = \mathbf{0}$,

$?1$: 解無し　→ NG.

（次ページへ続く）

【P219】5次の反対称行列（続き）

L.Ptn.3

＼		$+B_5$		$-B_3$
	＼	B_4	B_3	
$-B_5$	B	＼		
	B_3		＼	B
$+B_3$			B	＼

$s_{15} = -1$,

1行目： $s_{13} B_{?1} B_3 - B_{?2} B_5 = \emptyset$,

$?1 = 5$, $?2 = 3$, $s_{13} = +1$

2行目： $s_{23} B_{?1} B_3 + s_{24} B_{?2} B_4 = \emptyset$,

$?1 = 4$, $?2 = 3$, $s_{23} = -s_{24}$

1行5列と2行4列に同じB_3が出現 ➡ NG.

L.Ptn.4

＼		$+B_5$		$-B_3$
	＼		B_5	B_4
$-B_5$		＼	B	
	B_5	B	＼	
$+B_3$	B_4			＼

$s_{15} = -1$

1行目： $s_{13} B_{?1} B_3 - B_{?2} B_5 = \emptyset$,

$?1 = 5$, $?2 = 3$, $s_{13} = +1$

2行目： $s_{24} B_{?1} B_4 + s_{25} B_{?2} B_5 = \emptyset$,

$?1 = 5$, $?2 = 4$, $s_{24} = -s_{25}$

1行3列と2行4列に同じB_5が出現 ➡ NG.

L.Ptn.5

＼			$+B_5$	$-B_4$
	＼	B_4	B_3	
	B_4	＼		B
$-B_5$	B_3		＼	
$+B_4$		B		＼

$s_{15} = -1$

1行目： $s_{14} B_{?1} B_4 - B_{?2} B_5 = \emptyset$,

$?1 = 5$, $?2 = 4$, $s_{14} = +1$

2行目： $s_{23} B_{?1} B_3 + s_{24} B_{?2} B_4 = \emptyset$,

$?1 = 4$, $?2 = 3$, $s_{23} = -s_{24}$

1行5列と2行3列に同じB_4が出現 ➡ NG.

L.Ptn.6

＼			$+B_5$	$-B_4$
	＼	B_5		B_3
	B_5	＼	B	
$-B_5$		B	＼	
$+B_4$	B_3			＼

$s_{15} = -1$

1行目： $s_{14} B_{?1} B_4 - B_{?2} B_5 = \emptyset$

$?1 = 5$, $?2 = 4$, $s_{14} = +1$

2行目： $s_{23} B_{?1} B_3 + s_{25} B_{?2} B_5 = \emptyset$

$?1 = 5$, $?2 = 3$, $s_{23} = -s_{25}$

1行4列と2行3列に同じB_5が出現 ➡ NG.

【P220】2021年1月1日（金）5次の反対称行列（続き）

寿幸

次に（W9.3）を調べましょう。

L.Ptn.1

		$-C_4$	$+C_3$	
			C_5	C_4
$+C_4$				C
$-C_3$	C_5			
	C_4	C		

$s_{14} = +1$

1行目：$s_{13}C_{?1}C_3 + C_{?2}C_4 = 0$,

$?1 = 4,\ ?2 = 3,\ s_{13} = -1$

2行目：$s_{24}C_{?1}C_4 + s_{25}C_{?2}C_5 = 0$,

$?1 = 5,\ ?2 = 4,\ s_{24} = -s_{25}$

1行3列と2行5列に同じC_4が出現 → **NG.**

L.Ptn.2

		$-C_4$	$+C_3$	
		C_5		C_3
$+C_4$	C_5			
$-C_3$				C
	C_3		C	

$s_{14} = +1$

1行目：$s_{13}C_{?1}C_3 + C_{?2}C_4 = 0$,

$?1 = 4,\ ?2 = 3,\ s_{13} = -1$

2行目：$s_{23}C_{?1}C_3 + s_{25}C_{?2}C_5 = 0$,

$?1 = 5,\ ?2 = 3,\ s_{23} = -s_{25}$

1行4列と2行5列に同じC_3が出現 → **NG.**

L.Ptn.3

	$-C_4$		$+C_2$	
$+C_4$				C
			C	C
$-C_2$		C		
	C	C		

$s_{14} = +1$

1行目：$s_{12}C_{?1}C_2 + C_{?2}C_4 = 0$,

$?1 = 4,\ ?2 = 2,\ s_{12} = -1$

2行目：$C_4C_1 + s_{25}C_{?1}C_5 = 0$,

$?1$：解無し → **NG.**

L.Ptn.4

	$-C_4$		$+C_2$	
$+C_4$		C		
	C			C
$-C_2$				C
		C	C	

$s_{14} = +1$

1行目：$s_{12}C_{?1}C_2 + C_{?2}C_4 = 0$,

$?1 = 4,\ ?2 = 2,\ s_{12} = -1$

2行目：$C_4C_1 + s_{23}C_{?1}C_3 = 0$,

$?1$：解無し → **NG.**

【P221】 5次の反対称行列（続き）

L.Ptn.5

＼	$+C_3$	$-C_2$		
$-C_3$	＼			C
$+C_2$		＼	C	
		C	＼	C
	C		C	＼

$s_{13} = -1$

1行目： $s_{12} C_{?1} C_2 - C_{?2} C_3 = \mathbb{O}$,

$?1 = 3$, $?2 = 2$, $s_{12} = +1$

2行目： $-C_3 C_1 + s_{25} C_{?1} C_5 = \mathbb{O}$,

$?1$ ： 解無し

➡ **NG.**

L.Ptn.6

＼	$+C_3$	$-C_2$		
$-C_3$	＼		C	
$+C_2$		＼		C
	C		＼	C
		C	C	＼

$s_{13} = -1$

1行目： $s_{12} C_{?1} C_2 - C_{?2} C_3 = \mathbb{O}$,

$?1 = 3$, $?2 = 2$, $s_{12} = +1$

2行目： $-C_3 C_1 + s_{24} C_{?1} C_4 = \mathbb{O}$,

$?1$ ： 解無し

➡ **NG.**

以上、残念ながら、期待（W9）は成り立ちません。このことと、定理（62）の証明で指摘したことを考慮すれば、次が云えます

5次の反対称行列Aに対して、2個の5次元ベクトル $\mathbb{B} = {}^t(B_1, B_2, \cdots, B_5)$, $\mathbb{C} = {}^t(C_1, C_2, \cdots, C_5)$ を用いて、Aの成分に、ラベル，添字，符号をどう配置しようとも、

- $A = A(\mathbb{B}, \mathbb{C}) = A(\mathbb{B}, \mathbb{O}) + A(\mathbb{O}, \mathbb{C})$ .1)
- $A(\mathbb{B}, \mathbb{O})\mathbb{B} = \mathbb{O}$ .2)
- $A(\mathbb{O}, \mathbb{C})\mathbb{C} = \mathbb{O}$ .3)

.2), .3) の どちらも、満たすことは不可能です。ここで配置するという意味は、Aの非対角成分を、$\pm B_i$, $\pm C_i$ で表わすという意味です。しかも真の10の自由度を持たなければなりません。このことは、$B_1, B_2, \cdots, B_5, C_1, C_2, \cdots, C_5$ の全てを用いるということです。

定理（63）

 5次の反対称行列(続き)

これしか無いというようなLJS. Ptn. は見付かりませんね。LJS. Ptn. を1つ、かってに選び、A^2, A^3, A^4, A^5 を計算してみましょう。もしかしたら、その結果あるいはその過程で、5次の反対称行列の構造を表現するのにより優れた(より相応しい)LJS. Ptn. に関する何らかの知見が得られるかも知れません。期待はしていません。LJ. Ptn. 1 & S. Ptn. 1 を用いてみることにします。

5次の反対称行列A等の定義

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .1), \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \quad .2)$$

$$A = M + N = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & \mu_2 & \mu_5 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & -\mu_1 & -\mu_4 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \quad .3)$$

定義(64)

まず、M, M^2, …, M^5 を計算しよう

$$M^2 = \begin{pmatrix} -\mu_2^2-\mu_5^2 & \mu_3\mu_5 & 0 & 0 & \mu_2\mu_4 \\ \mu_3\mu_5 & -\mu_1^2-\mu_3^2 & -\mu_1\mu_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1\mu_4 & -\mu_2^2-\mu_4^2 & -\mu_2\mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2\mu_5 & -\mu_3^2-\mu_5^2 & \mu_1\mu_3 \\ \mu_2\mu_4 & 0 & 0 & \mu_1\mu_3 & -\mu_1^2-\mu_4^2 \end{pmatrix}$$

【P223】 5次の反対称行列（続き）

$$M^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mu_3\mu_5 & 0 & 0 & \mu_2\mu_4 \\ \mu_3\mu_5 & 0 & -\mu_1\mu_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1\mu_4 & 0 & -\mu_2\mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2\mu_5 & 0 & \mu_1\mu_3 \\ \mu_2\mu_4 & 0 & 0 & \mu_1\mu_3 & 0 \end{pmatrix}}_{\langle a \rangle} - \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_2^2+\mu_5^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1^2+\mu_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2^2+\mu_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3^2+\mu_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1^2+\mu_4^2 \end{pmatrix}}_{\langle b \rangle} \qquad \text{(W10)}$$

$$M\langle a \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu_3\mu_5 & 0 & 0 & \mu_2\mu_4 \\ \mu_3\mu_5 & 0 & -\mu_1\mu_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1\mu_4 & 0 & -\mu_2\mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2\mu_5 & 0 & \mu_1\mu_3 \\ \mu_2\mu_4 & 0 & 0 & \mu_1\mu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\mu_1\mu_2\mu_4 & -\mu_2\mu_5^2 & -\mu_2^2\mu_5 & \mu_1\mu_3\mu_5 \\ \mu_1\mu_2\mu_4 & 0 & \mu_2\mu_3\mu_5 & \mu_1^2\mu_3 & -\mu_1\mu_3^2 \\ \mu_2\mu_4^2 & -\mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_4 & -\mu_2^2\mu_4 \\ \mu_3^2\mu_5 & -\mu_3\mu_5^2 & -\mu_1\mu_3\mu_4 & 0 & -\mu_2\mu_4\mu_5 \\ -\mu_1\mu_3\mu_5 & \mu_1\mu_4^2 & \mu_1^2\mu_4 & \mu_2\mu_4\mu_5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(W11)}$$

$$M\langle b \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_2^2+\mu_5^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1^2+\mu_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2^2+\mu_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3^2+\mu_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1^2+\mu_4^2 \end{pmatrix}$$

【P224】1月3日(日) 5次の反対称行列(続き)

$$M\langle b\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2^3+\mu_2\mu_4^2 & \mu_3^2\mu_5+\mu_5^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3^3-\mu_3\mu_5^2 & \mu_1^3+\mu_1\mu_4^2 \\ -\mu_2^3-\mu_2\mu_5^2 & 0 & 0 & 0 & \mu_1^2\mu_4+\mu_4^3 \\ -\mu_2^2\mu_5-\mu_5^3 & \mu_1^2\mu_3+\mu_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1^3-\mu_1\mu_3^2 & -\mu_2^2\mu_4-\mu_4^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (W12)$$

(W10), (W11), (W12)より、

$$M^3 = MM^2 = M(\langle a\rangle - \langle b\rangle) = M\langle a\rangle - M\langle b\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\mu_1\mu_2\mu_4 & 0 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_5 \\ \mu_1\mu_2\mu_4 & 0 & \mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_4 & 0 & -\mu_2\mu_4\mu_5 \\ -\mu_1\mu_3\mu_5 & 0 & 0 & \mu_2\mu_4\mu_5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2\mu_5^2+\mu_2^3+\mu_2\mu_4^2 & \mu_2^2\mu_5+\mu_3^2\mu_5+\mu_5^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_1^2\mu_3-\mu_3^3-\mu_3\mu_5^2 & \mu_1\mu_3^2+\mu_1^3+\mu_1\mu_4^2 \\ -\mu_2\mu_4^2-\mu_2^3-\mu_2\mu_5^2 & 0 & 0 & 0 & \mu_2^2\mu_4+\mu_1^2\mu_4+\mu_4^3 \\ -\mu_3^2\mu_5-\mu_2^2\mu_5-\mu_5^3 & \mu_3\mu_5^2+\mu_1^2\mu_3+\mu_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1\mu_4^2-\mu_1^3-\mu_1\mu_3^2 & -\mu_1^2\mu_4-\mu_2^2\mu_4-\mu_4^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\langle c\rangle} \qquad (W13)$$

$$\langle c\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2(\mu_2^2+\mu_4^2+\mu_5^2) & \mu_5(\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_5^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3(\mu_1^2+\mu_3^2+\mu_5^2) & \mu_1(\mu_1^2+\mu_3^2+\mu_4^2) \\ -\mu_2(\mu_2^2+\mu_4^2+\mu_5^2) & 0 & 0 & 0 & \mu_4(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_4^2) \\ -\mu_5(\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_5^2) & \mu_3(\mu_1^2+\mu_3^2+\mu_5^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1(\mu_1^2+\mu_3^2+\mu_4^2) & -\mu_4(\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_4^2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

【P225】5次の反対称行列（続き）

ここで

$$\mu=\sqrt{\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mu}}\,,\quad \mu^2=\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2+\mu_4^2+\mu_5^2 \tag{W14}$$

とおけば〈C〉は

$$\langle C\rangle=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2(\mu^2-\mu_1^2-\mu_3^2) & \mu_5(\mu^2-\mu_1^2-\mu_4^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3(\mu^2-\mu_2^2-\mu_4^2) & \mu_1(\mu^2-\mu_2^2-\mu_5^2) \\ -\mu_2(\mu^2-\mu_1^2-\mu_3^2) & 0 & 0 & 0 & \mu_4(\mu^2-\mu_3^2-\mu_5^2) \\ -\mu_5(\mu^2-\mu_1^2-\mu_4^2) & \mu_3(\mu^2-\mu_2^2-\mu_4^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1(\mu^2-\mu_2^2-\mu_5^2) & -\mu_4(\mu^2-\mu_3^2-\mu_5^2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\mu^2\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2(\mu_1^2+\mu_3^2) & \mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) & \mu_1(\mu_2^2+\mu_5^2) \\ -\mu_2(\mu_1^2+\mu_3^2) & 0 & 0 & 0 & \mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) \\ -\mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & \mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1(\mu_2^2+\mu_5^2) & -\mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{W15}$$

才1項の行列は M そのものです。才2項の行列は面白い構造をしてますね。

（W13），（W15）より M^3 は、

（次ページへ続く）

【P226】５次の反対称行列（続き）

$$
M^3 = -\mu^2 M + \begin{pmatrix} 0 & -\mu_1\mu_2\mu_4 & 0 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_5 \\ \mu_1\mu_2\mu_4 & 0 & \mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_4 & 0 & -\mu_2\mu_4\mu_5 \\ -\mu_1\mu_3\mu_5 & 0 & 0 & \mu_2\mu_4\mu_5 & 0 \end{pmatrix} \langle d \rangle
$$

$$
+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2(\mu_1^2+\mu_3^2) & \mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) & \mu_1(\mu_2^2+\mu_5^2) \\ -\mu_2(\mu_1^2+\mu_3^2) & 0 & 0 & 0 & \mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) \\ -\mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & \mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1(\mu_2^2+\mu_5^2) & -\mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \langle e \rangle
$$

(W16)

$$
M\langle d \rangle =
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mu_1\mu_2\mu_4 & 0 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_5 \\ \mu_1\mu_2\mu_4 & 0 & \mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_4 & 0 & -\mu_2\mu_4\mu_5 \\ -\mu_1\mu_3\mu_5 & 0 & 0 & \mu_2\mu_4\mu_5 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 0 & -\mu_2^2\mu_3\mu_5 & -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 & \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 & -\mu_2\mu_4\mu_5^2 \\ -\mu_1^2\mu_3\mu_5 & 0 & \mu_1\mu_3^2\mu_4 & \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 & \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 \\ -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 & \mu_1\mu_2^2\mu_4 & 0 & \mu_2\mu_4^2\mu_5 & -\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 \\ \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 & \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 & \mu_2\mu_3^2\mu_5 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_5^2 \\ -\mu_1^2\mu_2\mu_4 & \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 & -\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 & -\mu_1\mu_3\mu_4^2 & 0 \end{pmatrix}
$$

(W17)

【P227】1月5日（火）5次の反対称行列（続き）

$$M\langle d\rangle =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 & \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 & \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 \\ -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 \\ \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 & \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 & -\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & -\mu_3\mu_5\mu_2^2 & 0 & 0 & -\mu_2\mu_4\mu_5^2 \\ -\mu_3\mu_5\mu_1^2 & 0 & \mu_1\mu_4\mu_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1\mu_4\mu_2^2 & 0 & \mu_2\mu_5\mu_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2\mu_5\mu_3^2 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_5^2 \\ -\mu_2\mu_4\mu_1^2 & 0 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_4^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{W17}$$

$$M\langle e\rangle =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2(\mu_1^2+\mu_3^2) & \mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) & \mu_1(\mu_2^2+\mu_5^2) \\ -\mu_2(\mu_1^2+\mu_3^2) & 0 & 0 & 0 & \mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) \\ -\mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & \mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1(\mu_2^2+\mu_5^2) & -\mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{matrix}-\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)\\ -\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)\end{matrix} & \mu_3\mu_5(\mu_2^2+\mu_4^2) & 0 & 0 & \mu_2\mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) \\ \mu_3\mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & \begin{matrix}-\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)\\ -\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)\end{matrix} & -\mu_1\mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1\mu_4(\mu_2^2+\mu_5^2) & \begin{matrix}-\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)\\ -\mu_4^2(\mu_3^2+\mu_5^2)\end{matrix} & -\mu_2\mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2\mu_5(\mu_1^2+\mu_3^2) & \begin{matrix}-\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)\\ -\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)\end{matrix} & \mu_1\mu_3(\mu_2^2+\mu_5^2) \\ \mu_2\mu_4(\mu_1^2+\mu_3^2) & 0 & 0 & \mu_1\mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) & \begin{matrix}-\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)\\ -\mu_4^2(\mu_3^2+\mu_5^2)\end{matrix} \end{pmatrix}$$

【P228】 5次の反対称行列（続き）

$$M\langle e\rangle =$$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}-\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)\\-\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)\end{matrix} & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \begin{matrix}-\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)\\-\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)\end{matrix} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \begin{matrix}-\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)\\-\mu_4^2(\mu_3^2+\mu_5^2)\end{matrix} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \begin{matrix}-\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)\\-\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)\end{matrix} & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \begin{matrix}-\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)\\-\mu_4^2(\mu_3^2+\mu_5^2)\end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \emptyset & \mu_3\mu_5(\mu_2^2+\mu_4^2) & \emptyset & \emptyset & \mu_2\mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) \\ \mu_3\mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & \emptyset & -\mu_1\mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & -\mu_1\mu_4(\mu_2^2+\mu_5^2) & \emptyset & -\mu_2\mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & -\mu_2\mu_5(\mu_1^2+\mu_3^2) & \emptyset & \mu_1\mu_3(\mu_2^2+\mu_5^2) \\ \mu_2\mu_4(\mu_1^2+\mu_3^2) & \emptyset & \emptyset & \mu_1\mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) & \emptyset \end{pmatrix} \tag{W18}$$

(W16), (W17), (W18) より、M^4 は、

$$\begin{aligned} M^4 &= MM^3 \\ &= M(-\mu^2 M + \langle d\rangle + \langle e\rangle) \\ &= -\mu^2 M^2 + M\langle d\rangle + M\langle e\rangle \end{aligned}$$

（次ページへ続く）

【P229】1月6日（水） 5次の反対称行列（続き）

$$
M^4 = -\mu^2 M^2
- \underbrace{\begin{pmatrix}
\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)+\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_4^2(\mu_5^2+\mu_3^2) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)+\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)+\mu_4^2(\mu_3^2+\mu_5^2)
\end{pmatrix}}_{\langle f \rangle}
$$

$$
+ \underbrace{\begin{pmatrix}
0 & \mu_3\mu_5\mu_4^2 & 0 & 0 & \mu_2\mu_4\mu_3^2 \\
\mu_3\mu_5\mu_4^2 & 0 & -\mu_1\mu_4\mu_5^2 & 0 & 0 \\
0 & -\mu_1\mu_4\mu_5^2 & 0 & -\mu_2\mu_5\mu_1^2 & 0 \\
0 & 0 & -\mu_2\mu_5\mu_1^2 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_2^2 \\
\mu_2\mu_4\mu_3^2 & 0 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_2^2 & 0
\end{pmatrix}}_{\langle g \rangle}
$$

$$
+ \underbrace{\begin{pmatrix}
0 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 & \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 & \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 \\
-\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 \\
\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 & \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 & -\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & 0
\end{pmatrix}}_{\langle h \rangle}
\qquad \text{(W19)}
$$

M^3は反対称行列です。（W16）の右辺の M, ＜d＞, ＜e＞はどれも反対称行列です。（W16）に計算ミスは無いと云えるでしょう。

M^4は対称行列です。（W19）の右辺のM^2,＜f＞,＜g＞,＜h＞はどれも対称行列です。（W19）にも計算ミスは無いと云えるでしょう。M^5を計算してみれば確認できるでしょう。M自身が出現するはずです。

【P230】5次の反対称行列（続き）

$$
M\langle f\rangle =
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\
-\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\
-\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)+\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_4^2(\mu_5^2+\mu_3^2) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)+\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)+\mu_4^2(\mu_3^2+\mu_5^2)
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & \mu_2\{\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_4^2(\mu_5^2+\mu_3^2)\} & \mu_5\{\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)+\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)\} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\mu_3\{\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)+\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)\} & \mu_1\{\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)+\mu_4^2(\mu_3^2+\mu_5^2)\} \\
-\mu_2\{\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)\} & 0 & 0 & 0 & \mu_4\{\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)+\mu_4^2(\mu_3^2+\mu_5^2)\} \\
-\mu_5\{\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)\} & \mu_3\{\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)+\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)\} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\mu_1\{\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)+\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)\} & -\mu_4\{\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_4^2(\mu_5^2+\mu_3^2)\} & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{W20}
$$

【P231】1月7日（木）5次の反対称行列（続き）

$M\langle g\rangle =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu_3\mu_5\mu_4^2 & 0 & 0 & \mu_2\mu_4\mu_3^2 \\ \mu_3\mu_5\mu_4^2 & 0 & -\mu_1\mu_4\mu_5^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1\mu_4\mu_5^2 & 0 & -\mu_2\mu_5\mu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2\mu_5\mu_1^2 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_2^2 \\ \mu_2\mu_4\mu_3^2 & 0 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\mu_1\mu_2\mu_4\mu_5^2 & -\mu_2\mu_5^2\mu_1^2 & -\mu_5\mu_1^2\mu_2^2 & \mu_1\mu_3\mu_5\mu_2^2 \\ \mu_1\mu_2\mu_4\mu_3^2 & 0 & \mu_2\mu_3\mu_5\mu_1^2 & \mu_3\mu_1^2\mu_2^2 & -\mu_1\mu_2^2\mu_3^2 \\ \mu_2\mu_3^2\mu_4^2 & -\mu_2\mu_3\mu_5\mu_4^2 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_4\mu_2^2 & -\mu_4\mu_2^2\mu_3^2 \\ \mu_5\mu_3^2\mu_4^2 & -\mu_3\mu_4^2\mu_5^2 & -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5^2 & 0 & -\mu_2\mu_4\mu_5\mu_3^2 \\ -\mu_1\mu_3\mu_5\mu_4^2 & \mu_1\mu_4^2\mu_5^2 & \mu_4\mu_5^2\mu_1^2 & \mu_2\mu_4\mu_5\mu_1^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (W21)$$

$M\langle h\rangle =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 & \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 & \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 \\ -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 \\ \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 & \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 & -\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5^2 & 0 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_5\mu_2^2 \\ -\mu_1\mu_2\mu_4\mu_3^2 & 0 & -\mu_2\mu_3\mu_5\mu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2\mu_3\mu_5\mu_4^2 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_4\mu_5^2 & 0 & \mu_2\mu_4\mu_5\mu_3^2 \\ \mu_1\mu_3\mu_5\mu_4^2 & 0 & 0 & -\mu_2\mu_4\mu_5\mu_1^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (W22)$$

【P232】5次の反対称行列（続き）

(W19), (W20), (W21), (W22) より

$$M^5 = MM^4 = M(-\mu^2 M^2 - \langle f \rangle + \langle g \rangle + \langle h \rangle)$$

$$= -\mu^2 M^3 - M\langle f \rangle + M\langle g \rangle + M\langle h \rangle$$

$$= -\mu^2 M^3 +$$

$$\begin{pmatrix}
0 & -\mu_1\mu_2\mu_4\mu_5^2 + \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5^2 & -\mu_2\{\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_4^2(\mu_5^2+\mu_3^2)\} - \mu_2\mu_5^2\mu_1^2 & -\mu_5\{\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)+\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)\} - \mu_5\mu_1^2\mu_2^2 & \mu_1\mu_3\mu_5\mu_2^2 - \mu_1\mu_3\mu_5\mu_2^2 \\
\mu_1\mu_2\mu_4\mu_3^2 - \mu_1\mu_2\mu_4\mu_3^2 & 0 & \mu_2\mu_3\mu_5\mu_1^2 - \mu_2\mu_3\mu_5\mu_1^2 & \mu_3\{\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)+\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)\} + \mu_3\mu_1^2\mu_2^2 & -\mu_1\{\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)+\mu_4^2(\mu_3^2+\mu_5^2)\} - \mu_1\mu_2^2\mu_3^2 \\
\mu_2\{\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)\} + \mu_2\mu_3^2\mu_4^2 & -\mu_2\mu_3\mu_5\mu_4^2 + \mu_2\mu_3\mu_5\mu_4^2 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_4\mu_2^2 - \mu_1\mu_3\mu_4\mu_2^2 & -\mu_4\{\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)+\mu_4^2(\mu_3^2+\mu_5^2)\} - \mu_4\mu_2^2\mu_3^2 \\
\mu_5\{\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_5^2(\mu_1^2+\mu_4^2)\} + \mu_5\mu_3^2\mu_4^2 & -\mu_3\{\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)+\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)\} - \mu_3\mu_4^2\mu_5^2 & -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5^2 + \mu_1\mu_3\mu_4\mu_5^2 & 0 & -\mu_2\mu_4\mu_5\mu_3^2 + \mu_2\mu_4\mu_5\mu_3^2 \\
-\mu_1\mu_3\mu_5\mu_4^2 + \mu_1\mu_3\mu_5\mu_4^2 & \mu_1\{\mu_3^2(\mu_2^2+\mu_4^2)+\mu_1^2(\mu_2^2+\mu_5^2)\} + \mu_1\mu_4^2\mu_5^2 & \mu_4\{\mu_2^2(\mu_1^2+\mu_3^2)+\mu_4^2(\mu_5^2+\mu_3^2)\} + \mu_4\mu_5^2\mu_1^2 & \mu_2\mu_4\mu_5\mu_1^2 - \mu_2\mu_4\mu_5\mu_1^2 & 0
\end{pmatrix}$$

ここで α を次式で定義すると

$$\alpha = \mu_1^2\mu_2^2 + \mu_2^2\mu_3^2 + \mu_3^2\mu_4^2 + \mu_4^2\mu_5^2 + \mu_5^2\mu_1^2 \qquad \text{(W23)}$$

$$M^5 = -\mu^2 M^3 - \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = -\mu^2 M^3 - \alpha M \qquad \text{(W24)}$$

【P233】1月8日（金） 5次の反対称行列（続き）

Mに関する恒等式をまとめて再記しておきましょう

$$\mu = {}^t(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5), \quad \mu = \sqrt{\mu\cdot\mu} \tag{.1}$$

$$\alpha = \mu_1^2\mu_2^2 + \mu_2^2\mu_3^2 + \mu_3^2\mu_4^2 + \mu_4^2\mu_5^2 + \mu_5^2\mu_1^2 \tag{.2}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{.3}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3\mu_5 & 0 & 0 & \mu_2\mu_4 \\ \mu_3\mu_5 & 0 & -\mu_1\mu_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1\mu_4 & 0 & -\mu_2\mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2\mu_5 & 0 & \mu_1\mu_3 \\ \mu_2\mu_4 & 0 & 0 & \mu_1\mu_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{.4}$$

〈a〉

$$- \begin{pmatrix} \mu_2^2+\mu_5^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1^2+\mu_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2^2+\mu_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3^2+\mu_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_1^2+\mu_4^2 \end{pmatrix}$$

〈b〉

$$M^3 = -\mu^2 M + \langle d\rangle \begin{pmatrix} 0 & -\mu_1\mu_2\mu_4 & 0 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_5 \\ \mu_1\mu_2\mu_4 & 0 & \mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_4 & 0 & -\mu_2\mu_4\mu_5 \\ -\mu_1\mu_3\mu_5 & 0 & 0 & \mu_2\mu_4\mu_5 & 0 \end{pmatrix} \quad .5)$$

$$+ \langle e\rangle \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2(\mu_1^2+\mu_3^2) & \mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) & \mu_1(\mu_2^2+\mu_5^2) \\ -\mu_2(\mu_1^2+\mu_3^2) & 0 & 0 & 0 & \mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) \\ -\mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) & \mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1(\mu_2^2+\mu_5^2) & -\mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = -\mu^2 M^2 \quad .6)$$

$$- \langle f\rangle \begin{pmatrix} \alpha-\mu_3^2\mu_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\mu_4^2\mu_5^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\mu_5^2\mu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\mu_1^2\mu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-\mu_2^2\mu_3^2 \end{pmatrix}$$

$$+ \langle g\rangle \begin{pmatrix} 0 & \mu_3\mu_5\mu_4^2 & 0 & 0 & \mu_2\mu_4\mu_3^2 \\ \mu_3\mu_5\mu_4^2 & 0 & -\mu_1\mu_4\mu_5^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1\mu_4\mu_5^2 & 0 & -\mu_2\mu_5\mu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_2\mu_5\mu_1^2 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_2^2 \\ \mu_2\mu_4\mu_3^2 & 0 & 0 & \mu_1\mu_3\mu_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ \langle h\rangle \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 & \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 & \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 \\ -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 & 0 & 0 & 0 & -\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 \\ \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 & \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 & -\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = -\mu^2 M^3 - \alpha M \quad .7)$$

定理(64)

【P235】1月9日（土）5次の反対称行列（続き）

$N, N^2, \cdots, N^5$ を計算しよう。

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\nu_3^2-\nu_4^2 & 0 & \nu_4\nu_5 & -\nu_2\nu_3 & 0 \\ 0 & -\nu_4^2-\nu_5^2 & 0 & \nu_5\nu_1 & -\nu_3\nu_4 \\ \nu_4\nu_5 & 0 & -\nu_5^2-\nu_1^2 & 0 & \nu_1\nu_2 \\ -\nu_2\nu_3 & \nu_5\nu_1 & 0 & -\nu_1^2-\nu_2^2 & 0 \\ 0 & -\nu_3\nu_4 & \nu_1\nu_2 & 0 & -\nu_2^2-\nu_3^2 \end{pmatrix}$$

$$N^2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu_4\nu_5 & -\nu_2\nu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_5\nu_1 & -\nu_3\nu_4 \\ \nu_4\nu_5 & 0 & 0 & 0 & \nu_1\nu_2 \\ -\nu_2\nu_3 & \nu_5\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ & -\nu_3\nu_4 & \nu_1\nu_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\langle a\rangle'} - \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_3^2+\nu_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_4^2+\nu_5^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_5^2+\nu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1^2+\nu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_2^2+\nu_3^2 \end{pmatrix}}_{\langle b\rangle'} \quad (W25)$$

$$N\langle a\rangle' = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu_4\nu_5 & -\nu_2\nu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_5\nu_1 & -\nu_3\nu_4 \\ \nu_4\nu_5 & 0 & 0 & 0 & \nu_1\nu_2 \\ -\nu_2\nu_3 & \nu_5\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_3\nu_4 & \nu_1\nu_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

【P236】5次の反対称行列（続き）

$$N\langle a\rangle' = \begin{pmatrix} 0 & \nu_4\nu_3^2 & -\nu_1\nu_2\nu_3 & -\nu_4\nu_5\nu_1 & \nu_3\nu_4^2 \\ -\nu_4\nu_5^2 & 0 & \nu_5\nu_4^2 & -\nu_2\nu_3\nu_4 & -\nu_5\nu_1\nu_2 \\ \nu_1\nu_2\nu_3 & -\nu_5\nu_1^2 & 0 & \nu_1\nu_5^2 & -\nu_3\nu_4\nu_5 \\ \nu_4\nu_5\nu_1 & \nu_2\nu_3\nu_4 & -\nu_1\nu_2^2 & 0 & \nu_2\nu_1^2 \\ -\nu_3\nu_2^2 & \nu_5\nu_1\nu_2 & \nu_3\nu_4\nu_5 & -\nu_2\nu_3^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N\langle a\rangle' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3 & -\nu_4\nu_5\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4 & -\nu_5\nu_1\nu_2 \\ \nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & 0 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5 \\ \nu_4\nu_5\nu_1 & \nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5\nu_1\nu_2 & \nu_3\nu_4\nu_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(W26)}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \nu_4\nu_3^2 & 0 & 0 & \nu_3\nu_4^2 \\ -\nu_4\nu_5^2 & 0 & \nu_5\nu_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_5\nu_1^2 & 0 & \nu_1\nu_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_1\nu_2^2 & 0 & \nu_2\nu_1^2 \\ -\nu_3\nu_2^2 & 0 & 0 & -\nu_2\nu_3^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N\langle b\rangle' = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_3^2+\nu_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_4^2+\nu_5^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_5^2+\nu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1^2+\nu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_2^2+\nu_3^2 \end{pmatrix}$$

 1月10日(日) 5次の反対称行列(続き)

$$N\langle b\rangle' = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 & 0 & -\nu_3(\nu_2^2+\nu_3^2) \\ \nu_4(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & -\nu_5(\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 & -\nu_1(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1(\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & -\nu_2(\nu_2^2+\nu_3^2) \\ \nu_3(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & 0 & \nu_2(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(W27)}$$

(W25), (W26), (W27)より

$$N^3 = NN^2 = N(\langle a\rangle' - \langle b\rangle') = N\langle a\rangle' - N\langle b\rangle'$$

$$N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3 & -\nu_4\nu_5\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4 & -\nu_5\nu_1\nu_2 \\ \nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & 0 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5 \\ \nu_4\nu_5\nu_1 & \nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5\nu_1\nu_2 & \nu_3\nu_4\nu_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(W28)}$$

$$- \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\nu_4(\nu_3^2+\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 & 0 & -\nu_3(\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_4^2) \\ \nu_4(\nu_3^2+\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 & -\nu_5(\nu_4^2+\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5(\nu_4^2+\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & -\nu_1(\nu_5^2+\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1(\nu_5^2+\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 & -\nu_2(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2) \\ \nu_3(\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & 0 & \nu_2(\nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 \end{pmatrix}}_{\langle c\rangle'}$$

ここで

$$\nu = \sqrt{\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}}, \qquad \nu^2 = \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_4^2+\nu_5^2 \qquad \text{(W29)}$$

とおけば $\langle c\rangle'$ は、

(次ページへ続く)

【P238】5次の反対称行列（続き）

$$\langle c\rangle' = \nu^2 N - \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 & 0 & -\nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) \\ \nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 & -\nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & -\nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & -\nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) \\ \nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & 0 & \nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 \end{pmatrix} \quad (W30)$$

(W28), (W30) より

$$N^3 = -\nu^2 N + \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 & 0 & -\nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) \\ \nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 & -\nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & -\nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & -\nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) \\ \nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & 0 & \nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 \end{pmatrix} \langle d\rangle'$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3 & -\nu_4\nu_5\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4 & -\nu_5\nu_1\nu_2 \\ \nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & 0 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5 \\ \nu_4\nu_5\nu_1 & \nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5\nu_1\nu_2 & \nu_3\nu_4\nu_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \langle e\rangle'$$

(W31)

$$N\langle d\rangle' =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 & 0 & -\nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) \\ \nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 & -\nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & -\nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & -\nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) \\ \nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & 0 & \nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 \end{pmatrix}$$

【P239】1月11日（月）5次の反対称行列（続き）

$$N\langle d\rangle' =$$

$$\begin{pmatrix}
-\nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2) -\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & \nu_4\nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) & -\nu_2\nu_3(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 \\
0 & -\nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2) -\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & \nu_5\nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) & -\nu_3\nu_4(\nu_5^2+\nu_1^2) \\
\nu_4\nu_5(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 & -\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2) -\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & \nu_1\nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) \\
-\nu_2\nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) & \nu_5\nu_1(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & -\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2) -\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 \\
0 & -\nu_3\nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) & \nu_1\nu_2(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & -\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2) -\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2)
\end{pmatrix}$$

$$N\langle d\rangle' =$$

$$-\begin{pmatrix}
\nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2)+\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2)+\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2)+\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2)
\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}
0 & 0 & \nu_4\nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) & -\nu_2\nu_3(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & \nu_5\nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) & -\nu_3\nu_4(\nu_5^2+\nu_1^2) \\
\nu_4\nu_5(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 & 0 & 0 & \nu_1\nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) \\
-\nu_2\nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) & \nu_5\nu_1(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\nu_3\nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) & \nu_1\nu_2(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

(W32)

【P240】5次の反対称行列（続き）

$$N\langle e\rangle' =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3 & -\nu_4\nu_5\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4 & -\nu_5\nu_1\nu_2 \\ \nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & 0 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5 \\ \nu_4\nu_5\nu_1 & \nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5\nu_1\nu_2 & \nu_3\nu_4\nu_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3 & -\nu_4\nu_5\nu_3^2 & \nu_2\nu_3\nu_4^2 & \nu_4\nu_5\nu_1\nu_2 \\ -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 & -\nu_5\nu_1\nu_4^2 & \nu_3\nu_4\nu_5^2 \\ -\nu_4\nu_5\nu_1^2 & -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5 & -\nu_1\nu_2\nu_5^2 \\ \nu_2\nu_3\nu_1^2 & -\nu_5\nu_1\nu_2^2 & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1 \\ \nu_4\nu_5\nu_1\nu_2 & \nu_3\nu_4\nu_2^2 & -\nu_1\nu_2\nu_3^2 & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N\langle e\rangle' =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & 0 & \nu_4\nu_5\nu_1\nu_2 \\ -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1 \\ \nu_4\nu_5\nu_1\nu_2 & 0 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (W33)$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nu_4\nu_5\nu_3^2 & \nu_2\nu_3\nu_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu_5\nu_1\nu_4^2 & \nu_3\nu_4\nu_5^2 \\ -\nu_4\nu_5\nu_1^2 & 0 & 0 & 0 & -\nu_1\nu_2\nu_5^2 \\ \nu_2\nu_3\nu_1^2 & -\nu_5\nu_1\nu_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_3\nu_4\nu_2^2 & -\nu_1\nu_2\nu_3^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

【P241】 1月12日(火) 5次の反対称行列(続き)

(W31),(W32),(W33)より

$$N^4 = NN^3 = -\nu^2 N^2 + N\langle d\rangle' + N\langle e\rangle'$$

$$N^4 = -\nu^2 N^2$$

$$- \begin{pmatrix} \nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2)+\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2)+\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2)+\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2) \end{pmatrix}_{\langle f\rangle'}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & 0 & \nu_4\nu_5\nu_1\nu_2 \\ -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1 \\ \nu_4\nu_5\nu_1\nu_2 & 0 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1 & 0 \end{pmatrix}_{\langle g\rangle'}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu_4\nu_5\nu_2^2 & -\nu_2\nu_3\nu_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_5\nu_1\nu_3^2 & -\nu_3\nu_4\nu_1^2 \\ \nu_4\nu_5\nu_2^2 & 0 & 0 & 0 & \nu_1\nu_2\nu_4^2 \\ -\nu_2\nu_3\nu_5^2 & \nu_5\nu_1\nu_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_3\nu_4\nu_1^2 & \nu_1\nu_2\nu_4^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\langle h\rangle'} \qquad \text{(W34)}$$

N^3は反対称行列です。(W31)の右辺の3つの行列も全て反対称行列です。N^4は対称行列です。(W34)の右辺の4つの行列も全て対称行列です。(W31),(W34)に計算ミスは無いでしょう。N^5にNそのものが出現すれば(W34)の正しさが確認されることになるでしょう。

【P242】5次の反対称行列（続き）

$$N\langle f\rangle' =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2)+\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2)+\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2)+\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4\{\nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2)\} & 0 & 0 & -\nu_3\{\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2)+\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2)\} \\ \nu_4\{\nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2)\} & 0 & -\nu_5\{\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2)+\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2)\} & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5\{\nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2)\} & 0 & -\nu_1\{\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2)+\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2)\} & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1\{\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2)+\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2)\} & 0 & -\nu_2\{\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2)+\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2)\} \\ \nu_3\{\nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2)\} & 0 & 0 & \nu_2\{\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2)+\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2)\} & 0 \end{pmatrix}$$

(W35)

【P243】 1月13日（水） 5次の反対称行列（続き）

$N\langle g\rangle' =$

$$\begin{pmatrix} \emptyset & -\nu_4 & \emptyset & \emptyset & -\nu_3 \\ \nu_4 & \emptyset & -\nu_5 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \nu_5 & \emptyset & -\nu_1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \nu_1 & \emptyset & -\nu_2 \\ \nu_3 & \emptyset & \emptyset & \nu_2 & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \emptyset & -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3 & \emptyset & \emptyset & \nu_4\nu_5\nu_1\nu_2 \\ -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3 & \emptyset & -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 & \emptyset & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5 & \emptyset & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1 \\ \nu_4\nu_5\nu_1\nu_2 & \emptyset & \emptyset & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1 & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \nu_1\nu_2\nu_3\nu_4^2 & \nu_4\nu_5\nu_1\nu_3^2 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \nu_2\nu_3\nu_4\nu_5^2 & \nu_5\nu_1\nu_2\nu_4^2 \\ -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_5^2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \nu_3\nu_4\nu_5\nu_1^2 \\ -\nu_4\nu_5\nu_1\nu_2^2 & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_1^2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3^2 & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_2^2 & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \quad \text{(W36)}$$

$N\langle h\rangle' =$

$$\begin{pmatrix} \emptyset & -\nu_4 & \emptyset & \emptyset & -\nu_3 \\ \nu_4 & \emptyset & -\nu_5 & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \nu_5 & \emptyset & -\nu_1 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \nu_1 & \emptyset & -\nu_2 \\ \nu_3 & \emptyset & \emptyset & \nu_2 & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \nu_4\nu_5\nu_2^2 & -\nu_2\nu_3\nu_5^2 & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \nu_5\nu_1\nu_3^2 & -\nu_3\nu_4\nu_1^2 \\ \nu_4\nu_5\nu_2^2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & \nu_1\nu_2\nu_4^2 \\ -\nu_2\nu_3\nu_5^2 & \nu_5\nu_1\nu_3^2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & -\nu_3\nu_4\nu_1^2 & \nu_1\nu_2\nu_4^2 & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \emptyset & \nu_4\nu_1^2\nu_3^2 & -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4^2 & -\nu_4\nu_5\nu_1\nu_3^2 & \nu_3\nu_1^2\nu_4^2 \\ -\nu_4\nu_2^2\nu_5^2 & \emptyset & \nu_5\nu_2^2\nu_4^2 & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5^2 & -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_4^2 \\ \nu_1\nu_2\nu_3\nu_5^2 & -\nu_5\nu_1^2\nu_3^2 & \emptyset & \nu_1\nu_3^2\nu_5^2 & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1^2 \\ \nu_4\nu_5\nu_1\nu_2^2 & \nu_2\nu_3\nu_4\nu_1^2 & -\nu_1\nu_2^2\nu_4^2 & \emptyset & \nu_2\nu_1^2\nu_4^2 \\ -\nu_3\nu_2^2\nu_5^2 & \nu_5\nu_1\nu_2\nu_3^2 & \nu_3\nu_4\nu_5\nu_2^2 & -\nu_2\nu_3^2\nu_5^2 & \emptyset \end{pmatrix} \quad \text{(W37)}$$

【P244】 5次の反対称行列（続き）

（W34），（W35），（W36），（W37）より

$$N^5 = NN^4 = N\left(-\nu^2 N^2 - \langle f \rangle' + \langle g \rangle' + \langle h \rangle'\right)$$

$$= -\nu^2 N^3 - N\langle f \rangle' + N\langle g \rangle' + N\langle h \rangle'$$

$$= -\nu^2 N^3 -$$

$$\begin{pmatrix}
0 & \begin{array}{l}-\nu_4\{\nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\\ \quad\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2)\}\\ -\nu_4\nu_1^2\nu_3^2\end{array} & \begin{array}{l}-\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4^2\\ +\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4^2\end{array} & \begin{array}{l}-\nu_4\nu_5\nu_1\nu_3^2\\ +\nu_4\nu_5\nu_1\nu_3^2\end{array} & \begin{array}{l}-\nu_3\{\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2)+\\ \quad\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2)\}\\ -\nu_3\nu_1^2\nu_4^2\end{array} \\
\begin{array}{l}\nu_4\{\nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\\ \quad\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2)\}\\ +\nu_4\nu_2^2\nu_5^2\end{array} & 0 & \begin{array}{l}-\nu_5\{\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2)+\\ \quad\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2)\}\\ -\nu_5\nu_2^2\nu_4^2\end{array} & \begin{array}{l}-\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5^2\\ +\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5^2\end{array} & \begin{array}{l}-\nu_5\nu_1\nu_2\nu_4^2\\ +\nu_5\nu_1\nu_2\nu_4^2\end{array} \\
\begin{array}{l}\nu_1\nu_2\nu_3\nu_5^2\\ -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_5^2\end{array} & \begin{array}{l}\nu_5\{\nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\\ \quad\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2)\}\\ +\nu_5\nu_1^2\nu_3^2\end{array} & 0 & \begin{array}{l}-\nu_1\{\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2)+\\ \quad\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2)\}\\ -\nu_1\nu_3^2\nu_5^2\end{array} & \begin{array}{l}-\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1^2\\ +\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1^2\end{array} \\
\begin{array}{l}\nu_4\nu_5\nu_1\nu_2^2\\ -\nu_4\nu_5\nu_1\nu_2^2\end{array} & \begin{array}{l}\nu_2\nu_3\nu_4\nu_1^2\\ -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_1^2\end{array} & \begin{array}{l}\nu_1\{\nu_5^2(\nu_2^2+\nu_3^2)+\\ \quad\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2)\}\\ +\nu_1\nu_2^2\nu_4^2\end{array} & 0 & \begin{array}{l}-\nu_2\{\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2)+\\ \quad\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2)\}\\ -\nu_2\nu_1^2\nu_4^2\end{array} \\
\begin{array}{l}\nu_3\{\nu_4^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+\\ \quad\nu_3^2(\nu_5^2+\nu_1^2)\}\\ +\nu_3\nu_2^2\nu_5^2\end{array} & \begin{array}{l}\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3^2\\ -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3^2\end{array} & \begin{array}{l}\nu_3\nu_4\nu_5\nu_2^2\\ -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_2^2\end{array} & \begin{array}{l}\nu_2\{\nu_1^2(\nu_3^2+\nu_4^2)+\\ \quad\nu_2^2(\nu_4^2+\nu_5^2)\}\\ +\nu_2\nu_3^2\nu_5^2\end{array} & 0
\end{pmatrix}$$

ここでβを次式で定義すると

$$\beta = \nu_1^2\nu_3^2 + \nu_3^2\nu_5^2 + \nu_5^2\nu_2^2 + \nu_2^2\nu_4^2 + \nu_4^2\nu_1^2 \qquad \text{(W38)}$$

$$N^5 = -\nu^2 N^3 - \beta \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} = -\nu^2 N^3 - \beta N \qquad \text{(W39)}$$

Nに関する恒等式をまとめて再記しておきましょう。

$$\boldsymbol{\nu} = {}^t(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5), \quad \nu = \sqrt{\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}} \qquad .1)$$

$$\beta = \nu_1^2\nu_3^2 + \nu_3^2\nu_5^2 + \nu_5^2\nu_2^2 + \nu_2^2\nu_4^2 + \nu_4^2\nu_1^2 \qquad .2)$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad .3)$$

$$N^2 = \underset{\langle a\rangle}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu_4\nu_5 & -\nu_2\nu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_5\nu_1 & -\nu_3\nu_4 \\ \nu_4\nu_5 & 0 & 0 & 0 & \nu_1\nu_2 \\ -\nu_2\nu_3 & \nu_5\nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_3\nu_4 & \nu_1\nu_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad .4)$$

$$- \underset{\langle b\rangle}{\begin{pmatrix} \nu_3^2+\nu_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_4^2+\nu_5^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_5^2+\nu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1^2+\nu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_2^2+\nu_3^2 \end{pmatrix}}$$

 5次の反対称行列（続き）

$$N^3 = -\nu^2 N + \begin{array}{cc} & \\ \langle d\rangle' & \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 & 0 & -\nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) \\ \nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) & 0 & -\nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) & 0 & -\nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) & 0 & -\nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) \\ \nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) & 0 & 0 & \nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad .5)$$

$$+ \begin{array}{cc} & \\ \langle e\rangle' & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3 & -\nu_4\nu_5\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4 & -\nu_5\nu_1\nu_2 \\ \nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & 0 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5 \\ \nu_4\nu_5\nu_1 & \nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5\nu_1\nu_2 & \nu_3\nu_4\nu_5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$N^4 = -\nu^2 N^2 \quad .6)$$

$$- \begin{array}{cc} & \\ \langle f\rangle' & \begin{pmatrix} \beta-\nu_5^2\nu_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\nu_1^2\nu_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-\nu_2^2\nu_4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-\nu_3^2\nu_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-\nu_4^2\nu_1^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$+ \begin{array}{cc} & \\ \langle g\rangle' & \begin{pmatrix} 0 & -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & 0 & \nu_4\nu_5\nu_1\nu_2 \\ -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3 & 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1 \\ \nu_4\nu_5\nu_1\nu_2 & 0 & 0 & -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$+ \begin{array}{cc} & \\ \langle h\rangle' & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \nu_4\nu_5\nu_2^2 & -\nu_2\nu_3\nu_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_5\nu_1\nu_3^2 & -\nu_3\nu_4\nu_1^2 \\ \nu_4\nu_5\nu_2^2 & 0 & 0 & 0 & \nu_1\nu_2\nu_4^2 \\ -\nu_2\nu_3\nu_5^2 & \nu_5\nu_1\nu_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_3\nu_4\nu_1^2 & \nu_1\nu_2\nu_4^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$N^5 = -\nu^2 N^3 - \beta N \quad .7)$$

定理(65)

 5次の反対称行列（続き）

M, M^2, M^3, M^4 と N, N^2, N^3, N^4 との混合積等の計算を行いましょう。

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mu_2\nu_5 & \mu_5\nu_1 & -\mu_2\nu_1 & -\mu_5\nu_2 \\ \mu_1\nu_3 & 0 & -\mu_3\nu_1 & \mu_1\nu_2 & \mu_3\nu_2 \\ \mu_4\nu_3 & \mu_2\nu_4 & 0 & \mu_4\nu_2 & \mu_2\nu_3 \\ \mu_3\nu_4 & \mu_5\nu_4 & -\mu_3\nu_5 & 0 & \mu_5\nu_3 \\ -\mu_1\nu_4 & -\mu_4\nu_5 & \mu_1\nu_5 & \mu_4\nu_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (W40)$$

$$NM = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mu_1\nu_3 & \mu_4\nu_3 & \mu_3\nu_4 & -\mu_1\nu_4 \\ \mu_2\nu_5 & 0 & \mu_2\nu_4 & \mu_5\nu_4 & -\mu_4\nu_5 \\ \mu_5\nu_1 & -\mu_3\nu_1 & 0 & -\mu_3\nu_5 & \mu_1\nu_5 \\ -\mu_2\nu_1 & \mu_1\nu_2 & \mu_4\nu_2 & 0 & \mu_4\nu_1 \\ -\mu_5\nu_2 & \mu_3\nu_2 & \mu_2\nu_3 & \mu_5\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (W41)$$

$$MN + NM \quad (W42)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \mu_1\nu_3+\mu_2\nu_5 & \mu_4\nu_3+\mu_5\nu_1 & \mu_3\nu_4-\mu_2\nu_1 & -\mu_1\nu_4-\mu_5\nu_2 \\ \mu_1\nu_3+\mu_2\nu_5 & 0 & \mu_2\nu_4-\mu_3\nu_1 & \mu_5\nu_4+\mu_1\nu_2 & \mu_3\nu_2-\mu_4\nu_5 \\ \mu_4\nu_3+\mu_5\nu_1 & \mu_2\nu_4-\mu_3\nu_1 & 0 & \mu_4\nu_2-\mu_3\nu_5 & \mu_1\nu_5+\mu_2\nu_3 \\ \mu_3\nu_4-\mu_2\nu_1 & \mu_5\nu_4+\mu_1\nu_2 & \mu_4\nu_2-\mu_3\nu_5 & 0 & \mu_4\nu_1+\mu_5\nu_3 \\ -\mu_1\nu_4-\mu_5\nu_2 & \mu_3\nu_2-\mu_4\nu_5 & \mu_1\nu_5+\mu_2\nu_3 & \mu_4\nu_1+\mu_5\nu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

 1月16日(土) 5次の反対称行列(続き)

$$M^2N = M(MN) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu_2\nu_5 & \mu_5\nu_1 & -\mu_2\nu_1 & -\mu_5\nu_2 \\ \mu_1\nu_3 & 0 & -\mu_3\nu_1 & \mu_1\nu_2 & \mu_3\nu_2 \\ \mu_4\nu_3 & \mu_2\nu_4 & 0 & \mu_4\nu_2 & \mu_2\nu_3 \\ \mu_3\nu_4 & \mu_5\nu_4 & -\mu_3\nu_5 & 0 & \mu_5\nu_3 \\ -\mu_1\nu_4 & -\mu_4\nu_5 & \mu_1\nu_5 & \mu_4\nu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_2\mu_4\nu_3+\mu_3\mu_5\nu_4 & \mu_2^2\nu_4+\mu_5^2\nu_4 & -\mu_3\mu_5\nu_5 & \mu_4\mu_2\nu_2 & \mu_2^2\nu_3+\mu_5^2\nu_3 \\ -\mu_3^2\nu_4-\mu_1^2\nu_4 & -\mu_3\mu_5\nu_4-\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_3^2\nu_5+\mu_1^2\nu_5 & \mu_4\mu_1\nu_1 & -\mu_5\mu_3\nu_3 \\ -\mu_1\mu_4\nu_4 & -\mu_2^2\nu_5-\mu_4^2\nu_5 & -\mu_5\mu_2\nu_1+\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_2^2\nu_1+\mu_4^2\nu_1 & \mu_5\mu_2\nu_2 \\ \mu_1\mu_3\nu_3 & -\mu_2\mu_5\nu_5 & -\mu_5^2\nu_1-\mu_3^2\nu_1 & \mu_5\mu_2\nu_1+\mu_1\mu_3\nu_2 & \mu_5^2\nu_2+\mu_3^2\nu_2 \\ -\mu_1^2\nu_3-\mu_4^2\nu_3 & -\mu_2\mu_4\nu_4 & \mu_3\mu_1\nu_1 & -\mu_1^2\nu_2-\mu_4^2\nu_2 & -\mu_1\mu_3\nu_2-\mu_2\mu_4\nu_3 \end{pmatrix} \quad \text{(W43)}$$

$$NM^2 = (NM)M =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_1\nu_3 & \mu_4\nu_3 & \mu_3\nu_4 & -\mu_1\nu_4 \\ \mu_2\nu_5 & 0 & \mu_2\nu_4 & \mu_5\nu_4 & -\mu_4\nu_5 \\ \mu_5\nu_1 & -\mu_3\nu_1 & 0 & -\mu_3\nu_5 & \mu_1\nu_5 \\ -\mu_2\nu_1 & \mu_1\nu_2 & \mu_4\nu_2 & 0 & \mu_4\nu_1 \\ -\mu_5\nu_2 & \mu_3\nu_2 & \mu_2\nu_3 & \mu_5\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\mu_2\mu_4\nu_3-\mu_3\mu_5\nu_4 & \mu_3^2\nu_4+\mu_1^2\nu_4 & \mu_1\mu_4\nu_4 & -\mu_1\mu_3\nu_3 & \mu_1^2\nu_3+\mu_4^2\nu_3 \\ -\mu_2^2\nu_4-\mu_5^2\nu_4 & \mu_3\mu_5\nu_4+\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_2^2\nu_5+\mu_4^2\nu_5 & \mu_2\mu_5\nu_5 & \mu_2\mu_4\nu_4 \\ \mu_3\mu_5\nu_5 & -\mu_3^2\nu_5-\mu_1^2\nu_5 & \mu_5\mu_2\nu_1-\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_5^2\nu_1+\mu_3^2\nu_1 & -\mu_3\mu_1\nu_1 \\ -\mu_4\mu_2\nu_2 & -\mu_4\mu_1\nu_1 & -\mu_2^2\nu_1-\mu_4^2\nu_1 & -\mu_5\mu_2\nu_1-\mu_1\mu_3\nu_2 & \mu_1^2\nu_2+\mu_4^2\nu_2 \\ -\mu_2^2\nu_3-\mu_5^2\nu_3 & \mu_5\mu_3\nu_3 & -\mu_5\mu_2\nu_2 & -\mu_5^2\nu_2-\mu_3^2\nu_2 & \mu_1\mu_3\nu_2+\mu_2\mu_4\nu_3 \end{pmatrix} \quad \text{(W44)}$$

$$M^2N + NM^2 \quad \text{(W45)}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (\mu^2-\mu_4^2)\nu_4 & \mu_1\mu_4\nu_4-\mu_3\mu_5\nu_5 & \mu_4\mu_2\nu_2-\mu_1\mu_3\nu_3 & (\mu^2-\mu_3^2)\nu_3 \\ -(\mu^2-\mu_4^2)\nu_4 & 0 & (\mu^2-\mu_5^2)\nu_5 & \mu_2\mu_5\nu_5+\mu_4\mu_1\nu_1 & \mu_2\mu_4\nu_4-\mu_5\mu_3\nu_3 \\ -\mu_1\mu_4\nu_4+\mu_3\mu_5\nu_5 & -(\mu^2-\mu_5^2)\nu_5 & 0 & (\mu^2-\mu_1^2)\nu_1 & \mu_5\mu_2\nu_2-\mu_3\mu_1\nu_1 \\ -\mu_4\mu_2\nu_2+\mu_1\mu_4\nu_4 & -\mu_2\mu_5\nu_5-\mu_4\mu_1\nu_1 & -(\mu^2-\mu_1^2)\nu_1 & 0 & (\mu^2-\mu_2^2)\nu_2 \\ -(\mu^2-\mu_3^2)\nu_3 & -\mu_2\mu_4\nu_4+\mu_5\mu_3\nu_3 & -\mu_5\mu_2\nu_2+\mu_3\mu_1\nu_1 & -(\mu^2-\mu_2^2)\nu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

【P249】1月17日（日） 5次の反対称行列（続き）

$$N^2M = N(NM) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \nu_3\mu_1 & \nu_3\mu_4 & \nu_4\mu_3 & -\nu_4\mu_1 \\ \nu_5\mu_2 & 0 & \nu_4\mu_2 & \nu_4\mu_5 & -\nu_5\mu_4 \\ \nu_1\mu_5 & -\nu_1\mu_3 & 0 & -\nu_5\mu_3 & \nu_5\mu_1 \\ -\nu_1\mu_2 & \nu_2\mu_1 & \nu_2\mu_4 & 0 & \nu_1\mu_4 \\ -\nu_2\mu_5 & \nu_2\mu_3 & \nu_3\mu_2 & \nu_3\mu_5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\nu_4\nu_5\mu_2+\nu_2\nu_3\mu_5 & -\nu_2\nu_3\mu_3 & -\nu_4^2\mu_2-\nu_3^2\mu_2 & -\nu_4^2\mu_5-\nu_3^2\mu_5 & \nu_5\nu_4\mu_4 \\ -\nu_1\nu_5\mu_5 & \nu_3\nu_4\mu_1+\nu_5\nu_1\mu_3 & \nu_3\nu_4\mu_4 & \nu_4^2\mu_3+\nu_5^2\mu_3 & -\nu_4^2\mu_1-\nu_5^2\mu_1 \\ \nu_5^2\mu_2+\nu_1^2\mu_2 & -\nu_2\nu_1\mu_1 & \nu_4\nu_5\mu_2-\nu_1\nu_2\mu_4 & \nu_4\nu_5\mu_5 & -\nu_5^2\mu_4-\nu_1^2\mu_4 \\ \nu_1^2\mu_5+\nu_2^2\mu_5 & -\nu_1^2\mu_3-\nu_2^2\mu_3 & -\nu_3\nu_2\mu_2 & -\nu_5\nu_1\mu_3-\nu_2\nu_3\mu_5 & \nu_5\nu_1\mu_1 \\ -\nu_1\nu_2\mu_2 & \nu_3^2\mu_1+\nu_2^2\mu_1 & \nu_3^2\mu_4+\nu_2^2\mu_4 & \nu_4\nu_3\mu_3 & -\nu_3\nu_4\mu_1+\nu_1\nu_2\mu_4 \end{pmatrix} \qquad \text{(W46)}$$

$$MN^2 = (MN)N =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu_5\mu_2 & \nu_1\mu_5 & -\nu_1\mu_2 & -\nu_2\mu_5 \\ \nu_3\mu_1 & 0 & -\nu_1\mu_3 & \nu_2\mu_1 & \nu_2\mu_3 \\ \nu_3\mu_4 & \nu_4\mu_2 & 0 & \nu_2\mu_4 & \nu_3\mu_2 \\ \nu_4\mu_3 & \nu_4\mu_5 & -\nu_5\mu_3 & 0 & \nu_3\mu_5 \\ -\nu_4\mu_1 & -\nu_5\mu_4 & \nu_5\mu_1 & \nu_1\mu_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \nu_4\nu_5\mu_2-\nu_2\nu_3\mu_5 & \nu_1\nu_5\mu_5 & -\nu_5^2\mu_2-\nu_1^2\mu_2 & -\nu_1^2\mu_5-\nu_2^2\mu_5 & \nu_1\nu_2\mu_2 \\ \nu_2\nu_3\mu_3 & -\nu_3\nu_4\mu_1-\nu_5\nu_1\mu_3 & \nu_2\nu_1\mu_1 & \nu_1^2\mu_3+\nu_2^2\mu_3 & -\nu_3^2\mu_1-\nu_2^2\mu_1 \\ \nu_4^2\mu_2+\nu_3^2\mu_2 & -\nu_3\nu_4\mu_4 & -\nu_4\nu_5\mu_2+\nu_1\nu_2\mu_4 & \nu_3\nu_2\mu_2 & -\nu_3^2\mu_4-\nu_2^2\mu_4 \\ \nu_4^2\mu_5+\nu_3^2\mu_5 & -\nu_4^2\mu_3-\nu_5^2\mu_3 & -\nu_4\nu_5\mu_5 & \nu_5\nu_1\mu_3+\nu_2\nu_3\mu_5 & -\nu_4\nu_3\mu_3 \\ -\nu_5\nu_4\mu_4 & \nu_4^2\mu_1+\nu_5^2\mu_1 & \nu_5^2\mu_4+\nu_1^2\mu_4 & -\nu_5\nu_1\mu_1 & \nu_3\nu_4\mu_1-\nu_1\nu_2\mu_4 \end{pmatrix} \qquad \text{(W47)}$$

$$N^2M + MN^2 \qquad \text{(W48)}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\nu_2\nu_3\mu_3+\nu_1\nu_5\mu_5 & -(\nu^2-\nu_2^2)\mu_2 & -(\nu^2-\nu_5^2)\mu_5 & \nu_5\nu_4\mu_4+\nu_1\nu_2\mu_2 \\ \nu_2\nu_3\mu_3-\nu_1\nu_5\mu_5 & 0 & \nu_3\nu_4\mu_4+\nu_2\nu_1\mu_1 & (\nu^2-\nu_3^2)\mu_3 & -(\nu^2-\nu_1^2)\mu_1 \\ (\nu^2-\nu_2^2)\mu_2 & -\nu_3\nu_4\mu_4-\nu_2\nu_1\mu_1 & 0 & \nu_4\nu_5\mu_5+\nu_3\nu_2\mu_2 & -(\nu^2-\nu_4^2)\mu_4 \\ (\nu^2-\nu_5^2)\mu_5 & -(\nu^2-\nu_3^2)\mu_3 & -\nu_4\nu_5\mu_5-\nu_3\nu_2\mu_2 & 0 & \nu_5\nu_1\mu_1-\nu_4\nu_3\mu_3 \\ -\nu_5\nu_4\mu_4-\nu_1\nu_2\mu_2 & (\nu^2-\nu_1^2)\mu_1 & (\nu^2-\nu_4^2)\mu_4 & -\nu_5\nu_1\mu_1+\nu_4\nu_3\mu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

【P250】1月18日(月) 5次の反対称行列(続き)

$$MNM = M(NM) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu_1\nu_3 & \mu_4\nu_3 & \mu_3\nu_4 & -\mu_1\nu_4 \\ \mu_2\nu_5 & 0 & \mu_2\nu_4 & \mu_5\nu_4 & -\mu_4\nu_5 \\ \mu_5\nu_1 & -\mu_3\nu_1 & 0 & -\mu_3\nu_5 & \mu_1\nu_5 \\ -\mu_2\nu_1 & \mu_1\nu_2 & \mu_4\nu_2 & 0 & \mu_4\nu_1 \\ -\mu_5\nu_2 & \mu_3\nu_2 & \mu_2\nu_3 & \mu_5\nu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\mu_2\mu_3\nu_1+\mu_5\mu_1\nu_2 & \mu_4\mu_5\nu_2 & -\mu_2\mu_3\nu_5 & \mu_1\mu_2\nu_5+\mu_4\mu_5\nu_1 \\ \mu_2\mu_3\nu_1-\mu_5\mu_1\nu_2 & 0 & \mu_1\mu_2\nu_3-\mu_3\mu_4\nu_2 & \mu_5\mu_1\nu_3 & -\mu_3\mu_4\nu_1 \\ -\mu_4\mu_5\nu_2 & -\mu_1\mu_2\nu_3+\mu_3\mu_4\nu_2 & 0 & -\mu_2\mu_3\nu_4+\mu_4\mu_5\nu_3 & \mu_1\mu_2\nu_4 \\ \mu_2\mu_3\nu_5 & -\mu_5\mu_1\nu_3 & \mu_2\mu_3\nu_4-\mu_4\mu_5\nu_3 & 0 & \mu_5\mu_1\nu_4-\mu_3\mu_4\nu_5 \\ -\mu_1\mu_2\nu_5-\mu_4\mu_5\nu_1 & \mu_3\mu_4\nu_1 & -\mu_1\mu_2\nu_4 & -\mu_5\mu_1\nu_4+\mu_3\mu_4\nu_5 & 0 \end{pmatrix} \quad (W49)$$

$$NMN = N(MN) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \nu_5\mu_2 & \nu_1\mu_5 & -\nu_1\mu_2 & -\nu_2\mu_5 \\ \nu_3\mu_1 & 0 & -\nu_1\mu_3 & \nu_2\mu_1 & \nu_2\mu_3 \\ \nu_3\mu_4 & \nu_4\mu_2 & 0 & \nu_2\mu_4 & \nu_3\mu_2 \\ \nu_4\mu_3 & \nu_4\mu_5 & -\nu_5\mu_3 & 0 & \nu_3\mu_5 \\ -\nu_4\mu_1 & -\nu_5\mu_4 & \nu_5\mu_1 & \nu_1\mu_4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \nu_3\nu_5\mu_4 & \nu_1\nu_4\mu_3-\nu_3\nu_5\mu_1 & -\nu_2\nu_4\mu_1-\nu_1\nu_3\mu_4 & -\nu_2\nu_4\mu_3 \\ -\nu_3\nu_5\mu_4 & 0 & \nu_1\nu_4\mu_5 & -\nu_1\nu_4\mu_2-\nu_2\nu_5\mu_4 & -\nu_2\nu_4\mu_5-\nu_3\nu_5\mu_2 \\ -\nu_1\nu_4\mu_3+\nu_3\nu_5\mu_1 & -\nu_1\nu_4\mu_5 & 0 & \nu_2\nu_5\mu_1 & \nu_2\nu_5\mu_3-\nu_1\nu_3\mu_5 \\ \nu_2\nu_4\mu_1+\nu_1\nu_3\mu_4 & \nu_1\nu_4\mu_2+\nu_2\nu_5\mu_4 & -\nu_2\nu_5\mu_1 & 0 & \nu_1\nu_3\mu_2 \\ \nu_2\nu_4\mu_3 & \nu_2\nu_4\mu_5+\nu_3\nu_5\mu_2 & -\nu_2\nu_5\mu_3+\nu_1\nu_3\mu_5 & -\nu_1\nu_3\mu_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (W50)$$

【P251】1月19日（火） 5次の反対称行列（続き）

$$MN = \tag{.1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_2\nu_5 & \mu_5\nu_1 & -\mu_2\nu_1 & -\mu_5\nu_2 \\ \mu_1\nu_3 & 0 & -\mu_3\nu_1 & \mu_1\nu_2 & \mu_3\nu_2 \\ \mu_4\nu_3 & \mu_2\nu_4 & 0 & \mu_4\nu_2 & \mu_2\nu_3 \\ \mu_3\nu_4 & \mu_5\nu_4 & -\mu_3\nu_5 & 0 & \mu_5\nu_3 \\ -\mu_1\nu_4 & -\mu_4\nu_5 & \mu_1\nu_5 & \mu_4\nu_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$NM = \tag{.2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_1\nu_3 & \mu_4\nu_3 & \mu_3\nu_4 & -\mu_1\nu_4 \\ \mu_2\nu_5 & 0 & \mu_2\nu_4 & \mu_5\nu_4 & -\mu_4\nu_5 \\ \mu_5\nu_1 & -\mu_3\nu_1 & 0 & -\mu_3\nu_5 & \mu_1\nu_5 \\ -\mu_2\nu_1 & \mu_1\nu_2 & \mu_4\nu_2 & 0 & \mu_4\nu_1 \\ -\mu_5\nu_2 & \mu_3\nu_2 & \mu_2\nu_3 & \mu_5\nu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MN + NM = \tag{.3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_1\nu_3+\mu_2\nu_5 & \mu_4\nu_3+\mu_5\nu_1 & \mu_3\nu_4-\mu_2\nu_1 & -\mu_1\nu_4-\mu_5\nu_2 \\ \mu_1\nu_3+\mu_2\nu_5 & 0 & \mu_2\nu_4-\mu_3\nu_1 & \mu_5\nu_4+\mu_1\nu_2 & \mu_3\nu_2-\mu_4\nu_5 \\ \mu_4\nu_3+\mu_5\nu_1 & \mu_2\nu_4-\mu_3\nu_1 & 0 & \mu_4\nu_2-\mu_3\nu_5 & \mu_1\nu_5+\mu_2\nu_3 \\ \mu_3\nu_4-\mu_2\nu_1 & \mu_5\nu_4+\mu_1\nu_2 & \mu_4\nu_2-\mu_3\nu_5 & 0 & \mu_4\nu_1+\mu_5\nu_3 \\ -\mu_1\nu_4-\mu_5\nu_2 & \mu_3\nu_2-\mu_4\nu_5 & \mu_1\nu_5+\mu_2\nu_3 & \mu_4\nu_1+\mu_5\nu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2N = \tag{.4}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_2\mu_4\nu_3+\mu_3\mu_5\nu_4 & \mu_2^2\nu_4+\mu_5^2\nu_4 & -\mu_3\mu_5\nu_5 & \mu_4\mu_2\nu_2 & \mu_2^2\nu_3+\mu_5^2\nu_3 \\ -\mu_3^2\nu_4-\mu_1^2\nu_4 & -\mu_3\mu_5\nu_4-\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_3^2\nu_5+\mu_1^2\nu_5 & \mu_4\mu_1\nu_1 & -\mu_5\mu_3\nu_3 \\ -\mu_1\mu_4\nu_4 & -\mu_2^2\nu_5-\mu_4^2\nu_5 & -\mu_5\mu_2\nu_1+\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_2^2\nu_1+\mu_4^2\nu_1 & \mu_5\mu_2\nu_2 \\ \mu_1\mu_3\nu_3 & -\mu_2\mu_5\nu_5 & -\mu_5^2\nu_1-\mu_3^2\nu_1 & \mu_5\mu_2\nu_1+\mu_1\mu_3\nu_2 & \mu_5^2\nu_2+\mu_3^2\nu_2 \\ -\mu_1^2\nu_3-\mu_4^2\nu_3 & -\mu_2\mu_4\nu_4 & \mu_3\mu_1\nu_1 & -\mu_1^2\nu_2-\mu_4^2\nu_2 & -\mu_1\mu_3\nu_2-\mu_2\mu_4\nu_3 \end{pmatrix}$$

$$NM^2 = \qquad .5)$$

$$\begin{pmatrix}
-\mu_2\mu_4\nu_3-\mu_3\mu_5\nu_4 & \mu_3^2\nu_4+\mu_1^2\nu_4 & \mu_1\mu_4\nu_4 & -\mu_1\mu_3\nu_3 & \mu_1^2\nu_3+\mu_4^2\nu_3 \\
-\mu_2^2\nu_4-\mu_5^2\nu_4 & \mu_3\mu_5\nu_4+\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_2^2\nu_5+\mu_4^2\nu_5 & \mu_2\mu_5\nu_5 & \mu_2\mu_4\nu_4 \\
\mu_3\mu_5\nu_5 & -\mu_3^2\nu_5-\mu_1^2\nu_5 & \mu_5\mu_2\nu_1-\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_5^2\nu_1+\mu_3^2\nu_1 & -\mu_3\mu_1\nu_1 \\
-\mu_4\mu_2\nu_2 & -\mu_4\mu_1\nu_1 & -\mu_2^2\nu_1-\mu_4^2\nu_1 & -\mu_5\mu_2\nu_1-\mu_1\mu_3\nu_2 & \mu_1^2\nu_2+\mu_4^2\nu_2 \\
-\mu_2^2\nu_3-\mu_5^2\nu_3 & \mu_5\mu_3\nu_3 & -\mu_5\mu_2\nu_2 & -\mu_5^2\nu_2-\mu_3^2\nu_2 & \mu_1\mu_3\nu_2+\mu_2\mu_4\nu_3
\end{pmatrix}$$

$$M^2N + NM^2 = \qquad .6)$$

$$\begin{pmatrix}
\Theta & (\mu^2-\mu_4^2)\nu_4 & \mu_1\mu_4\nu_4-\mu_3\mu_5\nu_5 & \mu_4\mu_2\nu_2-\mu_1\mu_3\nu_3 & (\mu^2-\mu_3^2)\nu_3 \\
-(\mu^2-\mu_4^2)\nu_4 & \Theta & (\mu^2-\mu_5^2)\nu_5 & \mu_2\mu_5\nu_5+\mu_4\mu_1\nu_1 & \mu_2\mu_4\nu_4-\mu_5\mu_3\nu_3 \\
-\mu_1\mu_4\nu_4+\mu_3\mu_5\nu_5 & -(\mu^2-\mu_5^2)\nu_5 & \Theta & (\mu^2-\mu_1^2)\nu_1 & \mu_5\mu_2\nu_2-\mu_3\mu_1\nu_1 \\
-\mu_4\mu_2\nu_2+\mu_1\mu_4\nu_4 & -\mu_2\mu_5\nu_5-\mu_4\mu_1\nu_1 & -(\mu^2-\mu_1^2)\nu_1 & \Theta & (\mu^2-\mu_2^2)\nu_2 \\
-(\mu^2-\mu_3^2)\nu_3 & -\mu_2\mu_4\nu_4+\mu_5\mu_3\nu_3 & -\mu_5\mu_2\nu_2+\mu_3\mu_1\nu_1 & -(\mu^2-\mu_2^2)\nu_2 & \Theta
\end{pmatrix}$$

$$N^2M = \qquad .7)$$

$$\begin{pmatrix}
-\nu_4\nu_5\mu_2+\nu_2\nu_3\mu_5 & -\nu_2\nu_3\mu_3 & -\nu_4^2\mu_2-\nu_3^2\mu_2 & -\nu_4^2\mu_5-\nu_3^2\mu_5 & \nu_5\nu_4\mu_4 \\
-\nu_1\nu_5\mu_5 & \nu_3\nu_4\mu_1+\nu_5\nu_1\mu_3 & \nu_3\nu_4\mu_4 & \nu_4^2\mu_3+\nu_5^2\mu_3 & -\nu_4^2\mu_1-\nu_5^2\mu_1 \\
\nu_5^2\mu_2+\nu_1^2\mu_2 & -\nu_2\nu_1\mu_1 & \nu_4\nu_5\mu_2-\nu_1\nu_2\mu_4 & \nu_4\nu_5\mu_5 & -\nu_5^2\mu_4-\nu_1^2\mu_4 \\
\nu_1^2\mu_5+\nu_2^2\mu_5 & -\nu_1^2\mu_3-\nu_2^2\mu_3 & -\nu_3\nu_2\mu_2 & -\nu_5\nu_1\mu_3-\nu_2\nu_3\mu_5 & \nu_5\nu_1\mu_1 \\
-\nu_1\nu_2\mu_2 & \nu_3^2\mu_1+\nu_2^2\mu_1 & \nu_3^2\mu_4+\nu_2^2\mu_4 & \nu_4\nu_3\mu_3 & -\nu_3\nu_4\mu_1+\nu_1\nu_2\mu_4
\end{pmatrix}$$

$$MN^2 = \qquad .8)$$

$$\begin{pmatrix}
\nu_4\nu_5\mu_2-\nu_2\nu_3\mu_5 & \nu_1\nu_5\mu_5 & -\nu_5^2\mu_2-\nu_1^2\mu_2 & -\nu_1^2\mu_5-\nu_2^2\mu_5 & \nu_1\nu_2\mu_2 \\
\nu_2\nu_3\mu_3 & -\nu_3\nu_4\mu_1-\nu_5\nu_1\mu_3 & \nu_2\nu_1\mu_1 & \nu_1^2\mu_3+\nu_2^2\mu_3 & -\nu_3^2\mu_1-\nu_2^2\mu_1 \\
\nu_4^2\mu_2+\nu_3^2\mu_2 & -\nu_3\nu_4\mu_4 & -\nu_4\nu_5\mu_2+\nu_1\nu_2\mu_4 & \nu_3\nu_2\mu_2 & -\nu_3^2\mu_4-\nu_2^2\mu_4 \\
\nu_4^2\mu_5+\nu_3^2\mu_5 & -\nu_4^2\mu_3-\nu_5^2\mu_3 & -\nu_4\nu_5\mu_5 & \nu_5\nu_1\mu_3+\nu_2\nu_3\mu_5 & -\nu_4\nu_3\mu_3 \\
-\nu_5\nu_4\mu_4 & \nu_4^2\mu_1+\nu_5^2\mu_1 & \nu_5^2\mu_4+\nu_1^2\mu_4 & -\nu_5\nu_1\mu_1 & \nu_3\nu_4\mu_1-\nu_1\nu_2\mu_4
\end{pmatrix}$$

$$N^2M + MN^2 = \tag{.9}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & -\nu_2\nu_3\mu_3+\nu_1\nu_5\mu_5 & -(\nu^2-\nu_2^2)\mu_2 & -(\nu^2-\nu_5^2)\mu_5 & \nu_5\nu_4\mu_4+\nu_1\nu_2\mu_2 \\
\nu_2\nu_3\mu_3-\nu_1\nu_5\mu_5 & 0 & \nu_3\nu_4\mu_4+\nu_2\nu_1\mu_1 & (\nu^2-\nu_3^2)\mu_3 & -(\nu^2-\nu_1^2)\mu_1 \\
(\nu^2-\nu_2^2)\mu_2 & -\nu_3\nu_4\mu_4-\nu_2\nu_1\mu_1 & 0 & \nu_4\nu_5\mu_5+\nu_3\nu_2\mu_2 & -(\nu^2-\nu_4^2)\mu_4 \\
(\nu^2-\nu_5^2)\mu_5 & -(\nu^2-\nu_3^2)\mu_3 & -\nu_4\nu_5\mu_5-\nu_3\nu_2\mu_2 & 0 & \nu_5\nu_1\mu_1-\nu_4\nu_3\mu_3 \\
-\nu_5\nu_4\mu_4-\nu_1\nu_2\mu_2 & (\nu^2-\nu_1^2)\mu_1 & (\nu^2-\nu_4^2)\mu_4 & -\nu_5\nu_1\mu_1+\nu_4\nu_3\mu_3 & 0
\end{pmatrix}$$

$$MNM = \tag{.10}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & -\mu_2\mu_3\nu_1+\mu_5\mu_1\nu_2 & \mu_4\mu_5\nu_2 & -\mu_2\mu_3\nu_5 & \mu_1\mu_2\nu_5+\mu_4\mu_5\nu_1 \\
\mu_2\mu_3\nu_1-\mu_5\mu_1\nu_2 & 0 & \mu_1\mu_2\nu_3-\mu_3\mu_4\nu_2 & \mu_5\mu_1\nu_3 & -\mu_3\mu_4\nu_1 \\
-\mu_4\mu_5\nu_2 & -\mu_1\mu_2\nu_3+\mu_3\mu_4\nu_2 & 0 & -\mu_2\mu_3\nu_4+\mu_4\mu_5\nu_3 & \mu_1\mu_2\nu_4 \\
\mu_2\mu_3\nu_5 & -\mu_5\mu_1\nu_3 & \mu_2\mu_3\nu_4-\mu_4\mu_5\nu_3 & 0 & \mu_5\mu_1\nu_4-\mu_3\mu_4\nu_5 \\
-\mu_1\mu_2\nu_5-\mu_4\mu_5\nu_1 & \mu_3\mu_4\nu_1 & -\mu_1\mu_2\nu_4 & -\mu_5\mu_1\nu_4+\mu_3\mu_4\nu_5 & 0
\end{pmatrix}$$

$$NMN = \tag{.11}$$

$$\begin{pmatrix}
0 & \nu_3\nu_5\mu_4 & \nu_1\nu_4\mu_3-\nu_3\nu_5\mu_1 & -\nu_2\nu_4\mu_1-\nu_1\nu_3\mu_4 & -\nu_2\nu_4\mu_3 \\
-\nu_3\nu_5\mu_4 & 0 & \nu_1\nu_4\mu_5 & -\nu_1\nu_4\mu_2-\nu_2\nu_5\mu_4 & -\nu_2\nu_4\mu_5-\nu_3\nu_5\mu_2 \\
-\nu_1\nu_4\mu_3+\nu_3\nu_5\mu_1 & -\nu_1\nu_4\mu_5 & 0 & \nu_2\nu_5\mu_1 & \nu_2\nu_5\mu_3-\nu_1\nu_3\mu_5 \\
\nu_2\nu_4\mu_1+\nu_1\nu_3\mu_4 & \nu_1\nu_4\mu_2+\nu_2\nu_5\mu_4 & -\nu_2\nu_5\mu_1 & 0 & \nu_1\nu_3\mu_2 \\
\nu_2\nu_4\mu_3 & \nu_2\nu_4\mu_5+\nu_3\nu_5\mu_2 & -\nu_2\nu_5\mu_3+\nu_1\nu_3\mu_5 & -\nu_1\nu_3\mu_2 & 0
\end{pmatrix}$$

定理(66)

【P254】1月22日（金）5次の反対称行列（続き）

$$M^3N = M(M^2N) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_2\mu_4\nu_3+\mu_3\mu_5\nu_4 & \mu_2^2\nu_4+\mu_5^2\nu_4 & -\mu_3\mu_5\nu_5 & \mu_4\mu_2\nu_2 & \mu_2^2\nu_3+\mu_5^2\nu_3 \\ -\mu_3^2\nu_4-\mu_1^2\nu_4 & -\mu_3\mu_5\nu_4-\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_3^2\nu_5+\mu_1^2\nu_5 & \mu_4\mu_1\nu_1 & -\mu_5\mu_3\nu_3 \\ -\mu_1\mu_4\nu_4 & -\mu_2^2\nu_5-\mu_4^2\nu_5 & -\mu_5\mu_2\nu_1+\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_2^2\nu_1+\mu_4^2\nu_1 & \mu_5\mu_2\nu_2 \\ \mu_1\mu_3\nu_3 & -\mu_2\mu_5\nu_5 & -\mu_5^2\nu_1-\mu_3^2\nu_1 & \mu_5\mu_2\nu_1+\mu_1\mu_3\nu_2 & \mu_5^2\nu_2+\mu_3^2\nu_2 \\ -\mu_1^2\nu_3-\mu_4^2\nu_3 & -\mu_2\mu_4\nu_4 & \mu_3\mu_1\nu_1 & -\mu_1^2\nu_2-\mu_4^2\nu_2 & -\mu_1\mu_3\nu_2-\mu_2\mu_4\nu_3 \end{pmatrix}$$

$=$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4\\+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_2^3\nu_5-\mu_2\mu_4^2\nu_5\\-\mu_2\mu_5^2\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_5\mu_2^2\nu_1+\mu_4\mu_1\mu_2\nu_5\\-\mu_5\mu_3^2\nu_1-\mu_5^3\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_2^3\nu_1+\mu_2\mu_4^2\nu_1\\+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_2+\mu_2\mu_5^2\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_5\mu_2^2\nu_2\\+\mu_5\mu_3^2\nu_2+\mu_5^3\nu_2\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\mu_1\mu_3^2\nu_3\\-\mu_1\mu_4^2\nu_3-\mu_1^3\nu_3\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5\\-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_3\mu_5^2\nu_1+\mu_3^3\nu_1\\+\mu_3\mu_1^2\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_5\mu_2\mu_3\nu_1-\mu_1\mu_3^2\nu_2\\-\mu_1^3\nu_2-\mu_1\mu_4^2\nu_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_3\mu_5^2\nu_2-\mu_3^3\nu_2\\-\mu_3\mu_1^2\nu_2-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_3\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\mu_4\mu_2^2\nu_3-\mu_2\mu_3\mu_5\nu_4\\-\mu_4\mu_1^2\nu_3-\mu_4^3\nu_3\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_2^3\nu_4-\mu_2\mu_5^2\nu_4\\-\mu_2\mu_4^2\nu_4\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5\\+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_4\mu_2^2\nu_2\\-\mu_4\mu_1^2\nu_2-\mu_4^3\nu_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_2^3\nu_3-\mu_2\mu_5^2\nu_3\\-\mu_1\mu_3\mu_4\nu_2-\mu_2\mu_4^2\nu_3\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\mu_3\mu_4\mu_5\nu_3-\mu_3\mu_5^2\nu_4\\-\mu_3^3\nu_4-\mu_3\mu_1^2\nu_4\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_5\mu_2^2\nu_4-\mu_5^3\nu_4\\-\mu_5\mu_3^2\nu_4-\mu_3\mu_4\mu_1\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_3\mu_5^2\nu_5\\+\mu_3\mu_1^2\nu_5+\mu_3^3\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2\\+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_5\mu_2^2\nu_3-\mu_5^3\nu_3\\-\mu_5\mu_3^2\nu_3\end{matrix} \\ \begin{matrix}\mu_1^3\nu_4+\mu_1\mu_3^2\nu_4\\+\mu_1\mu_4^2\nu_4\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_1\mu_3\mu_5\nu_4+\mu_4\mu_1^2\nu_5\\+\mu_4^3\nu_5+\mu_4\mu_2^2\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_1^3\nu_5-\mu_1\mu_3^2\nu_5\\+\mu_4\mu_5\mu_2\nu_1-\mu_1\mu_4^2\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_4\mu_1^2\nu_1\\-\mu_4\mu_2^2\nu_1-\mu_4^3\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3\\-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2\end{matrix} \end{pmatrix}$$

(W51)

$$NM^3 = (-N)(-M)(-M)(-M)$$

$$= ({}^tN)({}^tM)({}^tM)({}^tM) = {}^t(MMMN) = {}^t(M^3N) \qquad \text{(W52)}$$

【P255】1月23日（土） 5次の反対称行列（続き）

$$M^3N = \tag{.1}$$

$$\begin{pmatrix}
-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 & -\mu_2^3\nu_5-\mu_2\mu_4^2\nu_5-\mu_2\mu_5^2\nu_5 & -\mu_5\mu_2^2\nu_1+\mu_4\mu_1\mu_2\nu_5-\mu_5\mu_3^2\nu_1-\mu_5^3\nu_1 & \mu_2^3\nu_1+\mu_2\mu_4^2\nu_1+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_2+\mu_2\mu_5^2\nu_1 & \mu_5\mu_2^2\nu_2+\mu_5\mu_3^2\nu_2+\mu_5^3\nu_2 \\
-\mu_1\mu_3^2\nu_3-\mu_1\mu_4^2\nu_3-\mu_1^3\nu_3 & \mu_2\mu_3\mu_5\nu_5-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 & \mu_3\mu_5^2\nu_1+\mu_3^3\nu_1+\mu_3\mu_1^2\nu_1 & -\mu_5\mu_2\mu_3\nu_1-\mu_1\mu_3^2\nu_2-\mu_1^3\nu_2-\mu_1\mu_4^2\nu_2 & -\mu_3\mu_5^2\nu_2-\mu_3^3\nu_2-\mu_3\mu_1^2\nu_2-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_3 \\
-\mu_4\mu_2^2\nu_3-\mu_2\mu_3\mu_5\nu_4-\mu_4\mu_1^2\nu_3-\mu_4^3\nu_3 & -\mu_2^3\nu_4-\mu_2\mu_5^2\nu_4-\mu_2\mu_4^2\nu_4 & \mu_2\mu_3\mu_5\nu_5+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 & -\mu_4\mu_2^2\nu_2-\mu_4\mu_1^2\nu_2-\mu_4^3\nu_2 & -\mu_2^3\nu_3-\mu_2\mu_5^2\nu_3-\mu_1\mu_3\mu_4\nu_2-\mu_2\mu_4^2\nu_3 \\
-\mu_2\mu_4\mu_5\nu_3-\mu_3\mu_5^2\nu_4-\mu_3^3\nu_4-\mu_3\mu_1^2\nu_4 & -\mu_5\mu_2^2\nu_4-\mu_5^3\nu_4-\mu_5\mu_3^2\nu_4-\mu_3\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_3\mu_5^2\nu_5+\mu_3\mu_1^2\nu_5+\mu_3^3\nu_5 & -\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 & -\mu_5\mu_2^2\nu_3-\mu_5^3\nu_3-\mu_5\mu_3^2\nu_3 \\
\mu_1^3\nu_4+\mu_1\mu_3^2\nu_4+\mu_1\mu_4^2\nu_4 & \mu_1\mu_3\mu_5\nu_4+\mu_4\mu_1^2\nu_5+\mu_4^3\nu_5+\mu_4\mu_2^2\nu_5 & -\mu_1^3\nu_5-\mu_1\mu_3^2\nu_5+\mu_4\mu_5\mu_2\nu_1-\mu_1\mu_4^2\nu_5 & -\mu_4\mu_1^2\nu_1-\mu_4\mu_2^2\nu_1-\mu_4^3\nu_1 & \mu_5\mu_1\mu_3\nu_3-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2
\end{pmatrix}$$

$$NM^3 = \tag{.2}$$

$$\begin{pmatrix}
-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 & -\mu_1\mu_3^2\nu_3-\mu_1\mu_4^2\nu_3-\mu_1^3\nu_3 & -\mu_4\mu_2^2\nu_3-\mu_2\mu_3\mu_5\nu_4-\mu_4\mu_1^2\nu_3-\mu_4^3\nu_3 & -\mu_2\mu_4\mu_5\nu_3-\mu_3\mu_5^2\nu_4-\mu_3^3\nu_4-\mu_3\mu_1^2\nu_4 & \mu_1^3\nu_4+\mu_1\mu_3^2\nu_4+\mu_1\mu_4^2\nu_4 \\
-\mu_2^3\nu_5-\mu_2\mu_4^2\nu_5-\mu_2\mu_5^2\nu_5 & \mu_2\mu_3\mu_5\nu_5-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 & -\mu_2^3\nu_4-\mu_2\mu_5^2\nu_4-\mu_2\mu_4^2\nu_4 & -\mu_5\mu_2^2\nu_4-\mu_5^3\nu_4-\mu_5\mu_3^2\nu_4-\mu_3\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_1\mu_3\mu_5\nu_4+\mu_4\mu_1^2\nu_5+\mu_4^3\nu_5+\mu_4\mu_2^2\nu_5 \\
-\mu_5\mu_2^2\nu_1+\mu_4\mu_1\mu_2\nu_5-\mu_5\mu_3^2\nu_1-\mu_5^3\nu_1 & \mu_3\mu_5^2\nu_1+\mu_3^3\nu_1+\mu_3\mu_1^2\nu_1 & \mu_2\mu_3\mu_5\nu_5+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 & \mu_3\mu_5^2\nu_5+\mu_3\mu_1^2\nu_5+\mu_3^3\nu_5 & -\mu_1^3\nu_5-\mu_1\mu_3^2\nu_5+\mu_4\mu_5\mu_2\nu_1-\mu_1\mu_4^2\nu_5 \\
\mu_2^3\nu_1+\mu_2\mu_4^2\nu_1+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_2+\mu_2\mu_5^2\nu_1 & -\mu_5\mu_2\mu_3\nu_1-\mu_1\mu_3^2\nu_2-\mu_1^3\nu_2-\mu_1\mu_4^2\nu_2 & -\mu_4\mu_2^2\nu_2-\mu_4\mu_1^2\nu_2-\mu_4^3\nu_2 & -\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 & -\mu_4\mu_1^2\nu_1-\mu_4\mu_2^2\nu_1-\mu_4^3\nu_1 \\
\mu_5\mu_2^2\nu_2+\mu_5\mu_3^2\nu_2+\mu_5^3\nu_2 & -\mu_3\mu_5^2\nu_2-\mu_3^3\nu_2-\mu_3\mu_1^2\nu_2-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_3 & -\mu_2^3\nu_3-\mu_2\mu_5^2\nu_3-\mu_1\mu_3\mu_4\nu_2-\mu_2\mu_4^2\nu_3 & -\mu_5\mu_2^2\nu_3-\mu_5^3\nu_3-\mu_5\mu_3^2\nu_3 & \mu_5\mu_1\mu_3\nu_3-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2
\end{pmatrix}$$

定理（67）

 5次の反対称行列(続き)

$$N^3M = N(N^2M) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\nu_4\nu_5\mu_2+\nu_2\nu_3\mu_5 & -\nu_2\nu_3\mu_3 & -\nu_4^2\mu_2-\nu_3^2\mu_2 & -\nu_4^2\mu_5-\nu_3^2\mu_5 & \nu_5\nu_4\mu_4 \\ -\nu_1\nu_5\mu_5 & \nu_3\nu_4\mu_1+\nu_5\nu_1\mu_3 & \nu_3\nu_4\mu_4 & \nu_4^2\mu_3+\nu_5^2\mu_3 & -\nu_4^2\mu_1-\nu_5^2\mu_1 \\ \nu_5^2\mu_2+\nu_1^2\mu_2 & -\nu_2\nu_1\mu_1 & \nu_4\nu_5\mu_2-\nu_1\nu_2\mu_4 & \nu_4\nu_5\mu_5 & -\nu_5^2\mu_4-\nu_1^2\mu_4 \\ \nu_1^2\mu_5+\nu_2^2\mu_5 & -\nu_1^2\mu_3-\nu_2^2\mu_3 & -\nu_3\nu_2\mu_2 & -\nu_5\nu_1\mu_3-\nu_2\nu_3\mu_5 & \nu_5\nu_1\mu_1 \\ -\nu_1\nu_2\mu_2 & \nu_3^2\mu_1+\nu_2^2\mu_1 & \nu_3^2\mu_4+\nu_2^2\mu_4 & \nu_4\nu_3\mu_3 & -\nu_3\nu_4\mu_1+\nu_1\nu_2\mu_4 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}\nu_4\nu_1\nu_5\mu_5 \\ +\nu_3\nu_1\nu_2\mu_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_3\nu_4^2\mu_1-\nu_4\nu_5\nu_1\mu_3 \\ -\nu_3\nu_2^2\mu_1-\nu_3^3\mu_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_3\nu_4^2\mu_4 \\ -\nu_3\nu_2^2\mu_4-\nu_3^3\mu_4\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_4^3\mu_3-\nu_4\nu_5^2\mu_3 \\ -\nu_4\nu_3^2\mu_3\end{matrix} & \begin{matrix}\nu_4^3\mu_1+\nu_4\nu_5^2\mu_1 \\ -\nu_3\nu_1\nu_2\mu_4+\nu_4\nu_3^2\mu_1\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\nu_5\nu_4^2\mu_2+\nu_4\nu_2\nu_3\mu_5 \\ -\nu_5\nu_1^2\mu_2-\nu_5^3\mu_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_4\nu_2\nu_3\mu_3 \\ +\nu_5\nu_2\nu_1\mu_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_4^3\mu_2-\nu_4\nu_3^2\mu_2 \\ +\nu_5\nu_1\nu_2\mu_4-\nu_4\nu_5^2\mu_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_4^3\mu_5-\nu_4\nu_3^2\mu_5 \\ -\nu_4\nu_5^2\mu_5\end{matrix} & \begin{matrix}\nu_5\nu_4^2\mu_4 \\ +\nu_5\nu_1^2\mu_4+\nu_5^3\mu_4\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\nu_1\nu_5^2\mu_5 \\ -\nu_1\nu_2^2\mu_5-\nu_1^3\mu_5\end{matrix} & \begin{matrix}\nu_5\nu_3\nu_4\mu_1+\nu_1\nu_5^2\mu_3 \\ +\nu_1^3\mu_3+\nu_1\nu_2^2\mu_3\end{matrix} & \begin{matrix}\nu_5\nu_3\nu_4\mu_4 \\ +\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2\end{matrix} & \begin{matrix}\nu_5\nu_4^2\mu_3+\nu_5^3\mu_3 \\ +\nu_5\nu_1^2\mu_3+\nu_1\nu_2\nu_3\mu_5\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_5\nu_4^2\mu_1-\nu_5^3\mu_1 \\ -\nu_5\nu_1^2\mu_1\end{matrix} \\ \begin{matrix}\nu_1\nu_5^2\mu_2+\nu_1^3\mu_2 \\ +\nu_1\nu_2^2\mu_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_2\nu_1^2\mu_1 \\ -\nu_2\nu_3^2\mu_1-\nu_2^3\mu_1\end{matrix} & \begin{matrix}\nu_1\nu_4\nu_5\mu_2-\nu_2\nu_1^2\mu_4 \\ -\nu_2^3\mu_4-\nu_2\nu_3^2\mu_4\end{matrix} & \begin{matrix}\nu_1\nu_4\nu_5\mu_5 \\ -\nu_2\nu_4\nu_3\mu_3\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_1\nu_5^2\mu_4-\nu_1^3\mu_4 \\ -\nu_1\nu_2^2\mu_4+\nu_2\nu_3\nu_4\mu_1\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\nu_3\nu_4\nu_5\mu_2+\nu_2\nu_3^2\mu_5 \\ +\nu_2^3\mu_5+\nu_2\nu_1^2\mu_5\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_2\nu_3^2\mu_3 \\ -\nu_2\nu_1^2\mu_3-\nu_2^3\mu_3\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_3\nu_4^2\mu_2-\nu_3^3\mu_2 \\ -\nu_3\nu_2^2\mu_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_3\nu_4^2\mu_5-\nu_3^3\mu_5 \\ -\nu_3\nu_2^2\mu_5-\nu_2\nu_5\nu_1\mu_3\end{matrix} & \begin{matrix}\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 \\ +\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1\end{matrix} \end{pmatrix} \quad (W53)$$

$$MN^3 = {}^t(N^3M) \quad (W54)$$

$$N^3M = \tag{.1}$$

$$\begin{pmatrix}
\nu_4\nu_1\nu_5\mu_5 + \nu_3\nu_1\nu_2\mu_2 & -\nu_3\nu_4^2\mu_1 - \nu_4\nu_5\nu_1\mu_3 - \nu_3\nu_2^2\mu_1 - \nu_3^3\mu_1 & -\nu_3\nu_4^2\mu_4 - \nu_3\nu_2^2\mu_4 - \nu_3^3\mu_4 & -\nu_4^3\mu_3 - \nu_4\nu_5^2\mu_3 - \nu_4\nu_3^2\mu_3 & \nu_4^3\mu_1 + \nu_4\nu_5^2\mu_1 - \nu_3\nu_1\nu_2\mu_4 + \nu_4\nu_3^2\mu_1 \\
-\nu_5\nu_4^2\mu_2 + \nu_4\nu_2\nu_3\mu_5 - \nu_5\nu_1^2\mu_2 - \nu_5^3\mu_2 & -\nu_4\nu_2\nu_3\mu_3 + \nu_5\nu_2\nu_1\mu_1 & -\nu_4^3\mu_2 - \nu_4\nu_3^2\mu_2 + \nu_5\nu_1\nu_2\mu_4 - \nu_4\nu_5^2\mu_2 & -\nu_4^3\mu_5 - \nu_4\nu_3^2\mu_5 - \nu_4\nu_5^2\mu_5 & \nu_5\nu_4^2\mu_4 + \nu_5\nu_1^2\mu_4 + \nu_5^3\mu_4 \\
-\nu_1\nu_5^2\mu_5 - \nu_1\nu_2^2\mu_5 - \nu_1^3\mu_5 & \nu_5\nu_3\nu_4\mu_1 + \nu_1\nu_5^2\mu_3 + \nu_1^3\mu_3 + \nu_1\nu_2^2\mu_3 & \nu_5\nu_3\nu_4\mu_4 + \nu_1\nu_3\nu_2\mu_2 & \nu_5\nu_4^2\mu_3 + \nu_5^3\mu_3 + \nu_5\nu_1^2\mu_3 + \nu_1\nu_2\nu_3\mu_5 & -\nu_5\nu_4^2\mu_1 - \nu_5^3\mu_1 - \nu_5\nu_1^2\mu_1 \\
\nu_1\nu_5^2\mu_2 + \nu_1^3\mu_2 + \nu_1\nu_2^2\mu_2 & -\nu_2\nu_1^2\mu_1 - \nu_2\nu_3^2\mu_1 - \nu_2^3\mu_1 & \nu_1\nu_4\nu_5\mu_2 - \nu_2\nu_1^2\mu_4 - \nu_2^3\mu_4 - \nu_2\nu_3^2\mu_4 & \nu_1\nu_4\nu_5\mu_5 - \nu_2\nu_4\nu_3\mu_3 & -\nu_1\nu_5^2\mu_4 - \nu_1^3\mu_4 - \nu_1\nu_2^2\mu_4 + \nu_2\nu_3\nu_4\mu_1 \\
-\nu_3\nu_4\nu_5\mu_2 + \nu_2\nu_3^2\mu_5 + \nu_2^3\mu_5 + \nu_2\nu_1^2\mu_5 & -\nu_2\nu_3^2\mu_3 - \nu_2\nu_1^2\mu_3 - \nu_2^3\mu_3 & -\nu_3\nu_4^2\mu_2 - \nu_3^3\mu_2 - \nu_3\nu_2^2\mu_2 & -\nu_3\nu_4^2\mu_5 - \nu_3^3\mu_5 - \nu_3\nu_2^2\mu_5 - \nu_2\nu_5\nu_1\mu_3 & \nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 + \nu_2\nu_5\nu_1\mu_1
\end{pmatrix}$$

$$MN^3 = \tag{.2}$$

$$\begin{pmatrix}
\nu_4\nu_1\nu_5\mu_5 + \nu_3\nu_1\nu_2\mu_2 & -\nu_5\nu_4^2\mu_2 + \nu_4\nu_2\nu_3\mu_5 - \nu_5\nu_1^2\mu_2 - \nu_5^3\mu_2 & -\nu_1\nu_5^2\mu_5 - \nu_1\nu_2^2\mu_5 - \nu_1^3\mu_5 & \nu_1\nu_5^2\mu_2 + \nu_1^3\mu_2 + \nu_1\nu_2^2\mu_2 & -\nu_3\nu_4\nu_5\mu_2 + \nu_2\nu_3^2\mu_5 + \nu_2^3\mu_5 + \nu_2\nu_1^2\mu_5 \\
-\nu_3\nu_4^2\mu_1 - \nu_4\nu_5\nu_1\mu_3 - \nu_3\nu_2^2\mu_1 - \nu_3^3\mu_1 & -\nu_4\nu_2\nu_3\mu_3 + \nu_5\nu_2\nu_1\mu_1 & \nu_5\nu_3\nu_4\mu_1 + \nu_1\nu_5^2\mu_3 + \nu_1^3\mu_3 + \nu_1\nu_2^2\mu_3 & -\nu_2\nu_1^2\mu_1 - \nu_2\nu_3^2\mu_1 - \nu_2^3\mu_1 & -\nu_2\nu_3^2\mu_3 - \nu_2\nu_1^2\mu_3 - \nu_2^3\mu_3 \\
-\nu_3\nu_4^2\mu_4 - \nu_3\nu_2^2\mu_4 - \nu_3^3\mu_4 & -\nu_4^3\mu_2 - \nu_4\nu_3^2\mu_2 + \nu_5\nu_1\nu_2\mu_4 - \nu_4\nu_5^2\mu_2 & \nu_5\nu_3\nu_4\mu_4 + \nu_1\nu_3\nu_2\mu_2 & \nu_1\nu_4\nu_5\mu_2 - \nu_2\nu_1^2\mu_4 - \nu_2^3\mu_4 - \nu_2\nu_3^2\mu_4 & -\nu_3\nu_4^2\mu_2 - \nu_3^3\mu_2 - \nu_3\nu_2^2\mu_2 \\
-\nu_4^3\mu_3 - \nu_4\nu_5^2\mu_3 - \nu_4\nu_3^2\mu_3 & -\nu_4^3\mu_5 - \nu_4\nu_3^2\mu_5 - \nu_4\nu_5^2\mu_5 & \nu_5\nu_4^2\mu_3 + \nu_5^3\mu_3 + \nu_5\nu_1^2\mu_3 + \nu_1\nu_2\nu_3\mu_5 & \nu_1\nu_4\nu_5\mu_5 - \nu_2\nu_4\nu_3\mu_3 & -\nu_3\nu_4^2\mu_5 - \nu_3^3\mu_5 - \nu_3\nu_2^2\mu_5 - \nu_2\nu_5\nu_1\mu_3 \\
\nu_4^3\mu_1 + \nu_4\nu_5^2\mu_1 - \nu_3\nu_1\nu_2\mu_4 + \nu_4\nu_3^2\mu_1 & \nu_5\nu_4^2\mu_4 + \nu_5\nu_1^2\mu_4 + \nu_5^3\mu_4 & -\nu_5\nu_4^2\mu_1 - \nu_5^3\mu_1 - \nu_5\nu_1^2\mu_1 & -\nu_1\nu_5^2\mu_4 - \nu_1^3\mu_4 - \nu_1\nu_2^2\mu_4 + \nu_2\nu_3\nu_4\mu_1 & \nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 + \nu_2\nu_5\nu_1\mu_1
\end{pmatrix}$$

定理(68)

【P258】1月27日（水） 5次の反対称行列（続き）

$$M^2NM = M(MNM) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mu_2\mu_3\nu_1+\mu_5\mu_1\nu_2 & \mu_4\mu_5\nu_2 & -\mu_2\mu_3\nu_5 & \mu_1\mu_2\nu_5+\mu_4\mu_5\nu_1 \\ \mu_2\mu_3\nu_1-\mu_5\mu_1\nu_2 & 0 & \mu_1\mu_2\nu_3-\mu_3\mu_4\nu_2 & \mu_5\mu_1\nu_3 & -\mu_3\mu_4\nu_1 \\ -\mu_4\mu_5\nu_2 & -\mu_1\mu_2\nu_3+\mu_3\mu_4\nu_2 & 0 & -\mu_2\mu_3\nu_4+\mu_4\mu_5\nu_3 & \mu_1\mu_2\nu_4 \\ \mu_2\mu_3\nu_5 & -\mu_5\mu_1\nu_3 & \mu_2\mu_3\nu_4-\mu_4\mu_5\nu_3 & 0 & \mu_5\mu_1\nu_4-\mu_3\mu_4\nu_5 \\ -\mu_1\mu_2\nu_5-\mu_4\mu_5\nu_1 & \mu_3\mu_4\nu_1 & -\mu_1\mu_2\nu_4 & -\mu_5\mu_1\nu_4+\mu_3\mu_4\nu_5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2 \\ +\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_1\mu_2^2\nu_3+\mu_3\mu_4\mu_2\nu_2 \\ -\mu_1\mu_5^2\nu_3\end{matrix} & -\mu_4\mu_5^2\nu_3+\mu_5\mu_2\mu_3\nu_4 & -\mu_3\mu_2^2\nu_4+\mu_2\mu_4\mu_5\nu_3 & \begin{matrix}\mu_1\mu_2^2\nu_4 \\ +\mu_1\mu_5^2\nu_4-\mu_3\mu_4\mu_5\nu_5\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\mu_2\mu_3^2\nu_5 \\ -\mu_2\mu_1^2\nu_5-\mu_4\mu_5\mu_1\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 \\ +\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_2\mu_3^2\nu_4+\mu_4\mu_5\mu_3\nu_3 \\ -\mu_2\mu_1^2\nu_4\end{matrix} & -\mu_5\mu_1^2\nu_4+\mu_1\mu_3\mu_4\nu_5 & \mu_4\mu_3^2\nu_5-\mu_3\mu_5\mu_1\nu_4 \\ -\mu_5\mu_4^2\nu_1-\mu_4\mu_1\mu_2\nu_5 & \begin{matrix}\mu_3\mu_2^2\nu_1-\mu_5\mu_1\mu_2\nu_2 \\ +\mu_3\mu_4^2\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2 \\ -\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_3\mu_2^2\nu_5 \\ +\mu_3\mu_4^2\nu_5-\mu_5\mu_1\mu_4\nu_4\end{matrix} & -\mu_1\mu_2^2\nu_5-\mu_2\mu_4\mu_5\nu_1 \\ \mu_2\mu_3^2\nu_1-\mu_3\mu_5\mu_1\nu_2 & -\mu_1\mu_5^2\nu_2+\mu_5\mu_2\mu_3\nu_1 & \begin{matrix}-\mu_4\mu_5^2\nu_2 \\ -\mu_4\mu_3^2\nu_2+\mu_1\mu_2\mu_3\nu_3\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5 \\ +\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_4\mu_5^2\nu_1-\mu_1\mu_2\mu_5\nu_5 \\ -\mu_4\mu_3^2\nu_1\end{matrix} \\ \begin{matrix}\mu_5\mu_1^2\nu_2-\mu_2\mu_3\mu_1\nu_1 \\ +\mu_5\mu_4^2\nu_2\end{matrix} & -\mu_3\mu_4^2\nu_2+\mu_4\mu_1\mu_2\nu_3 & -\mu_2\mu_1^2\nu_3+\mu_1\mu_3\mu_4\nu_2 & \begin{matrix}-\mu_5\mu_1^2\nu_3 \\ -\mu_5\mu_4^2\nu_3+\mu_2\mu_3\mu_4\nu_4\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 \\ -\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4\end{matrix} \end{pmatrix} \tag{W55}$$

$$MNM^2 = {}^t(M^2NM) \tag{W56}$$

$$M^2NM = \qquad .1)$$

$$\begin{pmatrix}
-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2+\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5 & -\mu_1\mu_2^2\nu_3+\mu_3\mu_4\mu_2\nu_2-\mu_1\mu_5^2\nu_3 & -\mu_4\mu_5^2\nu_3+\mu_5\mu_2\mu_3\nu_4 & -\mu_3\mu_2^2\nu_4+\mu_2\mu_4\mu_5\nu_3 & \mu_1\mu_2^2\nu_4+\mu_1\mu_5^2\nu_4-\mu_3\mu_4\mu_5\nu_5 \\
-\mu_2\mu_3^2\nu_5-\mu_2\mu_1^2\nu_5-\mu_4\mu_5\mu_1\nu_1 & \mu_5\mu_1\mu_3\nu_3+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 & -\mu_2\mu_3^2\nu_4+\mu_4\mu_5\mu_3\nu_3-\mu_2\mu_1^2\nu_4 & -\mu_5\mu_1^2\nu_4+\mu_1\mu_3\mu_4\nu_5 & \mu_4\mu_3^2\nu_5-\mu_3\mu_5\mu_1\nu_4 \\
-\mu_5\mu_4^2\nu_1-\mu_4\mu_1\mu_2\nu_5 & \mu_3\mu_2^2\nu_1-\mu_5\mu_1\mu_2\nu_2+\mu_3\mu_4^2\nu_1 & -\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 & \mu_3\mu_2^2\nu_5+\mu_3\mu_4^2\nu_5-\mu_5\mu_1\mu_4\nu_4 & -\mu_1\mu_2^2\nu_5-\mu_2\mu_4\mu_5\nu_1 \\
\mu_2\mu_3^2\nu_1-\mu_3\mu_5\mu_1\nu_2 & -\mu_1\mu_5^2\nu_2+\mu_5\mu_2\mu_3\nu_1 & -\mu_4\mu_5^2\nu_2-\mu_4\mu_3^2\nu_2+\mu_1\mu_2\mu_3\nu_3 & \mu_2\mu_3\mu_5\nu_5+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 & -\mu_4\mu_5^2\nu_1-\mu_1\mu_2\mu_5\nu_5-\mu_4\mu_3^2\nu_1 \\
\mu_5\mu_1^2\nu_2-\mu_2\mu_3\mu_1\nu_1+\mu_5\mu_4^2\nu_2 & -\mu_3\mu_4^2\nu_2+\mu_4\mu_1\mu_2\nu_3 & -\mu_2\mu_1^2\nu_3+\mu_1\mu_3\mu_4\nu_2 & -\mu_5\mu_1^2\nu_3-\mu_5\mu_4^2\nu_3+\mu_2\mu_3\mu_4\nu_4 & \mu_3\mu_4\mu_1\nu_1-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4
\end{pmatrix}$$

$$MNM^2 = \qquad .2)$$

$$\begin{pmatrix}
-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2+\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5 & -\mu_2\mu_3^2\nu_5-\mu_2\mu_1^2\nu_5-\mu_4\mu_5\mu_1\nu_1 & -\mu_5\mu_4^2\nu_1-\mu_4\mu_1\mu_2\nu_5 & \mu_2\mu_3^2\nu_1-\mu_3\mu_5\mu_1\nu_2 & \mu_5\mu_1^2\nu_2-\mu_2\mu_3\mu_1\nu_1+\mu_5\mu_4^2\nu_2 \\
-\mu_1\mu_2^2\nu_3+\mu_3\mu_4\mu_2\nu_2-\mu_1\mu_5^2\nu_3 & \mu_5\mu_1\mu_3\nu_3+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 & \mu_3\mu_2^2\nu_1-\mu_5\mu_1\mu_2\nu_2+\mu_3\mu_4^2\nu_1 & -\mu_1\mu_5^2\nu_2+\mu_5\mu_2\mu_3\nu_1 & -\mu_3\mu_4^2\nu_2+\mu_4\mu_1\mu_2\nu_3 \\
-\mu_4\mu_5^2\nu_3+\mu_5\mu_2\mu_3\nu_4 & -\mu_2\mu_3^2\nu_4+\mu_4\mu_5\mu_3\nu_3-\mu_2\mu_1^2\nu_4 & -\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 & -\mu_4\mu_5^2\nu_2-\mu_4\mu_3^2\nu_2+\mu_1\mu_2\mu_3\nu_3 & -\mu_2\mu_1^2\nu_3+\mu_1\mu_3\mu_4\nu_2 \\
-\mu_3\mu_2^2\nu_4+\mu_2\mu_4\mu_5\nu_3 & -\mu_5\mu_1^2\nu_4+\mu_1\mu_3\mu_4\nu_5 & \mu_3\mu_2^2\nu_5+\mu_3\mu_4^2\nu_5-\mu_5\mu_1\mu_4\nu_4 & \mu_2\mu_3\mu_5\nu_5+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 & -\mu_5\mu_1^2\nu_3-\mu_5\mu_4^2\nu_3+\mu_2\mu_3\mu_4\nu_4 \\
\mu_1\mu_2^2\nu_4+\mu_1\mu_5^2\nu_4-\mu_3\mu_4\mu_5\nu_5 & \mu_4\mu_3^2\nu_5-\mu_3\mu_5\mu_1\nu_4 & -\mu_1\mu_2^2\nu_5-\mu_2\mu_4\mu_5\nu_1 & -\mu_4\mu_5^2\nu_1-\mu_1\mu_2\mu_5\nu_5-\mu_4\mu_3^2\nu_1 & \mu_3\mu_4\mu_1\nu_1-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4
\end{pmatrix}$$

定理（69）

【P260】1月29日（金）5次の反対称行列（続き）

$$N^2MN = N(NMN)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu_3\nu_5\mu_4 & \nu_1\nu_4\mu_3-\nu_3\nu_5\mu_1 & -\nu_2\nu_4\mu_1-\nu_1\nu_3\mu_4 & -\nu_2\nu_4\mu_3 \\ -\nu_3\nu_5\mu_4 & 0 & \nu_1\nu_4\mu_5 & -\nu_1\nu_4\mu_2-\nu_2\nu_5\mu_4 & -\nu_2\nu_4\mu_5-\nu_3\nu_5\mu_2 \\ -\nu_1\nu_4\mu_3+\nu_3\nu_5\mu_1 & -\nu_1\nu_4\mu_5 & 0 & \nu_2\nu_5\mu_1 & \nu_2\nu_5\mu_3-\nu_1\nu_3\mu_5 \\ \nu_2\nu_4\mu_1+\nu_1\nu_3\mu_4 & \nu_1\nu_4\mu_2+\nu_2\nu_5\mu_4 & -\nu_2\nu_5\mu_1 & 0 & \nu_1\nu_3\mu_2 \\ \nu_2\nu_4\mu_3 & \nu_2\nu_4\mu_5+\nu_3\nu_5\mu_2 & -\nu_2\nu_5\mu_3+\nu_1\nu_3\mu_5 & -\nu_1\nu_3\mu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4\\-\nu_2\nu_4\nu_3\mu_3\end{matrix} & -\nu_5\nu_3^2\mu_2-\nu_2\nu_3\nu_4\mu_5 & \begin{matrix}-\nu_1\nu_4^2\mu_5\\-\nu_1\nu_3^2\mu_5+\nu_2\nu_5\nu_3\mu_3\end{matrix} & \begin{matrix}\nu_1\nu_4^2\mu_2+\nu_2\nu_5\nu_4\mu_4\\+\nu_1\nu_3^2\mu_2\end{matrix} & \nu_2\nu_4^2\mu_5+\nu_3\nu_4\nu_5\mu_2 \\ -\nu_3\nu_5^2\mu_1+\nu_5\nu_1\nu_4\mu_3 & \begin{matrix}\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4\\+\nu_1\nu_4\nu_5\mu_5\end{matrix} & \nu_1\nu_4^2\mu_3-\nu_3\nu_4\nu_5\mu_1 & \begin{matrix}-\nu_2\nu_4^2\mu_1-\nu_1\nu_3\nu_4\mu_4\\-\nu_2\nu_5^2\mu_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_2\nu_4^2\mu_3\\-\nu_2\nu_5^2\mu_3+\nu_1\nu_3\nu_5\mu_5\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\nu_3\nu_5^2\mu_4\\-\nu_3\nu_1^2\mu_4-\nu_2\nu_4\nu_1\mu_1\end{matrix} & -\nu_4\nu_1^2\mu_2-\nu_5\nu_1\nu_2\mu_4 & \begin{matrix}\nu_1\nu_4\nu_5\mu_5\\+\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1\end{matrix} & -\nu_2\nu_5^2\mu_4-\nu_5\nu_1\nu_4\mu_2 & \begin{matrix}-\nu_3\nu_5^2\mu_2-\nu_2\nu_4\nu_5\mu_5\\-\nu_3\nu_1^2\mu_2\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\nu_4\nu_1^2\mu_3+\nu_3\nu_5\nu_1\mu_1\\-\nu_4\nu_2^2\mu_3\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_4\nu_1^2\mu_5\\-\nu_4\nu_2^2\mu_5-\nu_3\nu_5\nu_2\mu_2\end{matrix} & \nu_5\nu_2^2\mu_3-\nu_1\nu_2\nu_3\mu_5 & \begin{matrix}\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1\\+\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2\end{matrix} & -\nu_3\nu_1^2\mu_5+\nu_1\nu_2\nu_5\mu_3 \\ \nu_4\nu_2^2\mu_1+\nu_1\nu_2\nu_3\mu_4 & \begin{matrix}\nu_5\nu_3^2\mu_4\\+\nu_5\nu_2^2\mu_4+\nu_1\nu_4\nu_2\mu_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\nu_5\nu_3^2\mu_1+\nu_1\nu_4\nu_3\mu_3\\-\nu_5\nu_2^2\mu_1\end{matrix} & -\nu_1\nu_3^2\mu_4-\nu_2\nu_3\nu_4\mu_1 & \begin{matrix}-\nu_2\nu_4\nu_3\mu_3\\+\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2\end{matrix} \end{pmatrix} \tag{W57}$$

$$NMN^2 = {}^t(N^2MN) \tag{W58}$$

【261】 1月30日（土） 5次の反対称行列（続き）

$$N^2MN = \tag{.1}$$

$$\begin{pmatrix}
\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 - \nu_2\nu_4\nu_3\mu_3 & -\nu_5\nu_3^2\mu_2-\nu_2\nu_3\nu_4\mu_5 & -\nu_1\nu_4^2\mu_5-\nu_1\nu_3^2\mu_5+\nu_2\nu_5\nu_3\mu_3 & \nu_1\nu_4^2\mu_2+\nu_2\nu_5\nu_4\mu_4+\nu_1\nu_3^2\mu_2 & \nu_2\nu_4^2\mu_5+\nu_3\nu_4\nu_5\mu_2 \\
-\nu_3\nu_5^2\mu_1+\nu_5\nu_1\nu_4\mu_3 & \nu_3\nu_5\nu_4\mu_4+\nu_1\nu_4\nu_5\mu_5 & \nu_1\nu_4^2\mu_3-\nu_3\nu_4\nu_5\mu_1 & -\nu_2\nu_4^2\mu_1-\nu_1\nu_3\nu_4\mu_4-\nu_2\nu_5^2\mu_1 & -\nu_2\nu_4^2\mu_3-\nu_2\nu_5^2\mu_3+\nu_1\nu_3\nu_5\mu_5 \\
-\nu_3\nu_5^2\mu_4-\nu_3\nu_1^2\mu_4-\nu_2\nu_4\nu_1\mu_1 & -\nu_4\nu_1^2\mu_2-\nu_5\nu_1\nu_2\mu_4 & \nu_1\nu_4\nu_5\mu_5+\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1 & -\nu_2\nu_5^2\mu_4-\nu_5\nu_1\nu_4\mu_2 & -\nu_3\nu_5^2\mu_2-\nu_2\nu_4\nu_5\mu_5-\nu_3\nu_1^2\mu_2 \\
-\nu_4\nu_1^2\mu_3+\nu_3\nu_5\nu_1\mu_1-\nu_4\nu_2^2\mu_3 & -\nu_4\nu_1^2\mu_5-\nu_4\nu_2^2\mu_5-\nu_3\nu_5\nu_2\mu_2 & \nu_5\nu_2^2\mu_3-\nu_1\nu_2\nu_3\mu_5 & \nu_2\nu_5\nu_1\mu_1+\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2 & -\nu_3\nu_1^2\mu_5+\nu_1\nu_2\nu_5\mu_3 \\
\nu_4\nu_2^2\mu_1+\nu_1\nu_2\nu_3\mu_4 & \nu_5\nu_3^2\mu_4+\nu_5\nu_2^2\mu_4+\nu_1\nu_4\nu_2\mu_2 & -\nu_5\nu_3^2\mu_1+\nu_1\nu_4\nu_3\mu_3-\nu_5\nu_2^2\mu_1 & -\nu_1\nu_3^2\mu_4-\nu_2\nu_3\nu_4\mu_1 & -\nu_2\nu_4\nu_3\mu_3+\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2
\end{pmatrix}$$

$$NMN^2 = \tag{.2}$$

$$\begin{pmatrix}
\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 - \nu_2\nu_4\nu_3\mu_3 & -\nu_3\nu_5^2\mu_1+\nu_5\nu_1\nu_4\mu_3 & -\nu_3\nu_5^2\mu_4-\nu_3\nu_1^2\mu_4-\nu_2\nu_4\nu_1\mu_1 & -\nu_4\nu_1^2\mu_3+\nu_3\nu_5\nu_1\mu_1-\nu_4\nu_2^2\mu_3 & \nu_4\nu_2^2\mu_1+\nu_1\nu_2\nu_3\mu_4 \\
-\nu_5\nu_3^2\mu_2-\nu_2\nu_3\nu_4\mu_5 & \nu_3\nu_5\nu_4\mu_4+\nu_1\nu_4\nu_5\mu_5 & -\nu_4\nu_1^2\mu_2-\nu_5\nu_1\nu_2\mu_4 & -\nu_4\nu_1^2\mu_5-\nu_4\nu_2^2\mu_5-\nu_3\nu_5\nu_2\mu_2 & \nu_5\nu_3^2\mu_4+\nu_5\nu_2^2\mu_4+\nu_1\nu_4\nu_2\mu_2 \\
-\nu_1\nu_4^2\mu_5-\nu_1\nu_3^2\mu_5+\nu_2\nu_5\nu_3\mu_3 & \nu_1\nu_4^2\mu_3-\nu_3\nu_4\nu_5\mu_1 & \nu_1\nu_4\nu_5\mu_5+\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1 & \nu_5\nu_2^2\mu_3-\nu_1\nu_2\nu_3\mu_5 & -\nu_5\nu_3^2\mu_1+\nu_1\nu_4\nu_3\mu_3-\nu_5\nu_2^2\mu_1 \\
\nu_1\nu_4^2\mu_2+\nu_2\nu_5\nu_4\mu_4+\nu_1\nu_3^2\mu_2 & -\nu_2\nu_4^2\mu_1-\nu_1\nu_3\nu_4\mu_4-\nu_2\nu_5^2\mu_1 & -\nu_2\nu_5^2\mu_4-\nu_5\nu_1\nu_4\mu_2 & \nu_2\nu_5\nu_1\mu_1+\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2 & -\nu_1\nu_3^2\mu_4-\nu_2\nu_3\nu_4\mu_1 \\
\nu_2\nu_4^2\mu_5+\nu_3\nu_4\nu_5\mu_2 & -\nu_2\nu_4^2\mu_3-\nu_2\nu_5^2\mu_3+\nu_1\nu_3\nu_5\mu_5 & -\nu_3\nu_5^2\mu_2-\nu_2\nu_4\nu_5\mu_5-\nu_3\nu_1^2\mu_2 & -\nu_3\nu_1^2\mu_5+\nu_1\nu_2\nu_5\mu_3 & -\nu_2\nu_4\nu_3\mu_3+\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2
\end{pmatrix}$$

定理（70）

$$M^2N^2 = M(MN^2) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_2\nu_4\nu_5-\mu_5\nu_2\nu_3 & \mu_5\nu_5\nu_1 & -\mu_2\nu_5^2-\mu_2\nu_1^2 & -\mu_5\nu_1^2-\mu_5\nu_2^2 & \mu_2\nu_2\nu_1 \\ \mu_3\nu_3\nu_2 & -\mu_1\nu_3\nu_4-\mu_3\nu_5\nu_1 & \mu_1\nu_1\nu_2 & \mu_3\nu_1^2+\mu_3\nu_2^2 & -\mu_1\nu_3^2-\mu_1\nu_2^2 \\ \mu_2\nu_4^2+\mu_2\nu_3^2 & -\mu_4\nu_4\nu_3 & -\mu_2\nu_4\nu_5+\mu_4\nu_1\nu_2 & \mu_2\nu_2\nu_3 & -\mu_4\nu_3^2-\mu_4\nu_2^2 \\ \mu_5\nu_4^2+\mu_5\nu_3^2 & -\mu_3\nu_4^2-\mu_3\nu_5^2 & -\mu_5\nu_5\nu_4 & \mu_3\nu_5\nu_1+\mu_5\nu_2\nu_3 & -\mu_3\nu_3\nu_4 \\ -\mu_4\nu_4\nu_5 & \mu_1\nu_4^2+\mu_1\nu_5^2 & \mu_4\nu_5^2+\mu_4\nu_1^2 & -\mu_1\nu_1\nu_5 & \mu_1\nu_3\nu_4-\mu_4\nu_1\nu_2 \end{pmatrix}$$

$=$

$$\begin{pmatrix} \mu_2^2\nu_4^2+\mu_2^2\nu_3^2+\mu_5^2\nu_4^2+\mu_5^2\nu_3^2 & -\mu_5\mu_3\nu_4^2-\mu_2\mu_4\nu_4\nu_3-\mu_5\mu_3\nu_5^2 & -\mu_2^2\nu_5\nu_4+\mu_4\mu_2\nu_2\nu_1-\mu_5^2\nu_5\nu_4 & \mu_2^2\nu_2\nu_3+\mu_5^2\nu_2\nu_3+\mu_3\mu_5\nu_5\nu_1 & -\mu_4\mu_2\nu_3^2-\mu_4\mu_2\nu_2^2-\mu_5\mu_3\nu_3\nu_4 \\ -\mu_5\mu_3\nu_4^2-\mu_5\mu_3\nu_3^2-\mu_1\mu_4\nu_4\nu_5 & \mu_3^2\nu_4^2+\mu_3^2\nu_5^2+\mu_1^2\nu_4^2+\mu_1^2\nu_5^2 & \mu_4\mu_1\nu_5^2+\mu_3\mu_5\nu_5\nu_4+\mu_4\mu_1\nu_1^2 & -\mu_3^2\nu_1\nu_5-\mu_5\mu_3\nu_3\nu_2-\mu_1^2\nu_1\nu_5 & \mu_3^2\nu_3\nu_4+\mu_1^2\nu_3\nu_4-\mu_4\mu_1\nu_1\nu_2 \\ -\mu_2^2\nu_4\nu_5+\mu_5\mu_2\nu_2\nu_3-\mu_4^2\nu_4\nu_5 & \mu_1\mu_4\nu_4^2-\mu_2\mu_5\nu_5\nu_1+\mu_1\mu_4\nu_5^2 & \mu_2^2\nu_5^2+\mu_2^2\nu_1^2+\mu_4^2\nu_5^2+\mu_4^2\nu_1^2 & \mu_5\mu_2\nu_1^2+\mu_5\mu_2\nu_2^2-\mu_4\mu_1\nu_1\nu_5 & -\mu_2^2\nu_2\nu_1+\mu_1\mu_4\nu_4\nu_3-\mu_4^2\nu_2\nu_1 \\ \mu_5^2\nu_3\nu_2-\mu_2\mu_5\nu_5\nu_4+\mu_3^2\nu_3\nu_2 & -\mu_5^2\nu_5\nu_1-\mu_3^2\nu_5\nu_1-\mu_1\mu_3\nu_3\nu_4 & \mu_2\mu_5\nu_5^2+\mu_2\mu_5\nu_1^2+\mu_3\mu_1\nu_1\nu_2 & \mu_5^2\nu_1^2+\mu_5^2\nu_2^2+\mu_3^2\nu_1^2+\mu_3^2\nu_2^2 & -\mu_1\mu_3\nu_3^2-\mu_5\mu_2\nu_2\nu_1-\mu_1\mu_3\nu_2^2 \\ -\mu_2\mu_4\nu_4^2-\mu_1\mu_3\nu_3\nu_2-\mu_2\mu_4\nu_3^2 & \mu_1^2\nu_4\nu_3+\mu_3\mu_1\nu_1\nu_5+\mu_4^2\nu_4\nu_3 & -\mu_1^2\nu_1\nu_2-\mu_4^2\nu_1\nu_2+\mu_2\mu_4\nu_4\nu_5 & -\mu_3\mu_1\nu_1^2-\mu_3\mu_1\nu_2^2-\mu_4\mu_2\nu_2\nu_3 & \mu_1^2\nu_3^2+\mu_1^2\nu_2^2+\mu_4^2\nu_3^2+\mu_4^2\nu_2^2 \end{pmatrix} \tag{W59}$$

$$N^2M^2 = {}^t(M^2N^2) \tag{W60}$$

【P263】 5次の反対称行列（続き）

$$M^2N^2= \tag{.1}$$

$$\begin{pmatrix}
\mu_2^2\nu_4^2+\mu_2^2\nu_3^2+\mu_5^2\nu_4^2+\mu_5^2\nu_3^2 & -\mu_5\mu_3\nu_4^2-\mu_2\mu_4\nu_4\nu_3-\mu_5\mu_3\nu_5^2 & -\mu_2^2\nu_5\nu_4+\mu_4\mu_2\nu_2\nu_1-\mu_5^2\nu_5\nu_4 & \mu_2^2\nu_2\nu_3+\mu_5^2\nu_2\nu_3+\mu_3\mu_5\nu_5\nu_1 & -\mu_4\mu_2\nu_3^2-\mu_4\mu_2\nu_2^2-\mu_5\mu_3\nu_3\nu_4 \\
-\mu_5\mu_3\nu_4^2-\mu_5\mu_3\nu_3^2-\mu_1\mu_4\nu_4\nu_5 & \mu_3^2\nu_4^2+\mu_3^2\nu_5^2+\mu_1^2\nu_4^2+\mu_1^2\nu_5^2 & \mu_4\mu_1\nu_5^2+\mu_3\mu_5\nu_5\nu_4+\mu_4\mu_1\nu_1^2 & -\mu_3^2\nu_1\nu_5-\mu_5\mu_3\nu_3\nu_2-\mu_1^2\nu_1\nu_5 & \mu_3^2\nu_3\nu_4+\mu_1^2\nu_3\nu_4-\mu_4\mu_1\nu_1\nu_2 \\
-\mu_2^2\nu_4\nu_5+\mu_5\mu_2\nu_2\nu_3-\mu_4^2\nu_4\nu_5 & \mu_1\mu_4\nu_4^2-\mu_2\mu_5\nu_5\nu_1+\mu_1\mu_4\nu_5^2 & \mu_2^2\nu_5^2+\mu_2^2\nu_1^2+\mu_4^2\nu_5^2+\mu_4^2\nu_1^2 & \mu_5\mu_2\nu_1^2+\mu_5\mu_2\nu_2^2-\mu_4\mu_1\nu_1\nu_5 & -\mu_2^2\nu_2\nu_1+\mu_1\mu_4\nu_4\nu_3-\mu_4^2\nu_2\nu_1 \\
\mu_5^2\nu_3\nu_2-\mu_2\mu_5\nu_5\nu_4+\mu_3^2\nu_3\nu_2 & -\mu_5^2\nu_5\nu_1-\mu_3^2\nu_5\nu_1-\mu_1\mu_3\nu_3\nu_4 & \mu_2\mu_5\nu_5^2+\mu_2\mu_5\nu_1^2+\mu_3\mu_1\nu_1\nu_2 & \mu_5^2\nu_1^2+\mu_5^2\nu_2^2+\mu_3^2\nu_1^2+\mu_3^2\nu_2^2 & -\mu_1\mu_3\nu_3^2-\mu_5\mu_2\nu_2\nu_1-\mu_1\mu_3\nu_2^2 \\
-\mu_2\mu_4\nu_4^2-\mu_1\mu_3\nu_3\nu_2-\mu_2\mu_4\nu_3^2 & \mu_1^2\nu_4\nu_3+\mu_3\mu_1\nu_1\nu_5+\mu_4^2\nu_4\nu_3 & -\mu_1^2\nu_1\nu_2-\mu_4^2\nu_1\nu_2+\mu_2\mu_4\nu_4\nu_5 & -\mu_3\mu_1\nu_1^2-\mu_3\mu_1\nu_2^2-\mu_4\mu_2\nu_2\nu_3 & \mu_1^2\nu_3^2+\mu_1^2\nu_2^2+\mu_4^2\nu_3^2+\mu_4^2\nu_2^2
\end{pmatrix}$$

$$N^2M^2= \tag{.2}$$

$$\begin{pmatrix}
\mu_2^2\nu_4^2+\mu_2^2\nu_3^2+\mu_5^2\nu_4^2+\mu_5^2\nu_3^2 & -\mu_5\mu_3\nu_4^2-\mu_5\mu_3\nu_3^2-\mu_1\mu_4\nu_4\nu_5 & -\mu_2^2\nu_4\nu_5+\mu_5\mu_2\nu_2\nu_3-\mu_4^2\nu_4\nu_5 & \mu_5^2\nu_3\nu_2-\mu_2\mu_5\nu_5\nu_4+\mu_3^2\nu_3\nu_2 & -\mu_2\mu_4\nu_4^2-\mu_1\mu_3\nu_3\nu_2-\mu_2\mu_4\nu_3^2 \\
-\mu_5\mu_3\nu_4^2-\mu_2\mu_4\nu_4\nu_3-\mu_5\mu_3\nu_5^2 & \mu_3^2\nu_4^2+\mu_3^2\nu_5^2+\mu_1^2\nu_4^2+\mu_1^2\nu_5^2 & \mu_1\mu_4\nu_4^2-\mu_2\mu_5\nu_5\nu_1+\mu_1\mu_4\nu_5^2 & -\mu_5^2\nu_5\nu_1-\mu_3^2\nu_5\nu_1-\mu_1\mu_3\nu_3\nu_4 & \mu_1^2\nu_4\nu_3+\mu_3\mu_1\nu_1\nu_5+\mu_4^2\nu_4\nu_3 \\
-\mu_2^2\nu_5\nu_4+\mu_4\mu_2\nu_2\nu_1-\mu_5^2\nu_5\nu_4 & \mu_4\mu_1\nu_5^2+\mu_3\mu_5\nu_5\nu_4+\mu_4\mu_1\nu_1^2 & \mu_2^2\nu_5^2+\mu_2^2\nu_1^2+\mu_4^2\nu_5^2+\mu_4^2\nu_1^2 & \mu_2\mu_5\nu_5^2+\mu_2\mu_5\nu_1^2+\mu_3\mu_1\nu_1\nu_2 & -\mu_1^2\nu_1\nu_2-\mu_4^2\nu_1\nu_2+\mu_2\mu_4\nu_4\nu_5 \\
\mu_2^2\nu_2\nu_3+\mu_5^2\nu_2\nu_3+\mu_3\mu_5\nu_5\nu_1 & -\mu_3^2\nu_1\nu_5-\mu_5\mu_3\nu_3\nu_2-\mu_1^2\nu_1\nu_5 & \mu_5\mu_2\nu_1^2+\mu_5\mu_2\nu_2^2-\mu_4\mu_1\nu_1\nu_5 & \mu_5^2\nu_1^2+\mu_5^2\nu_2^2+\mu_3^2\nu_1^2+\mu_3^2\nu_2^2 & -\mu_3\mu_1\nu_1^2-\mu_3\mu_1\nu_2^2-\mu_4\mu_2\nu_2\nu_3 \\
-\mu_4\mu_2\nu_3^2-\mu_4\mu_2\nu_2^2-\mu_5\mu_3\nu_3\nu_4 & \mu_3^2\nu_3\nu_4+\mu_1^2\nu_3\nu_4-\mu_4\mu_1\nu_1\nu_2 & -\mu_2^2\nu_2\nu_1+\mu_1\mu_4\nu_4\nu_3-\mu_4^2\nu_2\nu_1 & -\mu_1\mu_3\nu_3^2-\mu_5\mu_2\nu_2\nu_1-\mu_1\mu_3\nu_2^2 & \mu_1^2\nu_3^2+\mu_1^2\nu_2^2+\mu_4^2\nu_3^2+\mu_4^2\nu_2^2
\end{pmatrix}$$

定理（71）

【P264】2月3日（水）5次の反対称行列（続き）

$$MNMN = M(NMN) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \mu_4\nu_3\nu_5 & \mu_3\nu_1\nu_4-\mu_1\nu_3\nu_5 & -\mu_1\nu_2\nu_4-\mu_4\nu_1\nu_3 & -\mu_3\nu_2\nu_4 \\ -\mu_4\nu_3\nu_5 & 0 & \mu_5\nu_1\nu_4 & -\mu_2\nu_1\nu_4-\mu_4\nu_2\nu_5 & -\mu_5\nu_2\nu_4-\mu_2\nu_3\nu_5 \\ -\mu_3\nu_1\nu_4+\mu_1\nu_3\nu_5 & -\mu_5\nu_1\nu_4 & 0 & \mu_1\nu_2\nu_5 & \mu_3\nu_2\nu_5-\mu_5\nu_1\nu_3 \\ \mu_1\nu_2\nu_4+\mu_4\nu_1\nu_3 & \mu_2\nu_1\nu_4+\mu_4\nu_2\nu_5 & -\mu_1\nu_2\nu_5 & 0 & \mu_2\nu_1\nu_3 \\ \mu_3\nu_2\nu_4 & \mu_5\nu_2\nu_4+\mu_2\nu_3\nu_5 & -\mu_3\nu_2\nu_5+\mu_5\nu_1\nu_3 & -\mu_2\nu_1\nu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5\\+\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1\end{matrix} & \mu_4\mu_5\nu_5\nu_2 & -\mu_1\mu_5\nu_5\nu_2 & \mu_1\mu_2\nu_2\nu_5 & \mu_3\mu_2\nu_2\nu_5 \\ -\mu_4\mu_3\nu_3\nu_1 & \begin{matrix}-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4-\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5\\+\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5\end{matrix} & \mu_5\mu_1\nu_1\nu_3 & -\mu_2\mu_1\nu_1\nu_3 & -\mu_2\mu_3\nu_3\nu_1 \\ \mu_3\mu_4\nu_4\nu_2 & \mu_5\mu_4\nu_4\nu_2 & \begin{matrix}-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5\\-\mu_3\mu_4\nu_5\nu_2+\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1\end{matrix} & \mu_1\mu_2\nu_2\nu_4 & \mu_3\mu_2\nu_2\nu_4 \\ -\mu_4\mu_3\nu_3\nu_5 & -\mu_4\mu_5\nu_5\nu_3 & \mu_1\mu_5\nu_5\nu_3 & \begin{matrix}\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_4\mu_5\nu_1\nu_3\\-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4-\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5\end{matrix} & -\mu_2\mu_3\nu_3\nu_5 \\ \mu_3\mu_4\nu_4\nu_1 & \mu_5\mu_4\nu_4\nu_1 & -\mu_5\mu_1\nu_1\nu_4 & \mu_2\mu_1\nu_1\nu_4 & \begin{matrix}\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5\\-\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5+\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1\end{matrix} \end{pmatrix} \tag{W61}$$

$$NMNM = {}^t(MNMN) \tag{W62}$$

 5次の反対称行列（続き）

$$MNMN = \tag{.1}$$

$$\begin{pmatrix}
-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 \\ +\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1 & \mu_4\mu_5\nu_5\nu_2 & -\mu_1\mu_5\nu_5\nu_2 & \mu_1\mu_2\nu_2\nu_5 & \mu_3\mu_2\nu_2\nu_5 \\
-\mu_4\mu_3\nu_3\nu_1 & -\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4-\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 \\ & +\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 & \mu_5\mu_1\nu_1\nu_3 & -\mu_2\mu_1\nu_1\nu_3 & -\mu_2\mu_3\nu_3\nu_1 \\
\mu_3\mu_4\nu_4\nu_2 & \mu_5\mu_4\nu_4\nu_2 & -\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 \\ & & -\mu_3\mu_4\nu_5\nu_2+\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1 & \mu_1\mu_2\nu_2\nu_4 & \mu_3\mu_2\nu_2\nu_4 \\
-\mu_4\mu_3\nu_3\nu_5 & -\mu_4\mu_5\nu_5\nu_3 & \mu_1\mu_5\nu_5\nu_3 & \mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_4\mu_5\nu_1\nu_3 \\ & & & -\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4-\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 & -\mu_2\mu_3\nu_3\nu_5 \\
\mu_3\mu_4\nu_4\nu_1 & \mu_5\mu_4\nu_4\nu_1 & -\mu_5\mu_1\nu_1\nu_4 & \mu_2\mu_1\nu_1\nu_4 & \mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 \\ & & & & -\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5+\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1
\end{pmatrix}$$

$$NMNM = \tag{.2}$$

$$\begin{pmatrix}
-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 \\ +\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1 & -\mu_4\mu_3\nu_3\nu_1 & \mu_3\mu_4\nu_4\nu_2 & -\mu_4\mu_3\nu_3\nu_5 & \mu_3\mu_4\nu_4\nu_1 \\
\mu_4\mu_5\nu_5\nu_2 & -\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4-\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 \\ & +\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 & \mu_5\mu_4\nu_4\nu_2 & -\mu_4\mu_5\nu_5\nu_3 & \mu_5\mu_4\nu_4\nu_1 \\
-\mu_1\mu_5\nu_5\nu_2 & \mu_5\mu_1\nu_1\nu_3 & -\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 \\ & & -\mu_3\mu_4\nu_5\nu_2+\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1 & \mu_1\mu_5\nu_5\nu_3 & -\mu_5\mu_1\nu_1\nu_4 \\
\mu_1\mu_2\nu_2\nu_5 & -\mu_2\mu_1\nu_1\nu_3 & \mu_1\mu_2\nu_2\nu_4 & \mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_4\mu_5\nu_1\nu_3 \\ & & & -\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4-\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 & \mu_2\mu_1\nu_1\nu_4 \\
\mu_3\mu_2\nu_2\nu_5 & -\mu_2\mu_3\nu_3\nu_1 & \mu_3\mu_2\nu_2\nu_4 & -\mu_2\mu_3\nu_3\nu_5 & \mu_5\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 \\ & & & & -\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5+\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1
\end{pmatrix}$$

定理（72）

【P266】2月5日（金） 5次の反対称行列（続き）

$$MN^2M = M(N^2M) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\mu_2\nu_4\nu_5+\mu_5\nu_2\nu_3 & -\mu_3\nu_3\nu_2 & -\mu_2\nu_4^2-\mu_2\nu_3^2 & -\mu_5\nu_4^2-\mu_5\nu_3^2 & \mu_4\nu_4\nu_5 \\ -\mu_5\nu_5\nu_1 & \mu_1\nu_3\nu_4+\mu_3\nu_5\nu_1 & \mu_4\nu_4\nu_3 & \mu_3\nu_4^2+\mu_3\nu_5^2 & -\mu_1\nu_4^2-\mu_1\nu_5^2 \\ \mu_2\nu_5^2+\mu_2\nu_1^2 & -\mu_1\nu_1\nu_2 & \mu_2\nu_4\nu_5-\mu_4\nu_1\nu_2 & \mu_5\nu_5\nu_4 & -\mu_4\nu_5^2-\mu_4\nu_1^2 \\ \mu_5\nu_1^2+\mu_5\nu_2^2 & -\mu_3\nu_1^2-\mu_3\nu_2^2 & -\mu_2\nu_2\nu_3 & -\mu_3\nu_5\nu_1-\mu_5\nu_2\nu_3 & \mu_1\nu_1\nu_5 \\ -\mu_2\nu_2\nu_1 & \mu_1\nu_3^2+\mu_1\nu_2^2 & \mu_4\nu_3^2+\mu_4\nu_2^2 & \mu_3\nu_3\nu_4 & -\mu_1\nu_3\nu_4+\mu_4\nu_1\nu_2 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix}\mu_2^2\nu_5^2+\mu_2^2\nu_1^2\\+\mu_5^2\nu_1^2+\mu_5^2\nu_2^2\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\\-\mu_3\mu_5\nu_1^2-\mu_3\mu_5\nu_2^2\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_4\mu_2\nu_2\nu_1-\mu_5\mu_2\nu_2\nu_3\\+\mu_2^2\nu_4\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_2\mu_5\nu_5\nu_4-\mu_3\mu_5\nu_5\nu_1\\-\mu_5^2\nu_2\nu_3\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_5\nu_5\mu_1\nu_1\\-\mu_2\mu_4\nu_5^2-\mu_2\mu_4\nu_1^2\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2\\-\mu_3\mu_5\nu_1^2-\mu_3\mu_5\nu_2^2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_3^2\nu_1^2+\mu_3^2\nu_2^2\\+\mu_1^2\nu_3^2+\mu_1^2\nu_2^2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3\\+\mu_1\mu_4\nu_2^2+\mu_1\mu_4\nu_3^2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_5\mu_3\nu_3\nu_2+\mu_1\mu_3\nu_3\nu_4\\+\mu_3^2\nu_5\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_4\mu_1\nu_1\nu_2-\mu_3\mu_1\nu_1\nu_5\\-\mu_1^2\nu_3\nu_4\end{matrix} \\ \begin{matrix}-\mu_4\mu_2\nu_2\nu_1-\mu_5\mu_2\nu_2\nu_3\\+\mu_2^2\nu_4\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_2\nu_2\mu_3\nu_3\\+\mu_1\mu_4\nu_2^2+\mu_1\mu_4\nu_3^2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_2^2\nu_4^2+\mu_2^2\nu_3^2\\+\mu_4^2\nu_3^2+\mu_4^2\nu_2^2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_3\nu_3\mu_4\nu_4\\+\mu_5\mu_2\nu_3^2+\mu_5\mu_2\nu_4^2\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_1\mu_4\nu_4\nu_3-\mu_2\mu_4\nu_4\nu_5\\+\mu_4^2\nu_1\nu_2\end{matrix} \\ \begin{matrix}\mu_2\mu_5\nu_5\nu_4-\mu_3\mu_5\nu_5\nu_1\\-\mu_5^2\nu_2\nu_3\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_5\mu_3\nu_3\nu_2+\mu_1\mu_3\nu_3\nu_4\\+\mu_3^2\nu_5\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_3\nu_3\mu_4\nu_4\\+\mu_5\mu_2\nu_3^2+\mu_5\mu_2\nu_4^2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_5^2\nu_4^2+\mu_5^2\nu_3^2\\+\mu_3^2\nu_4^2+\mu_3^2\nu_5^2\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_4\nu_4\mu_5\nu_5\\-\mu_1\mu_3\nu_4^2-\mu_1\mu_3\nu_5^2\end{matrix} \\ \begin{matrix}\mu_5\nu_5\mu_1\nu_1\\-\mu_2\mu_4\nu_5^2-\mu_2\mu_4\nu_1^2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_4\mu_1\nu_1\nu_2-\mu_3\mu_1\nu_1\nu_5\\-\mu_1^2\nu_3\nu_4\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_1\mu_4\nu_4\nu_3-\mu_2\mu_4\nu_4\nu_5\\+\mu_4^2\nu_1\nu_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_4\nu_4\mu_5\nu_5\\-\mu_1\mu_3\nu_4^2-\mu_1\mu_3\nu_5^2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_1^2\nu_4^2+\mu_1^2\nu_5^2\\+\mu_4^2\nu_5^2+\mu_4^2\nu_1^2\end{matrix} \end{pmatrix}$$

(W63)

【P267】2月7日(日) 5次の反対称行列(続き)

$$NM^2N = N(M^2N) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_2\mu_4\nu_3+\mu_3\mu_5\nu_4 & \mu_2^2\nu_4+\mu_5^2\nu_4 & -\mu_3\mu_5\nu_5 & \mu_4\mu_2\nu_2 & \mu_2^2\nu_3+\mu_5^2\nu_3 \\ -\mu_3^2\nu_4-\mu_1^2\nu_4 & -\mu_3\mu_5\nu_4-\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_3^2\nu_5+\mu_1^2\nu_5 & \mu_4\mu_1\nu_1 & -\mu_5\mu_3\nu_3 \\ -\mu_1\mu_4\nu_4 & -\mu_2^2\nu_5-\mu_4^2\nu_5 & -\mu_5\mu_2\nu_1+\mu_4\mu_1\nu_5 & \mu_2^2\nu_1+\mu_4^2\nu_1 & \mu_5\mu_2\nu_2 \\ \mu_1\mu_3\nu_3 & -\mu_2\mu_5\nu_5 & -\mu_5^2\nu_1-\mu_3^2\nu_1 & \mu_5\mu_2\nu_1+\mu_1\mu_3\nu_2 & \mu_5^2\nu_2+\mu_3^2\nu_2 \\ -\mu_1^2\nu_3-\mu_4^2\nu_3 & -\mu_2\mu_4\nu_4 & \mu_3\mu_1\nu_1 & -\mu_1^2\nu_2-\mu_4^2\nu_2 & -\mu_1\mu_3\nu_2-\mu_2\mu_4\nu_3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix}
\begin{array}{c}\mu_3^2\nu_4^2+\mu_1^2\nu_4^2\\+\mu_1^2\nu_3^2+\mu_4^2\nu_3^2\end{array} & \begin{array}{c}\mu_1\mu_4\nu_4\nu_5+\mu_2\mu_4\nu_4\nu_3\\+\mu_3\mu_5\nu_4^2\end{array} & \begin{array}{c}-\mu_1\nu_1\mu_3\nu_3\\-\mu_1^2\nu_5\nu_4-\mu_3^2\nu_5\nu_4\end{array} & \begin{array}{c}-\mu_4\nu_4\mu_1\nu_1\\+\mu_4^2\nu_3\nu_2+\mu_1^2\nu_3\nu_2\end{array} & \begin{array}{c}\mu_5\mu_3\nu_3\nu_4+\mu_1\mu_3\nu_3\nu_2\\+\mu_2\mu_4\nu_3^2\end{array} \\
\begin{array}{c}\mu_1\mu_4\nu_4\nu_5+\mu_2\mu_4\nu_4\nu_3\\+\mu_3\mu_5\nu_4^2\end{array} & \begin{array}{c}\mu_2^2\nu_4^2+\mu_5^2\nu_4^2\\+\mu_2^2\nu_5^2+\mu_4^2\nu_5^2\end{array} & \begin{array}{c}-\mu_3\mu_5\nu_5\nu_4+\mu_2\mu_5\nu_5\nu_1\\-\mu_4\mu_1\nu_5^2\end{array} & \begin{array}{c}\mu_2\nu_2\mu_4\nu_4\\-\mu_2^2\nu_5\nu_1-\mu_4^2\nu_5\nu_1\end{array} & \begin{array}{c}-\mu_5\nu_5\mu_2\nu_2\\+\mu_5^2\nu_4\nu_3+\mu_2^2\nu_4\nu_3\end{array} \\
\begin{array}{c}-\mu_1\nu_1\mu_3\nu_3\\-\mu_1^2\nu_5\nu_4-\mu_3^2\nu_5\nu_4\end{array} & \begin{array}{c}-\mu_3\mu_5\nu_5\nu_4+\mu_2\mu_5\nu_5\nu_1\\-\mu_4\mu_1\nu_5^2\end{array} & \begin{array}{c}\mu_3^2\nu_5^2+\mu_1^2\nu_5^2\\+\mu_5^2\nu_1^2+\mu_3^2\nu_1^2\end{array} & \begin{array}{c}\mu_4\mu_1\nu_1\nu_5-\mu_3\mu_1\nu_1\nu_2\\-\mu_5\mu_2\nu_1^2\end{array} & \begin{array}{c}-\mu_3\nu_3\mu_5\nu_5\\-\mu_3^2\nu_2\nu_1-\mu_5^2\nu_2\nu_1\end{array} \\
\begin{array}{c}-\mu_4\nu_4\mu_1\nu_1\\+\mu_4^2\nu_3\nu_2+\mu_1^2\nu_3\nu_2\end{array} & \begin{array}{c}\mu_2\nu_2\mu_4\nu_4\\-\mu_2^2\nu_5\nu_1-\mu_4^2\nu_5\nu_1\end{array} & \begin{array}{c}\mu_4\mu_1\nu_1\nu_5-\mu_3\mu_1\nu_1\nu_2\\-\mu_5\mu_2\nu_1^2\end{array} & \begin{array}{c}\mu_2^2\nu_1^2+\mu_4^2\nu_1^2\\+\mu_1^2\nu_2^2+\mu_4^2\nu_2^2\end{array} & \begin{array}{c}\mu_5\mu_2\nu_2\nu_1+\mu_4\mu_2\nu_2\nu_3\\+\mu_1\mu_3\nu_2^2\end{array} \\
\begin{array}{c}\mu_5\mu_3\nu_3\nu_4+\mu_1\mu_3\nu_3\nu_2\\+\mu_2\mu_4\nu_3^2\end{array} & \begin{array}{c}-\mu_5\nu_5\mu_2\nu_2\\+\mu_5^2\nu_4\nu_3+\mu_2^2\nu_4\nu_3\end{array} & \begin{array}{c}-\mu_3\nu_3\mu_5\nu_5\\-\mu_3^2\nu_2\nu_1-\mu_5^2\nu_2\nu_1\end{array} & \begin{array}{c}\mu_5\mu_2\nu_2\nu_1+\mu_4\mu_2\nu_2\nu_3\\+\mu_1\mu_3\nu_2^2\end{array} & \begin{array}{c}\mu_2^2\nu_3^2+\mu_5^2\nu_3^2\\+\mu_5^2\nu_2^2+\mu_3^2\nu_2^2\end{array}
\end{pmatrix}$$

(W64)

$$MN^2M = \tag{.1}$$

$$\begin{pmatrix}
\mu_2^2\nu_5^2+\mu_2^2\nu_1^2 & -\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2 & -\mu_4\mu_2\nu_2\nu_1-\mu_5\mu_2\nu_2\nu_3 & \mu_2\mu_5\nu_5\nu_4-\mu_3\mu_5\nu_5\nu_1 & \mu_5\nu_5\mu_1\nu_1 \\
+\mu_5^2\nu_1^2+\mu_5^2\nu_2^2 & -\mu_3\mu_5\nu_1^2-\mu_3\mu_5\nu_2^2 & +\mu_2^2\nu_4\nu_5 & -\mu_5^2\nu_2\nu_3 & -\mu_2\mu_4\nu_5^2-\mu_2\mu_4\nu_1^2 \\
-\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2 & \mu_3^2\nu_1^2+\mu_3^2\nu_2^2 & \mu_2\nu_2\mu_3\nu_3 & \mu_5\mu_3\nu_3\nu_2+\mu_1\mu_3\nu_3\nu_4 & \mu_4\mu_1\nu_1\nu_2-\mu_3\mu_1\nu_1\nu_5 \\
-\mu_3\mu_5\nu_1^2-\mu_3\nu_5\nu_2^2 & +\mu_1^2\nu_3^2+\mu_1^2\nu_2^2 & +\mu_1\mu_4\nu_2^2+\mu_1\mu_4\nu_3^2 & +\mu_3^2\nu_5\nu_1 & -\mu_1^2\nu_3\nu_4 \\
-\mu_4\mu_2\nu_2\nu_1-\mu_5\mu_2\nu_2\nu_3 & \mu_2\nu_2\mu_3\nu_3 & \mu_2^2\nu_4^2+\mu_2^2\nu_3^2 & \mu_3\nu_3\mu_4\nu_4 & -\mu_1\mu_4\nu_4\nu_3-\mu_2\mu_4\nu_4\nu_5 \\
+\mu_2^2\nu_4\nu_5 & +\mu_1\mu_4\nu_2^2+\mu_1\mu_4\nu_3^2 & +\mu_4^2\nu_3^2+\mu_4^2\nu_2^2 & +\mu_5\mu_2\nu_3^2+\mu_5\mu_2\nu_4^2 & +\mu_4^2\nu_1\nu_2 \\
\mu_2\mu_5\nu_5\nu_4-\mu_3\mu_5\nu_5\nu_1 & \mu_5\mu_3\nu_3\nu_2+\mu_1\mu_3\nu_3\nu_4 & \mu_3\nu_3\mu_4\nu_4 & \mu_5^2\nu_4^2+\mu_5^2\nu_3^2 & -\mu_4\nu_4\mu_5\nu_5 \\
-\mu_5^2\nu_2\nu_3 & +\mu_3^2\nu_5\nu_1 & +\mu_5\mu_2\nu_3^2+\mu_5\mu_2\nu_4^2 & +\mu_3^2\nu_4^2+\mu_3^2\nu_5^2 & -\mu_1\mu_3\nu_4^2-\mu_1\mu_3\nu_5^2 \\
\mu_5\nu_5\mu_1\nu_1 & \mu_4\mu_1\nu_1\nu_2-\mu_3\mu_1\nu_1\nu_5 & -\mu_1\mu_4\nu_4\nu_3-\mu_2\mu_4\nu_4\nu_5 & -\mu_4\nu_4\mu_5\nu_5 & \mu_1^2\nu_4^2+\mu_1^2\nu_5^2 \\
-\mu_2\mu_4\nu_5^2-\mu_2\mu_4\nu_1^2 & -\mu_1^2\nu_3\nu_4 & +\mu_4^2\nu_1\nu_2 & -\mu_1\mu_3\nu_4^2-\mu_1\mu_3\nu_5^2 & +\mu_4^2\nu_5^2+\mu_4^2\nu_1^2
\end{pmatrix}$$

$$NM^2N = \tag{.2}$$

$$\begin{pmatrix}
\mu_3^2\nu_4^2+\mu_1^2\nu_4^2 & \mu_1\mu_4\nu_4\nu_5+\mu_2\mu_4\nu_4\nu_3 & -\mu_1\nu_1\mu_3\nu_3 & -\mu_4\nu_4\mu_1\nu_1 & \mu_5\mu_3\nu_3\nu_4+\mu_1\mu_3\nu_3\nu_2 \\
+\mu_1^2\nu_3^2+\mu_4^2\nu_3^2 & +\mu_3\mu_5\nu_4^2 & -\mu_1^2\nu_5\nu_4-\mu_3^2\nu_5\nu_4 & +\mu_4^2\nu_3\nu_2+\mu_1^2\nu_3\nu_2 & +\mu_2\mu_4\nu_3^2 \\
\mu_1\mu_4\nu_4\nu_5+\mu_2\mu_4\nu_4\nu_3 & \mu_2^2\nu_4^2+\mu_5^2\nu_4^2 & -\mu_3\mu_5\nu_5\nu_4+\mu_2\mu_5\nu_5\nu_1 & \mu_2\nu_2\mu_4\nu_4 & -\mu_5\nu_5\mu_2\nu_2 \\
+\mu_3\mu_5\nu_4^2 & +\mu_2^2\nu_5^2+\mu_4^2\nu_5^2 & -\mu_4\mu_1\nu_5^2 & -\mu_2^2\nu_5\nu_1-\mu_4^2\nu_5\nu_1 & +\mu_5^2\nu_4\nu_3+\mu_2^2\nu_4\nu_3 \\
-\mu_1\nu_1\mu_3\nu_3 & -\mu_3\mu_5\nu_5\nu_4+\mu_2\mu_5\nu_5\nu_1 & \mu_3^2\nu_5^2+\mu_1^2\nu_5^2 & \mu_4\mu_1\nu_1\nu_5-\mu_3\mu_1\nu_1\nu_2 & -\mu_3\nu_3\mu_5\nu_5 \\
-\mu_1^2\nu_5\nu_4-\mu_3^2\nu_5\nu_4 & -\mu_4\mu_1\nu_5^2 & +\mu_5^2\nu_1^2+\mu_3^2\nu_1^2 & -\mu_5\mu_2\nu_1^2 & -\mu_3^2\nu_2\nu_1-\mu_5^2\nu_2\nu_1 \\
-\mu_4\nu_4\mu_1\nu_1 & \mu_2\nu_2\mu_4\nu_4 & \mu_4\mu_1\nu_1\nu_5-\mu_3\mu_1\nu_1\nu_2 & \mu_2^2\nu_1^2+\mu_4^2\nu_1^2 & \mu_5\mu_2\nu_2\nu_1+\mu_4\mu_2\nu_2\nu_3 \\
+\mu_4^2\nu_3\nu_2+\mu_1^2\nu_3\nu_2 & -\mu_2^2\nu_5\nu_1-\mu_4^2\nu_5\nu_1 & -\mu_5\mu_2\nu_1^2 & +\mu_1^2\nu_2^2+\mu_4^2\nu_2^2 & +\mu_1\mu_3\nu_2^2 \\
\mu_5\mu_3\nu_3\nu_4+\mu_1\mu_3\nu_3\nu_2 & -\mu_5\nu_5\mu_2\nu_2 & -\mu_3\nu_3\mu_5\nu_5 & \mu_5\mu_2\nu_2\nu_1+\mu_4\mu_2\nu_2\nu_3 & \mu_2^2\nu_3^2+\mu_5^2\nu_3^2 \\
+\mu_2\mu_4\nu_3^2 & +\mu_5^2\nu_4\nu_3+\mu_2^2\nu_4\nu_3 & -\mu_3^2\nu_2\nu_1-\mu_5^2\nu_2\nu_1 & +\mu_1\mu_3\nu_2^2 & +\mu_5^2\nu_2^2+\mu_3^2\nu_2^2
\end{pmatrix}$$

定理（73）

$$A = M + N = \tag{.1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \mu_2 & \mu_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & -\mu_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & 0 & 0 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & 0 & 0 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu_4 & \mu_2 & \mu_5 & -\nu_3 \\ \nu_4 & 0 & -\nu_5 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & \nu_5 & 0 & -\nu_1 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & \nu_1 & 0 & -\nu_2 \\ \nu_3 & -\mu_1 & -\mu_4 & \nu_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = (M^2) + (MN + NM) + (N^2) = \tag{.2}$$

$$\begin{pmatrix}
\begin{matrix}-\mu_2^2-\mu_5^2\\-\nu_3^2-\nu_4^2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_3\mu_5\\+\mu_1\nu_3+\mu_2\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_4\nu_3+\mu_5\nu_1\\+\nu_4\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_2\nu_1+\mu_3\nu_4\\-\nu_2\nu_3\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_2\mu_4\\-\mu_5\nu_2-\mu_1\nu_4\end{matrix} \\
\begin{matrix}\mu_3\mu_5\\+\mu_1\nu_3+\mu_2\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_3^2-\mu_1^2\\-\nu_4^2-\nu_5^2\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_4\mu_1\\+\mu_2\nu_4-\mu_3\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_5\nu_4+\mu_1\nu_2\\+\nu_5\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_3\nu_2-\mu_4\nu_5\\-\nu_3\nu_4\end{matrix} \\
\begin{matrix}\mu_4\nu_3+\mu_5\nu_1\\+\nu_4\nu_5\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_4\mu_1\\+\mu_2\nu_4-\mu_3\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_2^2-\mu_4^2\\-\nu_5^2-\nu_1^2\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_5\mu_2\\+\mu_3\nu_5+\mu_4\nu_2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_1\nu_5+\mu_2\nu_3\\+\nu_1\nu_2\end{matrix} \\
\begin{matrix}-\mu_2\nu_1+\mu_3\nu_4\\-\nu_2\nu_3\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_5\nu_4+\mu_1\nu_2\\+\nu_5\nu_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_5\nu_2\\+\mu_3\nu_5+\mu_4\nu_2\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_5^2-\mu_3^2\\-\nu_1^2-\nu_2^2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_1\mu_3\\+\mu_4\nu_1+\mu_5\nu_3\end{matrix} \\
\begin{matrix}\mu_2\mu_4\\-\mu_5\nu_2-\mu_1\nu_4\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_3\nu_2-\mu_4\nu_5\\-\nu_3\nu_4\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_1\nu_5+\mu_2\nu_3\\+\nu_1\nu_2\end{matrix} & \begin{matrix}\mu_1\mu_3\\+\mu_4\nu_1+\mu_5\nu_3\end{matrix} & \begin{matrix}-\mu_1^2-\mu_4^2\\-\nu_2^2-\nu_3^2\end{matrix}
\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= (M+N)(M^2 + MN + NM + N^2) \\ &= (M^3) + (M^2N + NM^2) + (MNM + NMN) \\ &\qquad + (N^2M + MN^2) + (N^3) \end{aligned}$$

$$A^3 = \tag{.3)}$$

$$\begin{pmatrix}
0 &
\begin{array}{l} -\mu_1\mu_2\mu_4 \\ +\mu^2\nu_4-\mu_4^2\nu_4 \\ -\mu_2\mu_3\nu_1+\mu_5\mu_1\nu_2 \\ +\mu_4\nu_5\nu_3 \\ -\mu_3\nu_3\nu_2+\mu_5\nu_5\nu_1 \\ +\nu^2\nu_4-\nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) \end{array} &
\begin{array}{l} -\mu^2\mu_2+\mu_2(\mu_1^2+\mu_3^2) \\ +\mu_1\mu_4\nu_4-\mu_3\mu_5\nu_5 \\ +\mu_4\mu_5\nu_2 \\ +\mu_3\nu_4\nu_1-\mu_1\nu_3\nu_5 \\ -\nu^2\mu_2+\nu_2^2\mu_2 \\ -\nu_1\nu_2\nu_3 \end{array} &
\begin{array}{l} -\mu^2\mu_5+\mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) \\ +\mu_4\mu_2\nu_2-\mu_1\mu_3\nu_3 \\ -\mu_2\mu_3\nu_5 \\ -\mu_1\nu_2\nu_4-\mu_4\nu_1\nu_3 \\ -\nu^2\mu_5+\nu_5^2\mu_5 \\ -\nu_4\nu_5\nu_1 \end{array} &
\begin{array}{l} \mu_5\mu_1\mu_3 \\ +\mu^2\nu_3-\mu_3^2\nu_3 \\ +\mu_1\mu_2\nu_5+\mu_4\mu_5\nu_1 \\ -\mu_3\nu_4\nu_2 \\ +\mu_4\nu_4\nu_5+\mu_2\nu_2\nu_1 \\ +\nu^2\nu_3-\nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) \end{array} \\
\begin{array}{l} \mu_1\mu_2\mu_4 \\ -\mu^2\nu_4+\mu_4^2\nu_4 \\ +\mu_2\mu_3\nu_1-\mu_5\mu_1\nu_2 \\ -\mu_4\nu_5\nu_3 \\ +\mu_3\nu_3\nu_2-\mu_5\nu_5\nu_1 \\ -\nu^2\nu_4+\nu_4(\nu_1^2+\nu_2^2) \end{array} &
0 &
\begin{array}{l} \mu_2\mu_3\mu_5 \\ +\mu^2\nu_5-\mu_5^2\nu_5 \\ +\mu_1\mu_2\nu_3-\mu_3\mu_4\nu_2 \\ +\mu_5\nu_1\nu_4 \\ +\mu_4\nu_4\nu_3+\mu_1\nu_1\nu_2 \\ +\nu^2\nu_5-\nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) \end{array} &
\begin{array}{l} \mu^2\mu_3-\mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) \\ +\mu_2\mu_5\nu_5+\mu_4\mu_1\nu_1 \\ +\mu_5\mu_1\nu_3 \\ -\mu_4\nu_5\nu_2-\mu_2\nu_4\nu_1 \\ +\nu^2\mu_3-\nu_3^2\mu_3 \\ -\nu_2\nu_3\nu_4 \end{array} &
\begin{array}{l} -\mu^2\mu_1+\mu_1(\mu_2^2+\mu_5^2) \\ +\mu_2\mu_4\nu_4-\mu_5\mu_3\nu_3 \\ -\mu_3\mu_4\nu_1 \\ -\mu_2\nu_3\nu_5-\mu_5\nu_2\nu_4 \\ -\nu^2\mu_1+\nu_1^2\mu_1 \\ -\nu_5\nu_1\nu_2 \end{array} \\
\begin{array}{l} \mu^2\mu_2-\mu_2(\mu_1^2+\mu_3^2) \\ -\mu_1\mu_4\nu_4+\mu_3\mu_5\nu_5 \\ -\mu_4\mu_5\nu_2 \\ -\mu_3\nu_4\nu_1+\mu_1\nu_3\nu_5 \\ +\nu^2\nu_2-\nu_2^2\mu_2 \\ +\nu_1\nu_2\nu_3 \end{array} &
\begin{array}{l} -\mu_2\mu_3\mu_5 \\ -\mu^2\nu_5+\mu_5^2\nu_5 \\ -\mu_1\mu_2\nu_3+\mu_3\mu_4\nu_2 \\ -\mu_5\nu_1\nu_4 \\ -\mu_4\nu_4\nu_3-\mu_1\nu_1\nu_2 \\ -\nu^2\nu_5+\nu_5(\nu_2^2+\nu_3^2) \end{array} &
0 &
\begin{array}{l} \mu_3\mu_4\mu_1 \\ +\mu^2\nu_1-\mu_1^2\nu_1 \\ -\mu_2\mu_3\nu_4+\mu_4\mu_5\nu_3 \\ +\mu_1\nu_2\nu_5 \\ +\mu_5\nu_5\nu_4+\mu_2\nu_2\nu_3 \\ +\nu^2\nu_1-\nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) \end{array} &
\begin{array}{l} -\mu^2\mu_4+\mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) \\ +\mu_5\mu_2\nu_2-\mu_3\mu_1\nu_1 \\ +\mu_1\mu_2\nu_4 \\ -\mu_5\nu_1\nu_3+\mu_3\nu_5\nu_2 \\ -\nu^2\mu_4+\nu_4^2\mu_4 \\ -\nu_3\nu_4\nu_5 \end{array} \\
\begin{array}{l} \mu^2\mu_5-\mu_5(\mu_1^2+\mu_4^2) \\ -\mu_4\mu_2\nu_2+\mu_1\mu_3\nu_3 \\ +\mu_2\mu_3\nu_5 \\ +\mu_1\nu_2\nu_4+\mu_4\nu_1\nu_3 \\ +\nu^2\mu_5-\nu_5^2\mu_5 \\ +\nu_4\nu_5\nu_1 \end{array} &
\begin{array}{l} -\mu^2\mu_3+\mu_3(\mu_2^2+\mu_4^2) \\ -\mu_2\mu_5\nu_5-\mu_4\mu_1\nu_1 \\ -\mu_5\mu_1\nu_3 \\ +\mu_4\nu_5\nu_2+\mu_2\nu_4\nu_1 \\ -\nu^2\mu_3+\nu_3^2\mu_3 \\ +\nu_2\nu_3\nu_4 \end{array} &
\begin{array}{l} -\mu_3\mu_4\mu_1 \\ -\mu^2\nu_1+\mu_1^2\nu_1 \\ +\mu_2\mu_3\nu_4-\mu_4\mu_5\nu_3 \\ -\mu_1\nu_2\nu_5 \\ -\mu_5\nu_5\nu_4-\mu_2\nu_2\nu_3 \\ -\nu^2\nu_1+\nu_1(\nu_3^2+\nu_4^2) \end{array} &
0 &
\begin{array}{l} -\mu_4\mu_5\mu_2 \\ +\mu^2\nu_2-\mu_2^2\nu_2 \\ +\mu_5\mu_1\nu_4-\mu_3\mu_4\nu_5 \\ +\mu_2\nu_3\nu_1 \\ +\mu_1\nu_1\nu_5-\mu_3\nu_3\nu_4 \\ +\nu^2\nu_2-\nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) \end{array} \\
\begin{array}{l} -\mu_5\mu_1\mu_3 \\ -\mu^2\nu_3+\mu_3^2\nu_3 \\ -\mu_1\mu_2\nu_5-\mu_4\mu_5\nu_1 \\ +\mu_3\nu_4\nu_2 \\ -\mu_4\nu_4\nu_5-\mu_2\nu_2\nu_1 \\ -\nu^2\nu_3+\nu_3(\nu_5^2+\nu_1^2) \end{array} &
\begin{array}{l} \mu^2\mu_1-\mu_1(\mu_2^2+\mu_5^2) \\ -\mu_2\mu_4\nu_4+\mu_5\mu_3\nu_3 \\ +\mu_3\mu_4\nu_1 \\ +\mu_2\nu_3\nu_5+\mu_5\nu_2\nu_4 \\ +\nu^2\mu_1-\nu_1^2\mu_1 \\ +\nu_5\nu_1\nu_2 \end{array} &
\begin{array}{l} \mu^2\mu_4-\mu_4(\mu_3^2+\mu_5^2) \\ -\mu_5\mu_2\nu_2+\mu_3\mu_1\nu_1 \\ -\mu_1\mu_2\nu_4 \\ +\mu_5\nu_1\nu_3-\mu_3\nu_5\nu_2 \\ +\nu^2\mu_4-\nu_4^2\mu_4 \\ +\nu_3\nu_4\nu_5 \end{array} &
\begin{array}{l} \mu_4\mu_5\mu_2 \\ -\mu^2\nu_2+\mu_2^2\nu_2 \\ -\mu_5\mu_1\nu_4+\mu_3\mu_4\nu_5 \\ -\mu_2\nu_3\nu_1 \\ -\mu_1\nu_1\nu_5+\mu_3\nu_3\nu_4 \\ -\nu^2\nu_2+\nu_2(\nu_4^2+\nu_5^2) \end{array} &
0
\end{pmatrix}$$

【P271】2月13日（土） 5次の反対称行列（続き）

$A^4 =$

$+M^4$	
$+M^3N$	$+NM^3$
$+M^2NM$	$+MNM^2$
$+M^2N^2$	$+N^2M^2$
$+MNMN$	$+NMNM$
$+MN^2M$	$+NM^2N$
$+N^2MN$	$+NMN^2$
$+N^3M$	$+MN^3$
$+N^4$	

定理（75.10）

$A^4|_{11} =$

$+\mu^2(\mu_2^2+\mu_5^2) - \alpha + \mu_3^2\mu_4^2$	
$-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 \quad + \mu_5\mu_1\mu_3\nu_3$	$-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 \quad + \mu_5\mu_1\mu_3\nu_3$
$-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2 \quad + \mu_2\mu_3\mu_5\nu_5$	$-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2 \quad + \mu_2\mu_3\mu_5\nu_5$
$+\mu_2^2\nu_4^2 + \mu_2^2\nu_3^2 \quad + \mu_5^2\nu_4^2 \quad + \mu_5^2\nu_3^2$	$+\mu_2^2\nu_4^2 + \mu_2^2\nu_3^2 \quad + \mu_5^2\nu_4^2 \quad + \mu_5^2\nu_3^2$
$-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 + \mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 + \mu_5\mu_1\nu_2\nu_4 + \mu_5\mu_4\nu_3\nu_1$	$-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 + \mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 + \mu_5\mu_1\nu_2\nu_4 + \mu_5\mu_4\nu_3\nu_1$
$+\mu_2^2\nu_5^2 + \mu_2^2\nu_1^2 \quad + \mu_5^2\nu_1^2 \quad + \mu_5^2\nu_2^2$	$+\mu_3^2\nu_4^2 + \mu_1^2\nu_4^2 \quad + \mu_1^2\nu_3^2 \quad + \mu_4^2\nu_3^2$
$+\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 \quad - \nu_2\nu_4\nu_3\mu_3$	$+\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 \quad - \nu_2\nu_4\nu_3\mu_3$
$+\nu_4\nu_1\nu_5\mu_5 \quad + \nu_3\nu_1\nu_2\mu_2$	$+\nu_4\nu_1\nu_5\mu_5 \quad + \nu_3\nu_1\nu_2\mu_2$
$+\nu^2(\nu_3^2+\nu_4^2) - \beta + \nu_5^2\nu_2^2$	

定理（75.11）

2月14日（日） 5次の反対称行列（続き）

$A^4|_{12} = A^4|_{21} =$

$-\mu^2\mu_3\mu_5 + \mu_4^2\mu_3\mu_5$	
$-\mu_2^3\nu_5 \quad -\mu_2\mu_4^2\nu_5 \quad -\mu_2\mu_5^2\nu_5$	$-\mu_1^3\nu_3 \quad -\mu_1\mu_3^2\nu_3 \quad -\mu_1\mu_4^2\nu_3$
$-\mu_1\mu_2^2\nu_3 \quad -\mu_1\mu_5^2\nu_3 \quad +\mu_3\mu_4\mu_2\nu_2$	$-\mu_2\mu_1^2\nu_5 \quad -\mu_2\mu_3^2\nu_5 \quad -\mu_4\mu_5\mu_1\nu_1$
$-\mu_3\mu_5\nu_4^2 \quad -\mu_3\mu_5\nu_5^2 \quad -\mu_2\mu_4\nu_4\nu_3$	$-\mu_5\mu_3\nu_3^2 \quad -\mu_5\mu_3\nu_4^2 \quad -\mu_1\mu_4\nu_4\nu_5$
$+\mu_4\mu_5\nu_5\nu_2$	$-\mu_4\mu_3\nu_3\nu_1$
$-\mu_3\mu_5\nu_1^2 \quad -\mu_3\mu_5\nu_2^2 \quad -\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2$	$+\mu_3\mu_5\nu_4^2 \quad +\mu_1\mu_4\nu_4\nu_5 \quad +\mu_2\mu_4\nu_4\nu_3$
$-\nu_5\nu_3^2\mu_2 \qquad -\nu_2\nu_3\nu_4\mu_5$	$-\nu_3\nu_5^2\mu_1 \qquad +\nu_5\nu_1\nu_4\mu_3$
$-\nu_3^3\mu_1 \quad -\nu_3\nu_2^2\mu_1 \quad -\nu_3\nu_4^2\mu_1 \quad -\nu_4\nu_5\nu_1\mu_3$	$-\nu_5^3\mu_2 \quad -\nu_5\nu_1^2\mu_2 \quad -\nu_5\nu_4^2\mu_2 \quad +\nu_2\nu_3\nu_4\mu_5$
$-\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3$	

定理（75.12）

$A^4|_{13} = A^4|_{31} =$

$-\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5$	
$-\mu_5^3\nu_1 \quad -\mu_5\mu_2^2\nu_1 \quad -\mu_5\mu_3^2\nu_1 \quad +\mu_4\mu_1\mu_2\nu_5$	$-\mu_4^3\nu_3 \quad -\mu_4\mu_1^2\nu_3 \quad -\mu_4\mu_2^2\nu_3 \quad -\mu_2\mu_3\mu_5\nu_4$
$-\mu_4\mu_5^2\nu_3 \qquad +\mu_5\mu_2\mu_3\nu_4$	$-\mu_5\mu_4^2\nu_1 \qquad -\mu_4\mu_1\mu_2\nu_5$
$-\mu_2^2\nu_5\nu_4 \quad -\mu_5^2\nu_5\nu_4 \quad +\mu_4\mu_2\nu_2\nu_1$	$-\mu_2^2\nu_4\nu_5 \quad -\mu_4^2\nu_4\nu_5 \quad +\mu_5\mu_2\nu_2\nu_3$
$-\mu_1\mu_5\nu_5\nu_2$	$+\mu_3\mu_4\nu_4\nu_2$
$+\mu_2^2\nu_4\nu_5 \quad -\mu_4\mu_2\nu_2\nu_1 \quad -\mu_5\mu_2\nu_2\nu_3$	$-\mu_1^2\nu_5\nu_4 \quad -\mu_3^2\nu_5\nu_4 \quad -\mu_1\nu_1\mu_3\nu_3$
$-\nu_1\nu_3^2\mu_5 \quad -\nu_1\nu_4^2\mu_5 \quad +\nu_2\nu_5\nu_3\mu_3$	$-\nu_3\nu_5^2\mu_4 \quad -\nu_3\nu_1^2\mu_4 \quad -\nu_2\nu_4\nu_1\mu_1$
$-\nu_3^3\mu_4 \quad -\nu_3\nu_2^2\mu_4 \quad -\nu_3\nu_4^2\mu_4$	$-\nu_1^3\mu_5 \quad -\nu_1\nu_2^2\mu_5 \quad -\nu_1\nu_5^2\mu_5$
$-\nu^2\nu_4\nu_5 + \nu_2^2\nu_4\nu_5$	

定理（75.13）

【P273】2月15日（月） 5次の反対称行列（続き）

$A^4|_{14} = A^4|_{41} =$

$+\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$	
$+\mu_2^3\nu_1 \quad +\mu_2\mu_4^2\nu_1 \quad +\mu_2\mu_5^2\nu_1 \quad +\mu_5\mu_1\mu_3\nu_2$	$-\mu_3^3\nu_4 \quad -\mu_3\mu_5^2\nu_4 \quad -\mu_3\mu_1^2\nu_4 \quad -\mu_2\mu_4\mu_5\nu_3$
$-\mu_3\mu_2^2\nu_4 \quad +\mu_2\mu_4\mu_5\nu_3$	$+\mu_2\mu_3^2\nu_1 \quad -\mu_3\mu_5\mu_1\nu_2$
$+\mu_2^2\nu_2\nu_3 \quad +\mu_5^2\nu_2\nu_3 \quad +\mu_3\mu_5\nu_5\nu_1$	$+\mu_3^2\nu_3\nu_2 \quad +\mu_5^2\nu_3\nu_2 \quad -\mu_2\mu_5\nu_5\nu_4$
$+\mu_1\mu_2\nu_2\nu_5$	$-\mu_4\mu_3\nu_3\nu_5$
$-\mu_5^2\nu_2\nu_3 \quad +\mu_2\mu_5\nu_5\nu_4 \quad -\mu_3\mu_5\nu_5\nu_1$	$+\mu_1^2\nu_2\nu_3 \quad +\mu_4^2\nu_2\nu_3 \quad -\mu_1\nu_1\mu_4\nu_4$
$+\nu_1\nu_3^2\mu_2 \quad +\nu_1\nu_4^2\mu_2 \quad +\nu_2\nu_5\nu_4\mu_4$	$-\nu_4\nu_1^2\mu_3 \quad -\nu_4\nu_2^2\mu_3 \quad +\nu_3\nu_5\nu_1\mu_1$
$-\nu_4^3\mu_3 \quad -\nu_4\nu_3^2\mu_3 \quad -\nu_4\nu_5^2\mu_3$	$+\nu_1^3\mu_2 \quad +\nu_1\nu_2^2\mu_2 \quad +\nu_1\nu_5^2\mu_2$
$+\nu^2\nu_2\nu_3 \quad -\nu_5^2\nu_2\nu_3$	

定理（75.14）

$A^4|_{15} = A^4|_{51} =$

$-\mu^2\mu_2\mu_4 \quad +\mu_3^2\mu_2\mu_4$	
$+\mu_5^3\nu_2 \quad +\mu_5\mu_2^2\nu_2 \quad +\mu_5\mu_3^2\nu_2$	$+\mu_1^3\nu_4 \quad +\mu_1\mu_3^2\nu_4 \quad +\mu_1\mu_4^2\nu_4$
$+\mu_1\mu_2^2\nu_4 \quad +\mu_1\mu_5^2\nu_4 \quad -\mu_3\mu_4\mu_5\nu_5$	$+\mu_5\mu_1^2\nu_2 \quad +\mu_5\mu_4^2\nu_2 \quad -\mu_2\mu_3\mu_1\nu_1$
$-\mu_4\mu_2\nu_2^2 \quad -\mu_4\mu_2\nu_3^2 \quad -\mu_5\mu_3\nu_3\nu_4$	$-\mu_2\mu_4\nu_3^2 \quad -\mu_2\mu_4\nu_4^2 \quad -\mu_1\mu_3\nu_3\nu_2$
$+\mu_3\mu_2\nu_2\nu_5$	$+\mu_3\mu_4\nu_4\nu_1$
$-\mu_2\mu_4\nu_5^2 \quad -\mu_2\mu_4\nu_1^2 \quad +\mu_5\nu_5\mu_1\nu_1$	$+\mu_2\mu_4\nu_3^2 \quad +\mu_5\mu_3\nu_3\nu_4 \quad +\mu_1\mu_3\nu_3\nu_2$
$+\nu_2\nu_4^2\mu_5 \quad +\nu_3\nu_4\nu_5\mu_2$	$+\nu_4\nu_2^2\mu_1 \quad +\nu_1\nu_2\nu_3\mu_4$
$+\nu_4^3\mu_1 \quad +\nu_4\nu_3^2\mu_1 \quad +\nu_4\nu_5^2\mu_1 \quad -\nu_1\nu_2\nu_3\mu_4$	$+\nu_2^3\mu_5 \quad +\nu_2\nu_1^2\mu_5 \quad +\nu_2\nu_3^2\mu_5 \quad -\nu_3\nu_4\nu_5\mu_2$
$+\nu_4\nu_5\nu_1\nu_2$	

定理（75.15）

【P274】2月16日(火) 5次の反対称行列(続き)

$A^4\big|_{22} =$

$+\mu^2(\mu_1^2+\mu_3^2) - \alpha + \mu_4^2\mu_5^2$	
$+\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5 \quad - \quad \mu_1\mu_2\mu_4\nu_4$	$+\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5 \quad - \quad \mu_1\mu_2\mu_4\nu_4$
$+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 \quad + \quad \mu_3\mu_4\mu_1\nu_1$	$+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 \quad + \quad \mu_3\mu_4\mu_1\nu_1$
$+\mu_3^2\nu_4^2 \quad +\mu_3^2\nu_5^2 \quad +\mu_1^2\nu_4^2 \quad +\mu_1^2\nu_5^2$	$+\mu_3^2\nu_4^2 \quad +\mu_3^2\nu_5^2 \quad +\mu_1^2\nu_4^2 \quad +\mu_1^2\nu_5^2$
$-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 - \mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 + \mu_5\mu_1\nu_2\nu_4 + \mu_1\mu_2\nu_3\nu_5$	$-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 - \mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 + \mu_5\mu_1\nu_2\nu_4 + \mu_1\mu_2\nu_3\nu_5$
$+\mu_3^2\nu_1^2 \quad +\mu_3^2\nu_2^2 \quad +\mu_1^2\nu_3^2 \quad +\mu_1^2\nu_2^2$	$+\mu_2^2\nu_4^2 \quad +\mu_5^2\nu_4^2 \quad +\mu_2^2\nu_5^2 \quad +\mu_4^2\nu_5^2$
$+\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 \quad + \quad \nu_1\nu_4\nu_5\mu_5$	$+\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 \quad + \quad \nu_1\nu_4\nu_5\mu_5$
$-\nu_4\nu_2\nu_3\mu_3 \quad + \quad \nu_5\nu_2\nu_1\mu_1$	$-\nu_4\nu_2\nu_3\mu_3 \quad + \quad \nu_5\nu_2\nu_1\mu_1$
$+\nu^2(\nu_4^2+\nu_5^2) - \beta + \nu_1^2\nu_3^2$	定理(75.22)

$A^4\big|_{23} = A^4\big|_{32} =$

$+\mu^2\mu_1\mu_4 \quad - \quad \mu_5^2\mu_1\mu_4$	
$+\mu_3^3\nu_1 \quad + \mu_3\mu_5^2\nu_1 + \mu_3\mu_1^2\nu_1$	$-\mu_2^3\nu_4 \quad - \mu_2\mu_4^2\nu_4 - \mu_2\mu_5^2\nu_4$
$-\mu_2\mu_1^2\nu_4 - \mu_2\mu_3^2\nu_4 + \mu_4\mu_5\mu_3\nu_3$	$+\mu_3\mu_2^2\nu_1 + \mu_3\mu_4^2\nu_1 - \mu_5\mu_1\mu_2\nu_2$
$+\mu_4\mu_1\nu_5^2 + \mu_4\mu_1\nu_1^2 + \mu_3\mu_5\nu_5\nu_4$	$+\mu_1\mu_4\nu_4^2 + \mu_1\mu_4\nu_5^2 - \mu_2\mu_5\nu_5\nu_1$
$+\mu_5\mu_1\nu_1\nu_3$	$+\mu_5\mu_4\nu_4\nu_2$
$+\mu_1\mu_4\nu_2^2 + \mu_1\mu_4\nu_3^2 + \mu_2\nu_2\mu_3\nu_3$	$-\mu_4\mu_1\nu_5^2 - \mu_3\mu_5\nu_5\nu_4 + \mu_2\mu_5\nu_5\nu_1$
$+\nu_1\nu_4^2\mu_3 \quad - \quad \nu_3\nu_4\nu_5\mu_1$	$-\nu_4\nu_1^2\mu_2 \quad - \quad \nu_5\nu_1\nu_2\mu_4$
$-\nu_4^3\mu_2 \quad - \nu_4\nu_3^2\mu_2 \quad - \nu_4\nu_5^2\mu_2 \quad + \nu_5\nu_1\nu_2\mu_4$	$+\nu_1^3\mu_3 \quad + \nu_1\nu_2^2\mu_3 \quad + \nu_1\nu_5^2\mu_3 \quad + \nu_3\nu_4\nu_5\mu_1$
$-\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4$	定理(75.23)

【P275】2月17日(水) 5次の反対称行列(続き)

$A^4|_{24} = A^4|_{42} =$

$+\mu_1\mu_2\mu_4\mu_5$	
$-\mu_1^3\nu_2 - \mu_1\mu_3^2\nu_2 - \mu_1\mu_4^2\nu_2 - \mu_2\mu_3\mu_5\nu_1$	$-\mu_5^3\nu_4 - \mu_5\mu_2^2\nu_4 - \mu_5\mu_3^2\nu_4 - \mu_3\mu_4\mu_1\nu_5$
$-\mu_5\mu_1^2\nu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4\nu_5$	$-\mu_1\mu_5^2\nu_2 + \mu_5\mu_2\mu_3\nu_1$
$-\mu_1^2\nu_1\nu_5 - \mu_3^2\nu_1\nu_5 - \mu_5\mu_3\nu_3\nu_2$	$-\mu_3^2\nu_5\nu_1 - \mu_5^2\nu_5\nu_1 - \mu_1\mu_3\nu_3\nu_4$
$-\mu_2\mu_1\nu_1\nu_3$	$-\mu_4\mu_5\nu_5\nu_3$
$+\mu_3^2\nu_5\nu_1 + \mu_5\mu_3\nu_3\nu_2 + \mu_1\mu_3\nu_3\nu_4$	$-\mu_2^2\nu_5\nu_1 - \mu_4^2\nu_5\nu_1 + \mu_2\nu_2\mu_4\nu_4$
$-\nu_2\nu_4^2\mu_1 - \nu_2\nu_5^2\mu_1 - \nu_1\nu_3\nu_4\mu_4$	$-\nu_4\nu_1^2\mu_5 - \nu_4\nu_2^2\mu_5 - \nu_3\nu_5\nu_2\mu_2$
$-\nu_4^3\mu_5 - \nu_4\nu_3^2\mu_5 - \nu_4\nu_5^2\mu_5$	$-\nu_2^3\mu_1 - \nu_2\nu_1^2\mu_1 - \nu_2\nu_3^2\mu_1$
$-\nu^2\nu_5\nu_1 + \nu_3^2\nu_5\nu_1$	

定理(75.24)

$A^4|_{25} = A^4|_{52} =$

$+\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5$	
$-\mu_3^3\nu_2 - \mu_3\mu_5^2\nu_2 - \mu_3\mu_1^2\nu_2 - \mu_1\mu_2\mu_4\nu_3$	$+\mu_4^3\nu_5 + \mu_4\mu_1^2\nu_5 + \mu_4\mu_2^2\nu_5 + \mu_5\mu_1\mu_3\nu_4$
$+\mu_4\mu_3^2\nu_5 - \mu_3\mu_5\mu_1\nu_4$	$-\mu_3\mu_4^2\nu_2 + \mu_4\mu_1\mu_2\nu_3$
$+\mu_1^2\nu_3\nu_4 + \mu_3^2\nu_3\nu_4 - \mu_4\mu_1\nu_1\nu_2$	$+\mu_1^2\nu_4\nu_3 + \mu_4^2\nu_4\nu_3 + \mu_3\mu_1\nu_1\nu_5$
$-\mu_2\mu_3\nu_3\nu_1$	$+\mu_5\mu_4\nu_4\nu_1$
$-\mu_1^2\nu_3\nu_4 + \mu_4\mu_1\nu_1\nu_2 - \mu_3\mu_1\nu_1\nu_5$	$+\mu_2^2\nu_4\nu_3 + \mu_5^2\nu_4\nu_3 - \mu_5\nu_5\mu_2\nu_2$
$-\nu_2\nu_4^2\mu_3 - \nu_2\nu_5^2\mu_3 + \nu_1\nu_3\nu_5\mu_5$	$+\nu_5\nu_2^2\mu_4 + \nu_5\nu_3^2\mu_4 + \nu_1\nu_4\nu_2\mu_2$
$+\nu_5^3\mu_4 + \nu_5\nu_1^2\mu_4 + \nu_5\nu_4^2\mu_4$	$-\nu_2^3\mu_3 - \nu_2\nu_1^2\mu_3 - \nu_2\nu_3^2\mu_3$
$+\nu^2\nu_3\nu_4 - \nu_1^2\nu_3\nu_4$	

定理(75.25)

【P276】2月18日(木) 5次の反対称行列(続き)

$A^4|_{33}=$

$+\mu^2(\mu_2^2+\mu_4^2) - \alpha + \mu_5^2\mu_1^2$	
$+\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5 + \mu_3\mu_4\mu_1\nu_1$	$+\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5 + \mu_3\mu_4\mu_1\nu_1$
$-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 - \mu_4\mu_5\mu_2\nu_2$	$-\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 - \mu_4\mu_5\mu_2\nu_2$
$+\mu_2^2\nu_5^2 + \mu_2^2\nu_1^2 + \mu_4^2\nu_5^2 + \mu_4^2\nu_1^2$	$+\mu_2^2\nu_5^2 + \mu_2^2\nu_1^2 + \mu_4^2\mu_5^2 + \mu_4^2\nu_1^2$
$+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 - \mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 - \mu_3\mu_4\nu_5\nu_2 + \mu_5\mu_4\nu_3\nu_1$	$+\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 - \mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 - \mu_3\mu_4\nu_5\nu_2 + \mu_5\mu_4\nu_3\nu_1$
$+\mu_2^2\nu_3^2 + \mu_2^2\nu_4^2 + \mu_4^2\nu_3^2 + \mu_4^2\nu_2^2$	$+\mu_1^2\nu_5^2 + \mu_3^2\nu_5^2 + \mu_3^2\nu_1^2 + \mu_5^2\nu_1^2$
$+\nu_1\nu_4\nu_5\mu_5 + \nu_2\nu_5\nu_1\mu_1$	$+\nu_1\nu_4\nu_5\mu_5 + \nu_2\nu_5\nu_1\mu_1$
$+\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2 + \nu_5\nu_3\nu_4\mu_4$	$+\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2 + \nu_5\nu_3\nu_4\mu_4$
$+\nu^2(\nu_5^2+\nu_1^2) - \beta + \nu_2^2\nu_4^2$	

定理(75.33)

$A^4|_{34} = A^4|_{43} =$

$+\mu^2\mu_2\mu_5 - \mu_1^2\mu_2\mu_5$	
$-\mu_4^3\nu_2 - \mu_4\mu_1^2\nu_2 - \mu_4\mu_2^2\nu_2$	$+\mu_3^3\nu_5 + \mu_3\mu_5^2\nu_5 + \mu_3\mu_1^2\nu_5$
$+\mu_3\mu_2^2\nu_5 + \mu_3\mu_4^2\nu_5 - \mu_5\mu_1\mu_4\nu_4$	$-\mu_4\mu_3^2\nu_2 - \mu_4\mu_5^2\nu_2 + \mu_1\mu_2\mu_3\nu_3$
$+\mu_5\mu_2\nu_1^2 + \mu_5\mu_2\nu_2^2 - \mu_4\mu_1\nu_1\nu_5$	$+\mu_2\mu_5\nu_5^2 + \mu_2\mu_5\nu_1^2 + \mu_3\mu_1\nu_1\nu_2$
$+\mu_1\mu_2\nu_2\nu_4$	$+\mu_1\mu_5\nu_5\nu_3$
$+\mu_5\mu_2\nu_3^2 + \mu_5\mu_2\nu_4^2 + \mu_3\nu_3\mu_4\nu_4$	$-\mu_5\mu_2\nu_1^2 - \mu_3\mu_1\nu_1\nu_2 + \mu_4\mu_1\nu_1\nu_5$
$-\nu_2\nu_5^2\mu_4 - \nu_5\nu_1\nu_4\mu_2$	$+\nu_5\nu_2^2\mu_3 - \nu_1\nu_2\nu_3\mu_5$
$+\nu_5^3\mu_3 + \nu_5\nu_1^2\mu_3 + \nu_5\nu_4^2\mu_3 + \nu_1\nu_2\nu_3\mu_5$	$-\nu_2^3\mu_4 - \nu_2\nu_1^2\mu_4 - \nu_2\nu_3^2\mu_4 + \nu_1\nu_4\nu_5\mu_2$
$-\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5$	

定理(75.34)

【P277】2月19日(金) 5次の反対称行列(続き)

$A^4\big|_{35} = A^4\big|_{53} =$

$-\mu_1\mu_2\mu_3\mu_5$	
$-\mu_2^3\nu_3 - \mu_2\mu_4^2\nu_3 - \mu_2\mu_5^2\nu_3 - \mu_1\mu_3\mu_4\nu_2$	$-\mu_1^3\nu_5 - \mu_1\mu_3^2\nu_5 - \mu_1\mu_4^2\nu_5 + \mu_4\mu_5\mu_2\nu_1$
$-\mu_1\mu_2^2\nu_5 - \mu_2\mu_4\mu_5\nu_1$	$-\mu_2\mu_1^2\nu_3 + \mu_1\mu_3\mu_4\nu_2$
$-\mu_2^2\nu_2\nu_1 - \mu_4^2\nu_2\nu_1 + \mu_1\mu_4\nu_4\nu_3$	$-\mu_1^2\nu_1\nu_2 - \mu_4^2\nu_1\nu_2 + \mu_2\mu_4\nu_4\nu_5$
$+\mu_3\mu_2\nu_2\nu_4$	$-\mu_5\mu_1\nu_1\nu_4$
$+\mu_4^2\nu_1\nu_2 - \mu_1\mu_4\nu_4\nu_3 - \mu_2\mu_4\nu_4\nu_5$	$-\mu_3^2\nu_2\nu_1 - \mu_5^2\nu_2\nu_1 - \mu_3\nu_3\mu_5\nu_5$
$-\nu_3\nu_5^2\mu_2 - \nu_3\nu_1^2\mu_2 - \nu_2\nu_4\nu_5\mu_5$	$-\nu_5\nu_2^2\mu_1 - \nu_5\nu_3^2\mu_1 + \nu_1\nu_4\nu_3\mu_3$
$-\nu_5^3\mu_1 - \nu_5\nu_1^2\mu_1 - \nu_5\nu_4^2\mu_1$	$-\nu_3^3\mu_2 - \nu_3\nu_2^2\mu_2 - \nu_3\nu_4^2\mu_2$
$-\nu^2\nu_1\nu_2 + \nu_4^2\nu_1\nu_2$	

定理(75.35)

$A^4\big|_{44} =$

$+\mu^2(\mu_3^2+\mu_5^2) - \alpha + \mu_1^2\mu_2^2$	
$+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 - \mu_4\mu_5\mu_2\nu_2$	$+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 - \mu_4\mu_5\mu_2\nu_2$
$+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 + \mu_2\mu_3\mu_5\nu_5$	$+\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 + \mu_2\mu_3\mu_5\nu_5$
$+\mu_3^2\nu_1^2 + \mu_3^2\nu_2^2 + \mu_5^2\nu_1^2 + \mu_5^2\nu_2^2$	$+\mu_3^2\nu_1^2 + \mu_3^2\nu_2^2 + \mu_5^2\nu_1^2 + \mu_5^2\nu_2^2$
$-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 - \mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 + \mu_4\mu_5\nu_1\nu_3 + \mu_5\mu_1\nu_2\nu_4$	$-\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 - \mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 + \mu_4\mu_5\nu_1\nu_3 + \mu_5\mu_1\nu_2\nu_4$
$+\mu_3^2\nu_4^2 + \mu_3^2\nu_5^2 + \mu_5^2\nu_3^2 + \mu_5^2\nu_4^2$	$+\mu_1^2\nu_2^2 + \mu_4^2\nu_2^2 + \mu_2^2\nu_1^2 + \mu_4^2\nu_1^2$
$+\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1 + \nu_1\nu_3\nu_2\mu_2$	$+\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1 + \nu_1\nu_3\nu_2\mu_2$
$-\nu_2\nu_4\nu_3\mu_3 + \nu_1\nu_4\nu_5\mu_5$	$-\nu_2\nu_4\nu_3\mu_3 + \nu_1\nu_4\nu_5\mu_5$
$+\nu^2(\nu_1^2+\nu_2^2) - \beta + \nu_3^2\nu_5^2$	

定理(75.44)

 5次の反対称行列（続き）

$A^4|_{45} = A^4|_{54} =$

$-\mu^2\mu_1\mu_3 \quad + \quad \mu_2^2\mu_1\mu_3$	
$-\mu_5^3\nu_3 - \mu_5\mu_2^2\nu_3 - \mu_5\mu_3^2\nu_3$	$-\mu_4^3\nu_1 - \mu_4\mu_1^2\nu_1 - \mu_4\mu_2^2\nu_1$
$-\mu_4\mu_3^2\nu_1 - \mu_4\mu_5^2\nu_1 - \mu_1\mu_2\mu_5\nu_5$	$-\mu_5\mu_1^2\nu_3 - \mu_5\mu_4^2\nu_3 + \mu_2\mu_3\mu_4\nu_4$
$-\mu_1\mu_3\nu_2^2 - \mu_1\mu_3\nu_3^2 - \mu_5\mu_2\nu_2\nu_1$	$-\mu_3\mu_1\nu_1^2 - \mu_3\mu_1\nu_2^2 - \mu_4\mu_2\nu_2\nu_3$
$-\mu_2\mu_3\nu_3\nu_5$	$+\mu_2\mu_1\nu_1\nu_4$
$-\mu_1\mu_3\nu_4^2 - \mu_1\mu_3\nu_5^2 - \mu_4\nu_4\mu_5\nu_5$	$+\mu_1\mu_3\nu_2^2 + \mu_4\mu_2\nu_2\nu_3 + \mu_5\mu_2\nu_2\nu_1$
$-\nu_3\nu_1^2\mu_5 \quad + \quad \nu_1\nu_2\nu_5\mu_3$	$-\nu_1\nu_3^2\mu_4 \quad - \quad \nu_2\nu_3\nu_4\mu_1$
$-\nu_1^3\mu_4 - \nu_1\nu_2^2\mu_4 - \nu_1\nu_5^2\mu_4 + \nu_2\nu_3\nu_4\mu_1$	$-\nu_3^3\mu_5 - \nu_3\nu_2^2\mu_5 - \nu_3\nu_4^2\mu_5 - \nu_2\nu_5\nu_1\mu_3$
$-\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1$	

定理（75.45）

$A^4|_{55} =$

$+\mu^2(\mu_1^2+\mu_4^2) - \alpha + \mu_2^2\mu_3^2$	
$-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2 \quad + \quad \mu_5\mu_1\mu_3\nu_3$	$-\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2 \quad + \quad \mu_5\mu_1\mu_3\nu_3$
$+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 \quad - \quad \mu_1\mu_2\mu_4\nu_4$	$+\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 \quad - \quad \mu_1\mu_2\mu_4\nu_4$
$+\mu_1^2\nu_2^2 + \mu_1^2\nu_3^2 + \mu_4^2\nu_2^2 + \mu_4^2\nu_3^2$	$+\mu_1^2\nu_2^2 + \mu_1^2\nu_3^2 + \mu_4^2\nu_2^2 + \mu_4^2\nu_3^2$
$+\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4 + \mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 - \mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 + \mu_5\mu_4\nu_3\nu_1$	$+\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4 + \mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 - \mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 + \mu_5\mu_4\nu_3\nu_1$
$+\mu_1^2\nu_4^2 + \mu_1^2\nu_5^2 + \mu_4^2\nu_5^2 + \mu_4^2\nu_1^2$	$+\mu_3^2\nu_2^2 + \mu_5^2\nu_2^2 + \mu_2^2\nu_3^2 + \mu_5^2\nu_3^2$
$+\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2 \quad - \quad \nu_2\nu_4\nu_3\mu_3$	$+\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2 \quad - \quad \nu_2\nu_4\nu_3\mu_3$
$+\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1 \quad + \quad \nu_3\nu_5\nu_4\mu_4$	$+\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1 \quad + \quad \nu_3\nu_5\nu_4\mu_4$
$+\nu^2(\nu_2^2+\nu_3^2) - \beta + \nu_4^2\nu_1^2$	

定理（75.55）

定理(75)のA^4の各成分を整理しましょう。

$$
\begin{aligned}
A^4|_{11} = & +\mu^2(\mu_2^2+\mu_5^2) - \alpha + \mu_3^2\mu_4^2 \\
& -2\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 + 2\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 - 2\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2 + 2\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5 \\
& +\mu_2^2(\nu^2-\nu_2^2) + \mu_5^2(\nu^2-\nu_5^2) + (\mu^2-\mu_3^2)\nu_3^2 + (\mu^2-\mu_4^2)\nu_4^2 \\
& -2\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 + 2\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 + 2\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4 + 2\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1 \\
& +2\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 - 2\nu_2\nu_4\nu_3\mu_3 + 2\nu_4\nu_1\nu_5\mu_5 + 2\nu_3\nu_1\nu_2\mu_2 \\
& +\nu^2(\nu_3^2+\nu_4^2) - \beta + \nu_5^2\nu_2^2
\end{aligned}
$$

定理(76.11)

$$
\begin{aligned}
A^4|_{12} = A^4|_{21} = & -(\mu^2-\mu_4^2)\mu_3\mu_5 \\
& -\mu^2(\mu_1\nu_3+\mu_2\nu_5) - \mu_4\mu_5\mu_1\nu_1 + \mu_3\mu_4\mu_2\nu_2 \\
& -\mu_3\mu_5\nu^2 - \mu_1\mu_2\nu_2\nu_1 - \mu_4\mu_3\nu_3\nu_1 + \mu_4\mu_5\nu_5\nu_2 \\
& -(\nu^2-\nu_2^2)\nu_5\mu_2 - (\nu^2-\nu_1^2)\nu_3\mu_1 \\
& -\nu_5\nu_1\nu_2\nu_3
\end{aligned}
$$

定理(76.12)

$$
\begin{aligned}
A^4|_{13} = A^4|_{31} = & -\mu_1\mu_3\mu_4\mu_5 \\
& -(\mu^2-\mu_1^2)\mu_5\nu_1 - (\mu^2-\mu_3^2)\mu_4\nu_3 \\
& -\mu^2\nu_4\nu_5 - \mu_1\mu_5\nu_5\nu_2 + \mu_3\mu_4\nu_4\nu_2 - \mu_1\mu_3\nu_3\nu_1 \\
& -\nu^2(\nu_3\mu_4+\nu_1\mu_5) - \nu_2\nu_4\nu_1\mu_1 + \nu_2\nu_5\nu_3\mu_3 \\
& -(\nu^2-\nu_2^2)\nu_4\nu_5
\end{aligned}
$$

定理(76.13)

$$
\begin{aligned}
A^4|_{14} = A^4|_{41} = & +\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 \\
& +(\mu^2-\mu_1^2)\mu_2\nu_1 - (\mu^2-\mu_4^2)\mu_3\nu_4 \\
& +\mu^2\nu_2\nu_3 + \mu_1\mu_2\nu_2\nu_5 - \mu_4\mu_3\nu_3\nu_5 - \mu_1\mu_4\nu_4\nu_1 \\
& +\nu^2(\nu_1\mu_2-\nu_4\mu_3) + \nu_2\nu_5\nu_4\mu_4 + \nu_3\nu_5\nu_1\mu_1 \\
& +(\nu^2-\nu_5^2)\nu_2\nu_3
\end{aligned}
$$

定理(76.14)

【P280】5次の反対称行列（続き）

$$
\begin{aligned}
A^4\big|_{15} = A^4\big|_{51} = \; & -(\mu^2-\mu_3^2)\mu_2\mu_4 \\
& +\mu^2(\mu_5\nu_2+\mu_1\nu_4) - \mu_3\mu_4\mu_5\nu_5 - \mu_2\mu_3\mu_1\nu_1 \\
& -\mu_2\mu_4\nu^2 + \mu_5\mu_1\nu_1\nu_5 + \mu_3\mu_2\nu_2\nu_5 + \mu_3\mu_4\nu_4\nu_1 \\
& +(\nu^2-\nu_1^2)\nu_4\mu_1 + (\nu^2-\nu_5^2)\nu_2\mu_5 \\
& +\nu_4\nu_5\nu_1\nu_2
\end{aligned}
$$

定理（76.15）

$$
\begin{aligned}
A^4\big|_{22} = \; & +\mu^2(\mu_1^2+\mu_3^2) - \alpha + \mu_4^2\mu_5^2 \\
& +2\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5 - 2\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 + 2\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 + 2\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 \\
& +\mu_1^2(\nu^2-\nu_1^2) + \mu_3^2(\nu^2-\nu_3^2) + (\mu^2-\mu_4^2)\nu_4^2 + (\mu^2-\mu_5^2)\nu_5^2 \\
& -2\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 - 2\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 + 2\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4 + 2\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 \\
& +2\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 + 2\nu_1\nu_4\nu_5\mu_5 - 2\nu_4\nu_2\nu_3\mu_3 + 2\nu_5\nu_2\nu_1\mu_1 \\
& +\nu^2(\nu_4^2+\nu_5^2) - \beta + \nu_1^2\nu_3^2
\end{aligned}
$$

定理（76.22）

$$
\begin{aligned}
A^4\big|_{23} = A^4\big|_{32} = \; & +(\mu^2-\mu_5^2)\mu_1\mu_4 \\
& +\mu^2(\mu_3\nu_1-\mu_2\nu_4) - \mu_5\mu_1\mu_2\nu_2 + \mu_5\mu_4\mu_3\nu_3 \\
& +\mu_1\mu_4\nu^2 + \mu_5\mu_1\nu_1\nu_3 + \mu_2\mu_3\nu_3\nu_2 + \mu_5\mu_4\nu_4\nu_2 \\
& +(\nu^2-\nu_3^2)\nu_1\mu_3 - (\nu^2-\nu_2^2)\nu_4\mu_2 \\
& -\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4
\end{aligned}
$$

定理（76.23）

$$
\begin{aligned}
A^4\big|_{24} = A^4\big|_{42} = \; & +\mu_1\mu_2\mu_4\mu_5 \\
& -(\mu^2-\mu_2^2)\mu_1\nu_2 - (\mu^2-\mu_4^2)\mu_5\nu_4 \\
& -\mu^2\nu_5\nu_1 - \mu_4\mu_5\nu_5\nu_3 - \mu_2\mu_1\nu_1\nu_3 + \mu_2\mu_4\nu_4\nu_2 \\
& -\nu^2(\nu_2\mu_1+\nu_4\mu_5) - \nu_3\nu_5\nu_2\mu_2 - \nu_1\nu_3\nu_4\mu_4 \\
& -(\nu^2-\nu_3^2)\nu_5\nu_1
\end{aligned}
$$

定理（76.24）

【P281】3月3日(水)　5次の反対称行列(続き)

$$
\begin{aligned}
A^4|_{25} = A^4|_{52} = \;& + \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5 \\
& - (\mu^2 - \mu_2^2)\mu_3\nu_2 + (\mu^2 - \mu_5^2)\mu_4\nu_5 \\
& + \mu^2\nu_3\nu_4 - \mu_5\mu_2\nu_2\nu_5 - \mu_2\mu_3\nu_3\nu_1 + \mu_5\mu_4\nu_4\nu_1 \\
& + \nu^2(\nu_5\mu_4 - \nu_2\mu_3) + \nu_1\nu_4\nu_2\mu_2 + \nu_1\nu_3\nu_5\mu_5 \\
& + (\nu^2 - \nu_1^2)\nu_3\nu_4
\end{aligned}
$$

定理(76.25)

$$
\begin{aligned}
A^4|_{33} = \;& + \mu^2(\mu_2^2 + \mu_4^2) - \alpha + \mu_5^2\mu_1^2 \\
& + 2\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5 + 2\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 - 2\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 - 2\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2 \\
& + \mu_2^2(\nu^2 - \nu_2^2) + \mu_4^2(\nu^2 - \nu_4^2) + (\mu^2 - \mu_5^2)\nu_5^2 + (\mu^2 - \mu_1^2)\nu_1^2 \\
& + 2\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 - 2\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 - 2\mu_3\mu_4\nu_5\nu_2 + 2\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1 \\
& + 2\nu_1\nu_4\nu_5\mu_5 + 2\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1 + 2\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2 + 2\nu_5\nu_3\nu_4\mu_4 \\
& + \nu^2(\nu_5^2 + \nu_1^2) - \beta + \nu_2^2\nu_4^2
\end{aligned}
$$

定理(76.33)

$$
\begin{aligned}
A^4|_{34} = A^4|_{43} = \;& + (\mu^2 - \mu_1^2)\mu_2\mu_5 \\
& + \mu^2(\mu_3\nu_5 - \mu_4\nu_2) + \mu_1\mu_2\mu_3\nu_3 - \mu_5\mu_1\mu_4\nu_4 \\
& + \mu_5\mu_2\nu^2 + \mu_1\mu_2\nu_2\nu_4 + \mu_3\mu_4\nu_4\nu_3 + \mu_1\mu_5\nu_5\nu_3 \\
& - (\nu^2 - \nu_4^2)\nu_2\mu_4 + (\nu^2 - \nu_3^2)\nu_5\mu_3 \\
& - \nu_2\nu_3\nu_4\nu_5
\end{aligned}
$$

定理(76.34)

$$
\begin{aligned}
A^4|_{35} = A^4|_{53} = \;& - \mu_1\mu_2\mu_3\mu_5 \\
& - (\mu^2 - \mu_3^2)\mu_2\nu_3 - (\mu^2 - \mu_5^2)\mu_1\nu_5 \\
& - \mu^2\nu_1\nu_2 - \mu_5\mu_1\nu_1\nu_4 + \mu_3\mu_2\nu_2\nu_4 - \mu_5\mu_3\nu_3\nu_5 \\
& - \nu^2(\nu_3\mu_2 + \nu_5\mu_1) + \nu_1\nu_4\nu_3\mu_3 - \nu_2\nu_4\nu_5\mu_5 \\
& - (\nu^2 - \nu_4^2)\nu_1\nu_2
\end{aligned}
$$

定理(76.35)

【P282】５次の反対称行列（続き）

$$
\begin{aligned}
A^4|_{44} = {}& +\mu^2(\mu_3^2+\mu_5^2) - \alpha + \mu_1^2\mu_2^2 \\
& +2\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 - 2\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2 + 2\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 + 2\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5 \\
& +\mu_3^2(\nu^2-\nu_3^2) + \mu_5^2(\nu^2-\nu_5^2) + (\mu^2-\mu_1^2)\nu_1^2 + (\mu^2-\mu_2^2)\nu_2^2 \\
& -2\mu_3\mu_2\nu_1\nu_4 - 2\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 + 2\mu_4\mu_5\nu_1\nu_3 + 2\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4 \\
& +2\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1 + 2\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2 - 2\nu_2\nu_4\nu_3\mu_3 + 2\nu_1\nu_4\nu_5\mu_5 \\
& +\nu^2(\nu_1^2+\nu_2^2) - \beta + \nu_3^2\nu_5^2
\end{aligned}
$$

定理（76.44）

$$
\begin{aligned}
A^4|_{45} = A^4|_{54} = {}& -(\mu^2-\mu_2^2)\mu_1\mu_3 \\
& -\mu^2(\mu_4\nu_1+\mu_5\nu_3) + \mu_2\mu_3\mu_4\nu_4 - \mu_1\mu_2\mu_5\nu_5 \\
& -\mu_1\mu_3\nu^2 + \mu_2\mu_1\nu_1\nu_4 - \mu_2\mu_3\nu_3\nu_5 - \mu_4\mu_5\nu_5\nu_4 \\
& -(\nu^2-\nu_5^2)\nu_3\mu_5 - (\nu^2-\nu_4^2)\nu_1\mu_4 \\
& -\nu_3\nu_4\nu_5\nu_1
\end{aligned}
$$

定理（76.45）

$$
\begin{aligned}
A^4|_{55} = {}& +\mu^2(\mu_1^2+\mu_4^2) - \alpha + \mu_2^2\mu_3^2 \\
& -2\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2 + 2\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3 + 2\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1 - 2\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4 \\
& +\mu_1^2(\nu^2-\nu_1^2) + \mu_4^2(\nu^2-\nu_4^2) + (\mu^2-\mu_2^2)\nu_2^2 + (\mu^2-\mu_3^2)\nu_3^2 \\
& +2\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4 + 2\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5 - 2\mu_4\mu_3\nu_2\nu_5 + 2\mu_5\mu_4\nu_3\nu_1 \\
& +2\nu_1\nu_3\nu_2\mu_2 - 2\nu_2\nu_4\nu_3\mu_3 + 2\nu_2\nu_5\nu_1\mu_1 + 2\nu_3\nu_5\nu_4\mu_4 \\
& +\nu^2(\nu_2^2+\nu_3^2) - \beta + \nu_4^2\nu_1^2
\end{aligned}
$$

定理（76.55）

A^5を計算しましょう。当主題の冒頭（P197）で『Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理』で論じた一切を知らない振りをしましょうと述べましたが、これは、A^2, A^3, A^4の計算に関しての方針として述べたことです。A^5の計算のためには定理（42）を用いた方が特策です。そうでなければ、圧倒的な量の単純計算をこなさなければならないからです。
定理（42）を再記しましょう

【P283】3月6日(土) 5次の反対称行列(続き)

任意のn次正方行列Aに対して次式が成り立ちます。

$$\mathbb{O} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m d^{(m)}(A) A^{n-m} \qquad \text{定理(42)の再記}$$

Aは5次の反対称行列だから 奇数のmに対する$d^{(m)}(A)$は$\mathbb{O}$です。従って、

$$A^5 = -d^{(2)}(A) A^3 - d^{(4)}(A) A \qquad (W65)$$

ここで $d^{(2)}(A)$は、P193, P194で4次の反対称行列Aの$d^{(2)}(A)$を求めたのと同じ算法(Algorithm)により

$$d^{(2)}(A) = \mu^2 + \nu^2 \qquad (W66)$$

従って$d^{(4)}(A)$を求めればA^5が計算されたことになります。そのためにはA^5のかってな非対角成分を1つだけ計算すれば良い。$A^5|_{12}$を計算します。

$$\begin{aligned} A^5|_{12} &= -d^{(2)}(A) A^3|_{12} - d^{(4)}(A) A|_{12} \\ &= -(\mu^2+\nu^2) A^3|_{12} + \nu_4 d^{(4)}(A) \end{aligned} \qquad (W67)$$

一方

$$A^5 = AA^4 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\nu_4 & \mu_2 & \mu_5 & -\nu_3 \\ \nu_4 & \mathbb{O} & -\nu_5 & -\mu_3 & \mu_1 \\ -\mu_2 & \nu_5 & \mathbb{O} & -\nu_1 & \mu_4 \\ -\mu_5 & \mu_3 & \nu_1 & \mathbb{O} & -\nu_2 \\ \nu_3 & -\mu_1 & -\mu_4 & \nu_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix} A^4$$

$$A^5|_{12} = -\nu_4 A^4|_{22} + \mu_2 A^4|_{32} + \mu_5 A^4|_{42} - \nu_3 A^4|_{52} \qquad (W68)$$

【P284】3月7日(日) 5次の反対称行列(続き)

(W67), (W68) より.

$$\nu_4 d^{(4)}(A) = \mu_2 A^4\big|_{23} + \mu_5 A^4\big|_{24} - \nu_3 A^4\big|_{25} - \nu_4 A^4\big|_{22} + (\mu^2+\nu^2) A^3\big|_{12}$$

$$\begin{aligned}
= {} & + (\mu^2-\mu_5^2)\mu_1\mu_2\mu_4 \\
& + \mu^2(\mu_2\mu_3\nu_1 - \mu_2^2\nu_4) - \mu_1\mu_2^2\mu_5\nu_2 + \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\nu_3 \\
& + \mu_1\mu_2\mu_4\nu^2 + \mu_1\mu_2\mu_5\nu_1\nu_3 + \mu_2^2\mu_3\nu_2\nu_3 + \mu_2\mu_4\mu_5\nu_2\nu_4 \\
& + \mu_2\mu_3(\nu^2-\nu_3^2)\nu_1 - \mu_2^2(\nu^2-\nu_2^2)\nu_4 \\
& - \mu_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 + \mu_1\mu_2\mu_4\mu_5^2 \\
& - (\mu^2-\mu_2^2)\mu_1\mu_5\nu_2 - (\mu^2-\mu_4^2)\mu_5^2\nu_4 \\
& - \mu^2\mu_5\nu_1\nu_5 - \mu_4\mu_5^2\nu_3\nu_5 - \mu_1\mu_2\mu_5\nu_1\nu_3 + \mu_2\mu_4\mu_5\nu_2\nu_4 \\
& - (\mu_1\mu_5\nu_2 + \mu_5^2\nu_4)\nu^2 - \mu_2\mu_5\nu_2\nu_3\nu_5 - \mu_4\mu_5\nu_1\nu_3\nu_4 \\
& - \mu_5(\nu^2-\nu_3^2)\nu_1\nu_5 - \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\nu_3 \\
& + (\mu^2-\mu_2^2)\mu_3\nu_2\nu_3 - (\mu^2-\mu_5^2)\mu_4\nu_3\nu_5 \\
& - \mu^2\nu_3^2\nu_4 + \mu_2\mu_5\nu_2\nu_3\nu_5 + \mu_2\mu_3\nu_1\nu_3^2 - \mu_4\mu_5\nu_1\nu_3\nu_4 \\
& - (\mu_4\nu_3\nu_5 - \mu_3\nu_2\nu_3)\nu^2 - \mu_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 - \mu_5\nu_1\nu_3^2\nu_5 \\
& - (\nu^2-\nu_1^2)\nu_3^2\nu_4 - \mu^2(\mu_1^2+\mu_3^2)\nu_4 + \alpha\nu_4 - \mu_4^2\mu_5^2\nu_4 \\
& - 2\mu_2\mu_3\mu_5\nu_4\nu_5 + 2\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4^2 - 2\mu_1\mu_3\mu_5\nu_3\nu_4 - 2\mu_1\mu_3\mu_4\nu_1\nu_4 \\
& - \mu_1^2(\nu^2-\nu_1^2)\nu_4 - \mu_3^2(\nu^2-\nu_3^2)\nu_4 - (\mu^2-\mu_4^2)\nu_4^3 - (\mu^2-\mu_5^2)\nu_4\nu_5^2 \\
& + 2\mu_2\mu_3\nu_1\nu_4^2 + 2\mu_3\mu_4\nu_2\nu_4\nu_5 - 2\mu_1\mu_5\nu_2\nu_4^2 - 2\mu_1\mu_2\nu_3\nu_4\nu_5 \\
& - 2\mu_4\nu_3\nu_4^2\nu_5 - 2\mu_5\nu_1\nu_4^2\nu_5 + 2\mu_3\nu_2\nu_3\nu_4^2 - 2\mu_1\nu_1\nu_2\nu_4\nu_5 \\
& - \nu^2\nu_4(\nu_4^2+\nu_5^2) + \beta\nu_4 - \nu_1^2\nu_3^2\nu_4 - \mu^2\mu_1\mu_2\mu_4 \\
& + \mu^2(\mu^2-\mu_4^2)\nu_4 - \mu^2(\mu_2\mu_3\nu_1 - \mu_1\mu_5\nu_2) \\
& + \mu^2(\mu_4\nu_3\nu_5 - \mu_3\nu_2\nu_3 + \mu_5\nu_1\nu_5) - \mu_1\mu_2\mu_4\nu^2 \\
& + \mu^2(\nu^2-\nu_1^2-\nu_2^2)\nu_4 + (\mu^2-\mu_4^2)\nu^2\nu_4 - (\mu_2\mu_3\nu_1 - \mu_1\mu_5\nu_2)\nu^2 \\
& + (\mu_4\nu_3\nu_5 - \mu_3\nu_2\nu_3)\nu^2 + \mu_5\nu_1\nu_5\nu^2 \\
& + (\nu^2-\nu_1^2-\nu_2^2)\nu^2\nu_4
\end{aligned} \tag{W69}$$

(W69)を整理しよう。

A^3, A^4 に計算ミスが無ければ、右辺の ν_4 を含まない項は全て打ち消し合うはずです。従って ν_4 を含む項のみを取り出せば良いのですが、検算のためにも、全ての項を対象にして整理することにしましょう。

【P285】3月9日（火）5次の反対称行列（続き）

$$
\begin{aligned}
d^{(4)}(A)\nu_4 = \;& +(\mu^2-\mu_5^2)\mu_1\mu_2\mu_4 \\
& +\mu_1\mu_2\mu_4\mu_5^2 \\
& -\mu^2\mu_1\mu_2\mu_4 \\
& +\mu^2(\mu_2\mu_3\nu_1-\mu_2^2\nu_4) - \mu_1\mu_2^2\mu_5\nu_2 + \mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\nu_3 \\
& -(\mu^2-\mu_2^2)\mu_1\mu_5\nu_2 - (\mu^2-\mu_4^2)\mu_5^2\nu_4 \\
& -\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5\nu_3 \\
& -\mu^2(\mu_1^2+\mu_3^2)\nu_4 + \alpha\nu_4 - \mu_4^2\mu_5^2\nu_4 \\
& +\mu^2(\mu^2-\mu_4^2)\nu_4 - \mu^2(\mu_2\mu_3\nu_1 - \mu_1\mu_5\nu_2) \\
& +\mu_1\mu_2\mu_4\nu^2 + \mu_1\mu_2\mu_5\nu_1\nu_3 + \mu_2^2\mu_3\nu_2\nu_3 + \mu_2\mu_4\mu_5\nu_2\nu_4 \\
& -\mu^2\mu_5\nu_1\nu_5 - \mu_4\mu_5^2\nu_3\nu_5 - \mu_1\mu_2\mu_5\nu_1\nu_3 + \mu_2\mu_4\mu_5\nu_2\nu_4 \\
& +(\mu^2-\mu_2^2)\mu_3\nu_2\nu_3 - (\mu^2-\mu_5^2)\mu_4\nu_3\nu_5 \\
& -2\mu_2\mu_3\mu_5\nu_4\nu_5 + 2\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4^2 - 2\mu_1\mu_3\mu_5\nu_3\nu_4 - 2\mu_1\mu_3\mu_4\nu_1\nu_4 \\
& +\mu^2(\mu_4\nu_3\nu_5 - \mu_3\nu_2\nu_3 + \mu_5\nu_1\nu_5) - \mu_1\mu_2\mu_4\nu^2 \\
& +\mu_2\mu_3(\nu^2-\nu_3^2)\nu_1 - \mu_2^2(\nu^2-\nu_2^2)\nu_4 \\
& -(\mu_1\mu_5\nu_2+\mu_5^2\nu_4)\nu^2 - \mu_2\mu_5\nu_2\nu_3\nu_5 - \mu_4\mu_5\nu_1\nu_3\nu_4 \\
& -\mu^2\nu_3^2\nu_4 + \mu_2\mu_5\nu_2\nu_3\nu_5 + \mu_2\mu_3\nu_1\nu_3^2 - \mu_4\mu_5\nu_1\nu_3\nu_4 \\
& -\mu_1^2(\nu^2-\nu_1^2)\nu_4 - \mu_3^2(\nu^2-\nu_3^2)\nu_4 - (\mu^2-\mu_4^2)\nu_4^3 - (\mu^2-\mu_5^2)\nu_4\nu_5^2 \\
& +2\mu_2\mu_3\nu_1\nu_4^2 + 2\mu_3\mu_4\nu_2\nu_4\nu_5 - 2\mu_1\mu_5\nu_2\nu_4^2 - 2\mu_1\mu_2\nu_3\nu_4\nu_5 \\
& +\mu^2(\nu^2-\nu_1^2-\nu_2^2)\nu_4 + (\mu^2-\mu_4^2)\nu^2\nu_4 - (\mu_2\mu_3\nu_1 - \mu_1\mu_5\nu_2)\nu^2 \\
& -\mu_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 \\
& -\mu_5(\nu^2-\nu_3^2)\nu_1\nu_5 \\
& -(\mu_4\nu_3\nu_5 - \mu_3\nu_2\nu_3)\nu^2 - \mu_2\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4 - \mu_5\nu_1\nu_3^2\nu_5 \\
& -2\mu_4\nu_3\nu_4^2\nu_5 - 2\mu_5\nu_1\nu_4^2\nu_5 + 2\mu_3\nu_2\nu_3\nu_4^2 - 2\mu_1\nu_1\nu_2\nu_4\nu_5 \\
& +(\mu_4\nu_3\nu_5 - \mu_3\nu_2\nu_3)\nu^2 + \mu_5\nu_1\nu_5\nu^2 \\
& -(\nu^2-\nu_1^2)\nu_3^2\nu_4 \\
& -\nu^2\nu_4(\nu_4^2+\nu_5^2) + \beta\nu_4 - \nu_1^2\nu_3^2\nu_4 \\
& +(\nu^2-\nu_1^2-\nu_2^2)\nu^2\nu_4
\end{aligned}
\qquad (\mathrm{W70})
$$

ここで、α, β は、

$$\alpha = \mu_1^2\mu_2^2 + \mu_2^2\mu_3^2 + \mu_3^2\mu_4^2 + \mu_4^2\mu_5^2 + \mu_5^2\mu_1^2$$

$$\beta = \nu_1^2\nu_3^2 + \nu_3^2\nu_5^2 + \nu_5^2\nu_2^2 + \nu_2^2\nu_4^2 + \nu_4^2\nu_1^2$$

【P286】 3月12日（金） 5次の反対称行列（続き）

$d^{(4)}(A) =$

				$+\ \alpha$
$-2\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1$	$+2\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2$	$-2\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3$	$+2\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4$	$-2\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5$
$+2\mu_3\mu_4\nu_5\nu_2$	$-2\mu_4\mu_5\nu_1\nu_3$	$-2\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4$	$-2\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5$	$+2\mu_2\mu_3\nu_4\nu_1$
$+\ \mu_1^2\nu_1^2$	$+\ \mu_2^2\nu_2^2$	$+\ \mu_3^2\nu_3^2$	$+\ \mu_4^2\nu_4^2$	$+\ \mu_5^2\nu_5^2$
$-2\mu_1\nu_1\nu_5\nu_2$	$-2\mu_2\nu_2\nu_1\nu_3$	$+2\mu_3\nu_3\nu_2\nu_4$	$-2\mu_4\nu_4\nu_3\nu_5$	$-2\mu_5\nu_5\nu_4\nu_1$
$+\ \beta$				

（W71）

かなり整理されましたね。約4分の1に縮約されました。でもまだ十分とは云えませんね。美しくありませんし、構造も見えてきません。思考錯誤の結果、さらに整理することが出来ることに気付きました。そのために用いる算法は主に下記の変形です。

$$0 \Rightarrow x - x,\quad x^2+2xy+y^2 \Rightarrow (x+y)^2,\quad x^2-y^2 \Rightarrow (x+y)(x-y)$$

$d^{(4)}(A) =$

$+\ \mu_3^2\mu_4^2$	$+\ \mu_4^2\mu_5^2$	$+\ \mu_5^2\mu_1^2$	$+\ \mu_1^2\mu_2^2$	$+\ \mu_2^2\mu_3^2$
$-2\mu_3\mu_4\mu_1\nu_1$	$+2\mu_4\mu_5\mu_2\nu_2$	$-2\mu_5\mu_1\mu_3\nu_3$	$+2\mu_1\mu_2\mu_4\nu_4$	$-2\mu_2\mu_3\mu_5\nu_5$
$+\ \mu_1^2\nu_1^2$	$+\ \mu_2^2\nu_2^2$	$+\ \mu_3^2\nu_3^2$	$+\ \mu_4^2\nu_4^2$	$+\ \mu_5^2\nu_5^2$
$-\ \mu_3^2\mu_4^2$	$-\ \mu_4^2\mu_5^2$	$-\ \mu_5^2\mu_1^2$	$-\ \mu_1^2\mu_2^2$	$-\ \mu_2^2\mu_3^2$
$+\ \mu_3^2\mu_4^2$	$+\ \mu_4^2\mu_5^2$	$+\ \mu_5^2\mu_1^2$	$+\ \mu_1^2\mu_2^2$	$+\ \mu_2^2\mu_3^2$
$+2\mu_3\mu_4\nu_5\nu_2$	$-2\mu_4\mu_5\nu_1\nu_3$	$-2\mu_5\mu_1\nu_2\nu_4$	$-2\mu_1\mu_2\nu_3\nu_5$	$+2\mu_2\mu_3\nu_4\nu_1$
$+\ \nu_5^2\nu_2^2$	$+\ \nu_1^2\nu_3^2$	$+\ \nu_2^2\nu_4^2$	$+\ \nu_3^2\nu_5^2$	$+\ \nu_4^2\nu_1^2$
$-\ \nu_5^2\nu_2^2$	$-\ \nu_1^2\nu_3^2$	$-\ \nu_2^2\nu_4^2$	$-\ \nu_3^2\nu_5^2$	$-\ \nu_4^2\nu_1^2$
$-\ \mu_1^2\nu_1^2$	$-\ \mu_2^2\nu_2^2$	$-\ \mu_3^2\nu_3^2$	$-\ \mu_4^2\nu_4^2$	$-\ \mu_5^2\nu_5^2$
$+\ \mu_1^2\nu_1^2$	$+\ \mu_2^2\nu_2^2$	$+\ \mu_3^2\nu_3^2$	$+\ \mu_4^2\nu_4^2$	$+\ \mu_5^2\nu_5^2$
$-2\mu_1\nu_1\nu_5\nu_2$	$-2\mu_2\nu_2\nu_1\nu_3$	$+2\mu_3\nu_3\nu_2\nu_4$	$-2\mu_4\nu_4\nu_3\nu_5$	$-2\mu_5\nu_5\nu_4\nu_1$
$+\ \nu_5^2\nu_2^2$	$+\ \nu_1^2\nu_3^2$	$+\ \nu_2^2\nu_4^2$	$+\ \nu_3^2\nu_5^2$	$+\ \nu_4^2\nu_1^2$

（W72）

【P287】5次の反対称行列（続き）

$d^{(4)}(A) =$

$+(\mu_3\mu_4-\mu_1\nu_1)^2$	$+(\mu_4\mu_5+\mu_2\nu_2)^2$	$+(\mu_5\mu_1-\mu_3\nu_3)^2$	$+(\mu_1\mu_2+\mu_4\nu_4)^2$	$+(\mu_2\mu_3-\mu_5\nu_5)^2$
$-\ \nu_5^2\nu_2^2$	$-\ \nu_1^2\nu_3^2$	$-\ \nu_2^2\nu_4^2$	$-\ \nu_3^2\nu_5^2$	$-\ \nu_4^2\nu_1^2$
$+(\mu_3\mu_4+\nu_5\nu_2)^2$	$+(\mu_4\mu_5-\nu_1\nu_3)^2$	$+(\mu_5\mu_1-\nu_2\nu_4)^2$	$+(\mu_1\mu_2-\nu_3\nu_5)^2$	$+(\mu_2\mu_3+\nu_4\nu_1)^2$
$-\ \mu_1^2\nu_1^2$	$-\ \mu_2^2\nu_2^2$	$-\ \mu_3^2\nu_3^2$	$-\ \mu_4^2\nu_4^2$	$-\ \mu_5^2\nu_5^2$
$+(\mu_1\nu_1-\nu_5\nu_2)^2$	$+(\mu_2\nu_2-\nu_1\nu_3)^2$	$+(\mu_3\nu_3+\nu_2\nu_4)^2$	$+(\mu_4\nu_4-\nu_3\nu_5)^2$	$+(\mu_5\nu_5-\nu_4\nu_1)^2$
$-\ \mu_3^2\mu_4^2$	$-\ \mu_4^2\mu_5^2$	$-\ \mu_5^2\mu_1^2$	$-\ \mu_1^2\mu_2^2$	$-\ \mu_2^2\mu_3^2$

（W73）

$d^{(4)}(A) =$

$+(\mu_3\mu_4-\mu_1\nu_1+\nu_5\nu_2)$	$(\mu_3\mu_4-\mu_1\nu_1-\nu_5\nu_2)$	$+(\mu_4\mu_5+\mu_2\nu_2+\nu_1\nu_3)$	$(\mu_4\mu_5+\mu_2\nu_2-\nu_1\nu_3)$
$+(\mu_3\mu_4+\mu_1\nu_1+\nu_5\nu_2)$	$(\mu_3\mu_4-\mu_1\nu_1+\nu_5\nu_2)$	$+(\mu_4\mu_5+\mu_2\nu_2-\nu_1\nu_3)$	$(\mu_4\mu_5-\mu_2\nu_2-\nu_1\nu_3)$
$+(\mu_3\mu_4+\mu_1\nu_1-\nu_5\nu_2)$	$(-\mu_3\mu_4+\mu_1\nu_1-\nu_5\nu_2)$	$+(\mu_4\mu_5+\mu_2\nu_2-\nu_1\nu_3)$	$(-\mu_4\mu_5+\mu_2\nu_2-\nu_1\nu_3)$
$+(\mu_5\mu_1-\mu_3\nu_3+\nu_2\nu_4)$	$(\mu_5\mu_1-\mu_3\nu_3-\nu_2\nu_4)$	$+(\mu_1\mu_2+\mu_4\nu_4+\nu_3\nu_5)$	$(\mu_1\mu_2+\mu_4\nu_4-\nu_3\nu_5)$
$+(\mu_5\mu_1+\mu_3\nu_3-\nu_2\nu_4)$	$(\mu_5\mu_1-\mu_3\nu_3-\nu_2\nu_4)$	$+(\mu_1\mu_2+\mu_4\nu_4-\nu_3\nu_5)$	$(\mu_1\mu_2-\mu_4\nu_4-\nu_3\nu_5)$
$+(\mu_5\mu_1+\mu_3\nu_3+\nu_2\nu_4)$	$(-\mu_5\mu_1+\mu_3\nu_3+\nu_2\nu_4)$	$+(\mu_1\mu_2+\mu_4\nu_4-\nu_3\nu_5)$	$(-\mu_1\mu_2+\mu_4\nu_4-\nu_3\nu_5)$
$+(\mu_2\mu_3-\mu_5\nu_5+\nu_4\nu_1)$	$(\mu_2\mu_3-\mu_5\nu_5-\nu_4\nu_1)$		
$+(\mu_2\mu_3+\mu_5\nu_5+\nu_4\nu_1)$	$(\mu_2\mu_3-\mu_5\nu_5+\nu_4\nu_1)$		
$+(\mu_2\mu_3+\mu_5\nu_5-\nu_4\nu_1)$	$(-\mu_2\mu_3+\mu_5\nu_5-\nu_4\nu_1)$		

（W74）

$d^{(4)}(A) =$

$+(\mu_3\mu_4 - \mu_1\nu_1 + \nu_5\nu_2)$	$(+\mu_3\mu_4 - \mu_1\nu_1 - \nu_5\nu_2$ $+\mu_3\mu_4 + \mu_1\nu_1 + \nu_5\nu_2$ $-\mu_3\mu_4 - \mu_1\nu_1 + \nu_5\nu_2)$	$+(-\mu_4\mu_5 - \mu_2\nu_2 + \nu_1\nu_3)$	$(-\mu_4\mu_5 - \mu_2\nu_2 - \nu_1\nu_3$ $-\mu_4\mu_5 + \mu_2\nu_2 + \nu_1\nu_3$ $+\mu_4\mu_5 - \mu_2\nu_2 + \nu_1\nu_3)$
$+(\mu_5\mu_1 - \mu_3\nu_3 - \nu_2\nu_4)$	$(+\mu_5\mu_1 - \mu_3\nu_3 + \nu_2\nu_4$ $+\mu_5\mu_1 + \mu_3\nu_3 - \nu_2\nu_4$ $-\mu_5\mu_1 - \mu_3\nu_3 - \nu_2\nu_4)$	$+(-\mu_1\mu_2 - \mu_4\nu_4 + \nu_3\nu_5)$	$(-\mu_1\mu_2 - \mu_4\nu_4 - \nu_3\nu_5$ $-\mu_1\mu_2 + \mu_4\nu_4 + \nu_3\nu_5$ $+\mu_1\mu_2 - \mu_4\nu_4 + \nu_3\nu_5)$
$+(\mu_2\mu_3 - \mu_5\nu_5 + \nu_4\nu_1)$	$(+\mu_2\mu_3 - \mu_5\nu_5 - \nu_4\nu_1$ $+\mu_2\mu_3 + \mu_5\nu_5 - \nu_4\nu_1$ $-\mu_2\mu_3 - \mu_5\nu_5 + \nu_4\nu_1)$		

$=$

$+\ (+\mu_3\mu_4 - \mu_1\nu_1 + \nu_5\nu_2)^2$	$+\ (-\mu_4\mu_5 - \mu_2\nu_2 + \nu_1\nu_3)^2$
$+\ (+\mu_5\mu_1 - \mu_3\nu_3 - \nu_2\nu_4)^2$	$+\ (-\mu_1\mu_2 - \mu_4\nu_4 + \nu_3\nu_5)^2$
$+\ (+\mu_2\mu_3 - \mu_5\nu_5 + \nu_4\nu_1)^2$	

（W75）

望外の結果です!! 反対称行列の $d^{(2m)}(A)$ を、Shyuko記号を用いて、一般的に考察する価値が有りそうですね。 （W65），（W66），（W75）を再記します。

$$A^5 = -d^{(2)}(A)A^3 - d^{(4)}(A)A \qquad .1)$$

$$d^{(2)}(A) = \mu^2 + \nu^2 \qquad .2)$$

$$\begin{aligned} d^{(4)}(A) = &+(+\mu_3\mu_4 - \mu_1\nu_1 + \nu_5\nu_2)^2 \\ &+(-\mu_4\mu_5 - \mu_2\nu_2 + \nu_1\nu_3)^2 \\ &+(+\mu_5\mu_1 - \mu_3\nu_3 - \nu_2\nu_4)^2 \\ &+(-\mu_1\mu_2 - \mu_4\nu_4 + \nu_3\nu_5)^2 \\ &+(+\mu_2\mu_3 - \mu_5\nu_5 + \nu_4\nu_1)^2 \end{aligned} \qquad .3)$$

定理（77）

● 小休止：Penrose Tile（その2）

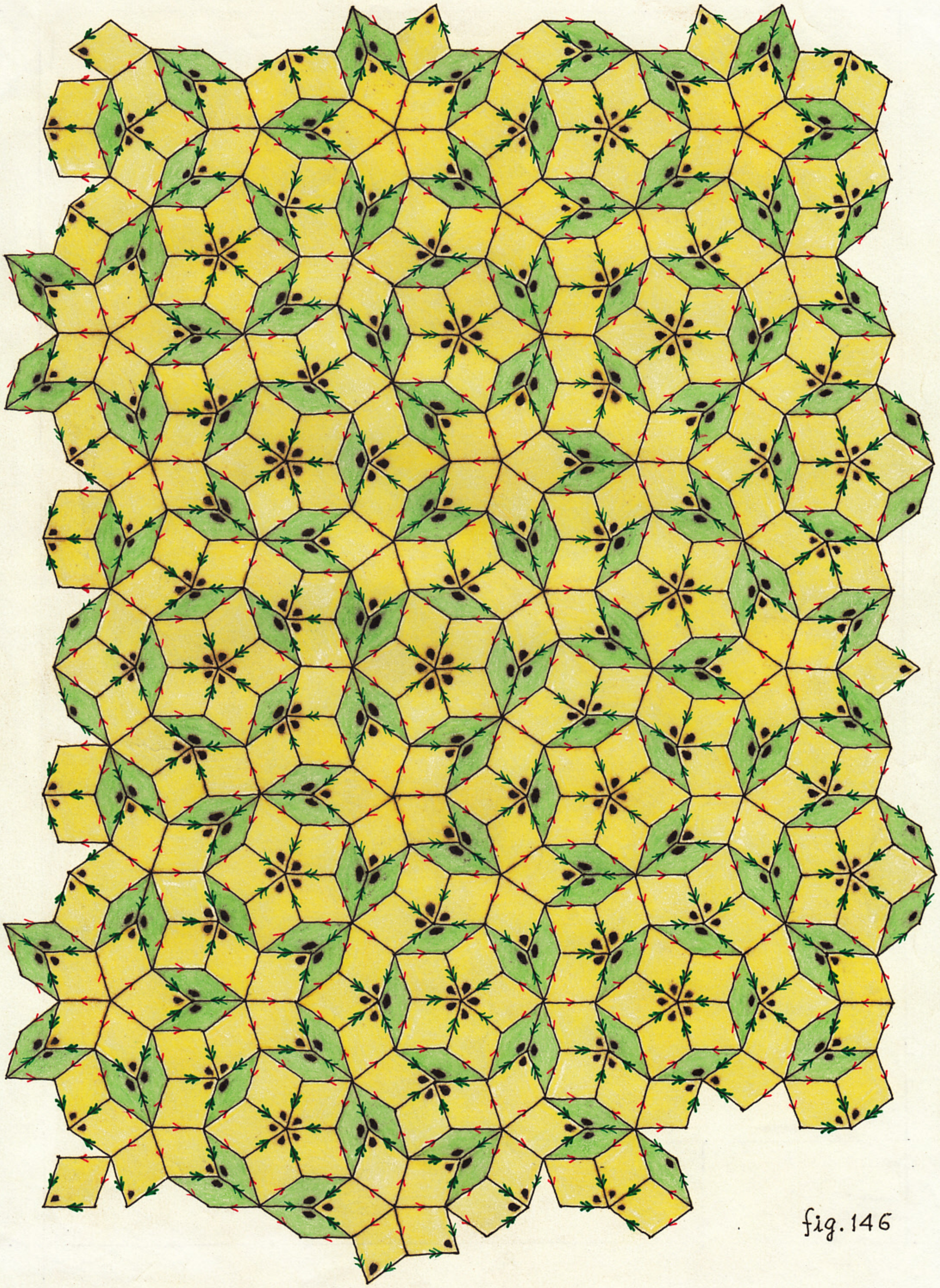

fig.146