

● 4次の反対称行列

4次の反対称行列に関連する諸恒等式を導出しましょう。この際、『Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理』で論じた一切を知らない振りをして、力尽で単々と計算を実行しましょう。その訳と目的は幾つか有ります。計算過程で現われるであろう諸恒等式を得ることもその一つです。また、Shyuko記号や、Shyuko記号で定義された拡張行列式とも呼ぶべきスカラー- $d^{(m)}$ の応用対象を見い出すことも目的の一つです。記号の導入は最小限に止めることに勤める方針です。出現する表式の意味が一見して分かるようにしたいからです。その代価として紙面の浪費が生じますが、止むを得ません。目視で検算できる利点も有ります。

4次の反対称行列の自由度、つまり一意に特定するための変数の個数は、 $1+2+3=6=2\cdot 3$ です。4次の反対称行列を2つの3次元ベクトルを用いて表現することになります。4次の反対称行列の構造には、2次、3次の反対称行列の構造も含まれていることに留意しよう。次のように定義します。

4次の反対称行列A等の定義

$$\mu = {}^t(\mu_1 \mu_2 \mu_3), \quad \mu = \sqrt{\mu \cdot \mu} \quad .1)$$

$$\nu = {}^t(\nu_1 \nu_2 \nu_3), \quad \nu = \sqrt{\nu \cdot \nu} \quad .2)$$

$$\lambda = {}^t(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = \mu \times \nu \quad .3)$$

$$\omega = \mu \cdot \nu \quad .4)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad .5)$$

$$A = M + N = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & \nu_1 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & \nu_2 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad .6)$$

定義(55)

【P177】 4次の反対称行列 (続き)

A^2, A^3, A^4 の表現、つまり μ, ν を用いた具体的な表式を求めることが主たる目標です。 M, N も4次の反対称行列であることに注意しよう。

また M は3次の反対称行列が満たす恒等式と同じ恒等式を満たす。

まず M だけの恒等式を求めよう。 M^2, M^3, M^4 を計算しよう。

$$\begin{aligned}
 M^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\mu_3^2 - \mu_2^2 & \mu_2\mu_1 & \mu_3\mu_1 & 0 \\ \mu_1\mu_2 & -\mu_3^2 - \mu_1^2 & \mu_3\mu_1 & 0 \\ \mu_1\mu_3 & \mu_2\mu_3 & -\mu_2^2 - \mu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1^2 - \mu^2 & \mu_1\mu_2 & \mu_1\mu_3 & 0 \\ \mu_2\mu_1 & \mu_2^2 - \mu^2 & \mu_2\mu_3 & 0 \\ \mu_3\mu_1 & \mu_3\mu_2 & \mu_3^2 - \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{pmatrix} - \mu^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (W1)
 \end{aligned}$$

$$M \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_3\mu_2 - \mu_2\mu_3 \\ -\mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_3 \\ \mu_2\mu_1 - \mu_1\mu_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (W2)$$

(W2)より

$$M \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (W3)$$

$$\begin{aligned}
 M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M \quad (W4)
 \end{aligned}$$

(W1), (W3), (W4)より

$$\begin{aligned}
 M^3 &= MM^2 = M \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} [\mu_1 \mu_2 \mu_3 0] - \mu^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= M \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} [\mu_1 \mu_2 \mu_3 0] - \mu^2 M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu^2 M = -\mu^2 M \quad (W5)
 \end{aligned}$$

(W5)より

$$\begin{aligned}
 M^4 &= MM^3 = M(-\mu^2 M) \\
 0 &= \mu^2 M^2 + M^4 \quad (W6)
 \end{aligned}$$

ここで左辺の0はすべての成分が0の4次の行列を意味します。

(W1), (W2), ..., (W6)をまとめて再記しておきましょう。

【P179】 4 次の反対称行列 (続き)

$$M^2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} (\mu_1 \mu_2 \mu_3 0) - \mu^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .1)$$

$$M \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .2)$$

$$M \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} (\mu_1 \mu_2 \mu_3 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .3)$$

$$M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M \quad .4)$$

$$\mu^2 M + M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .5)$$

$$\mu^2 M^2 + M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .6)$$

定理 (56)

M の 4 行目, 4 列目に関する成分はすべて 0 であることに注意しよう。また、 $1+2=3$ にも注意しよう。M を 3×3 の反対称行列と同一視することになれば、上記の 6 式に対応する式は、任意の 3 次の反対称行列 M に関する恒等式として成り立つこととなります。

【P180】12月7日(月) 4次の反対称行列(続き)

次に、 N だけの恒等式を求めよう。 N^2, N^3, N^4 を計算しよう。

$$\begin{aligned}
 N^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nu_1^2 & -\nu_1\nu_2 & -\nu_1\nu_3 & 0 \\ -\nu_2\nu_1 & -\nu_2^2 & -\nu_2\nu_3 & 0 \\ -\nu_3\nu_1 & -\nu_3\nu_2 & -\nu_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu^2 \end{pmatrix} \\
 &= - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} - \nu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (W7)
 \end{aligned}$$

$$N \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} = -\nu^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (W8)$$

(W8)より

$$\begin{aligned}
 N \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} &= -\nu^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= -\nu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (W9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (W10)
 \end{aligned}$$

【P181】 4次の反対称行列 (続き)

(W7), (W9), (W10) より

$$\begin{aligned}
 N^3 &= NN^2 = N \left(- \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{bmatrix} [\nu_1 \ \nu_2 \ \nu_3 \ 0] - \nu^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
 &= -N \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{bmatrix} [\nu_1 \ \nu_2 \ \nu_3 \ 0] - \nu^2 N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \nu^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 \ \nu_2 \ \nu_3 \ 0 \end{bmatrix} - \nu^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\nu^2 N \quad (W11)
 \end{aligned}$$

(W11) より

$$N^4 = NN^3 = -\nu^2 N^2 \quad (W12)$$

(W7), (W8), ..., (W12) をまとめて再記しておきましょう。

$$N^2 = - \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{bmatrix} [\nu_1 \ \nu_2 \ \nu_3 \ 0] - \nu^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .1)$$

$$N \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\nu^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .2)$$

$$N \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{bmatrix} [\nu_1 \ \nu_2 \ \nu_3 \ 0] = -\nu^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_1 \ \nu_2 \ \nu_3 \ 0 \end{bmatrix} \quad .3)$$

【P182】 4次の反対称行列 (続き)

$$N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .4)$$

$$\nu^2 N + N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .5)$$

$$\nu^2 N^2 + N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .6)$$

定理(57)

(56)と(57)を見比べて下さい。よく似てますね。 .5), .6)は同じと云えます。それに対して .1), ..., .4)は微妙に異なります。面白いですね。

A^2, A^3, A^4 を求めるための計算を続けます。 $MN, NM, \dots$ の計算です。

$$\begin{aligned} MN &= \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_3\nu_2 - \mu_2\nu_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3\nu_1 + \mu_1\nu_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (W13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NM &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_2\mu_3 - \nu_3\mu_2 & -\nu_1\mu_3 + \nu_3\mu_1 & \nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (W14) \end{aligned}$$

(W13), (W14) より

$$MN + NM = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (W15)$$

これで A^2 を計算するための諸項の準備できました。 A^2 の計算は後回しにして、
 A^3 に現われるはずの諸項の計算を行いましょう。

$$M \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_3 \nu_2 - \mu_2 \nu_3 \\ -\mu_3 \nu_1 + \mu_1 \nu_3 \\ \mu_2 \nu_1 - \mu_1 \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (W16)$$

(W16) より

$$M \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (W17)$$

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (W18) \end{aligned}$$

(57.1), (W17), (W18) より

$$MN^2 = M \left(- \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} - \nu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

【P184】 4次の反対称行列 (続き)

$$\begin{aligned}
 MN^2 &= -M \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{bmatrix} - \nu^2 M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (W19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\nu_1 \mu_1 - \nu_2 \mu_2 - \nu_3 \mu_3 \end{bmatrix} \\
 &= -\omega \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (W20)
 \end{aligned}$$

(W20)より

$$\begin{aligned}
 N \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{bmatrix} &= -\omega \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{bmatrix} \\
 &= -\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (W21)
 \end{aligned}$$

$$N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

【P185】 4次の反対称行列 (続き)

$$N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (W22)$$

(56.1), (W21), (W22)より

$$\begin{aligned} NM^2 &= N \left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} (\mu_1 \mu_2 \mu_3 0) - \mu^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= N \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} (\mu_1 \mu_2 \mu_3 0) - \mu^2 N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{pmatrix} - \mu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (W23) \end{aligned}$$

(W15)より

$$\begin{aligned} M(MN + NM) &= - \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_3 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_3 \lambda_1 + \mu_1 \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \lambda_1 - \mu_1 \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(次ページへ続く)

【P186】 4 次の反対称行列 (続き)

$$M(MN+NM) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu \times \lambda|_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \times \lambda|_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \times \lambda|_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(52.11) より

$$\begin{aligned} \mu \times \lambda &= \mu \times (\mu \times \nu) = (\mu \cdot \nu) \mu - (\mu \cdot \mu) \nu \\ &= \omega \mu - \mu^2 \nu \end{aligned}$$

従って

$$M(MN+NM) = \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (W24)$$

$$\begin{aligned} N(MN+NM) &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} \nu_1 \lambda_1 & \nu_1 \lambda_2 & \nu_1 \lambda_3 & 0 \\ \nu_2 \lambda_1 & \nu_2 \lambda_2 & \nu_2 \lambda_3 & 0 \\ \nu_3 \lambda_1 & \nu_3 \lambda_2 & \nu_3 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nu_1 \lambda_1 - \nu_2 \lambda_2 - \nu_3 \lambda_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(52.5), (52.10) より

$$-\nu \cdot \lambda = -\nu \cdot (\mu \times \nu) = \nu \cdot (\nu \times \mu) = 0$$

従って、

$$N(MN+NM) = - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (W25)$$

【P187】12月9(水) 4次の反対称行列 (続き)

この辺で、 $W(13), \dots, W(25)$ をまとめて再記しておきましょう。 A^3, A^4 の計算に必要なさらなる項を探るためでもあります。

$$MN = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad NM = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \quad .1)$$

$$MN + NM = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \quad .2)$$

$$M \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} (\nu_1 \nu_2 \nu_3 0) = - \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} (\nu_1 \nu_2 \nu_3 0) \quad .3)$$

$$M \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .4)$$

$$MN^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} (\nu_1 \nu_2 \nu_3 0) \quad .5)$$

$$N \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} = -\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad N \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} (\mu_1 \mu_2 \mu_3 0) = -\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad .6)$$

【P188】 4次の反対称行列 (続き)

$$N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad .7)$$

$$NM^2 = -\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{pmatrix} - \mu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad .8)$$

$$M(MN + NM) = \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .9)$$

$$N(MN + NM) = - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \quad .10)$$

定理(58)

.8)の右辺才1項と.9)の右辺才1項の和に注目しよう。Nにおいて ω を μ に入れ換えた行列が出現します。ならば、Mにおいて μ を ω に入れ換えた式も出現するはずだと考えたいくなりますね。 .5)の右辺と.10)の右辺の和から、それが出現する可能性が有ります。計算してみましょう。

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \nu_1 & \lambda_1 \nu_2 & \lambda_1 \nu_3 & 0 \\ \lambda_2 \nu_1 & \lambda_2 \nu_2 & \lambda_2 \nu_3 & 0 \\ \lambda_3 \nu_1 & \lambda_3 \nu_2 & \lambda_3 \nu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu_1 \lambda_1 & \nu_1 \lambda_2 & \nu_1 \lambda_3 & 0 \\ \nu_2 \lambda_1 & \nu_2 \lambda_2 & \nu_2 \lambda_3 & 0 \\ \nu_3 \lambda_1 & \nu_3 \lambda_2 & \nu_3 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

【P189】 4 次の反対称行列 (続き)

$$= \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \nu_2 - \nu_1 \lambda_2 & \lambda_1 \nu_3 - \nu_1 \lambda_3 & 0 \\ \lambda_2 \nu_1 - \nu_2 \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \nu_3 - \nu_2 \lambda_3 & 0 \\ \lambda_3 \nu_1 - \nu_3 \lambda_1 & \lambda_3 \nu_2 - \nu_3 \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1 & -(\lambda_3 \nu_1 - \lambda_1 \nu_3) & 0 \\ -(\lambda_1 \nu_2 - \lambda_2 \nu_1) & 0 & \lambda_2 \nu_3 - \lambda_3 \nu_2 & 0 \\ \lambda_3 \nu_1 - \lambda_1 \nu_3 & -(\lambda_2 \nu_3 - \lambda_3 \nu_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \lambda \times \nu |_3 & -\lambda \times \nu |_2 & 0 \\ -\lambda \times \nu |_3 & 0 & \lambda \times \nu |_1 & 0 \\ \lambda \times \nu |_2 & -\lambda \times \nu |_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで、ベクトル3重積に関する恒等式 (52.11) をもう一度用いて、

$$\begin{aligned} \lambda \times \nu &= -\nu \times (\mu \times \nu) = -(\nu \cdot \nu) \mu + (\nu \cdot \mu) \nu \\ &= -\nu^2 \mu + \omega \nu \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\nu^2 \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 - \mu_2 & 0 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 \\ \mu_2 - \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 - \nu_2 & 0 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 \\ \nu_2 - \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (W26)$$

期待通り、Mにおいて μ を ν に入れ換え式が出現しました。オ2項です。オ1項はMそのものです。

【P190】 4次の反対称行列 (続き)

(W26) 右辺才1項と (57.5) 左辺才1項の和から A が得られます。また、(W26) 右辺才2項と (58.8) 右辺才1項と (58.9) 右辺才2項との和から A において μ と ν を互いに入れ換えた反対称行列が得られます。下記の行列です。面白いですね。

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu_3 & -\nu_2 & \mu_1 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 & \mu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

A^4 の表式を得るためには、 A と上記の行列との積を計算する必要があります。

$$A \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 & -\nu_2 & \mu_1 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 & \mu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & \nu_1 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & \nu_2 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 & -\nu_2 & \mu_1 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 & \mu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\mu_3\nu_3 - \mu_2\nu_2 - \nu_1\mu_1 & \nu_2\mu_1 - \mu_1\nu_2 & \mu_3\nu_1 - \nu_1\mu_3 & \mu_3\mu_2 - \mu_2\mu_3 \\ \mu_1\nu_2 - \nu_2\mu_1 & -\mu_3\nu_3 - \mu_1\nu_1 - \nu_2\mu_2 & \mu_3\nu_2 - \nu_2\mu_3 & -\mu_3\mu_1 + \mu_1\mu_3 \\ \mu_1\nu_3 - \nu_3\mu_1 & \mu_2\nu_3 - \nu_3\mu_2 & -\mu_2\nu_2 - \mu_1\nu_1 - \nu_3\mu_3 & \mu_2\mu_1 - \mu_1\mu_2 \\ \nu_2\nu_3 - \nu_3\nu_2 & -\nu_1\nu_3 + \nu_3\nu_1 & \nu_1\nu_2 - \nu_2\nu_1 & -\nu_1\mu_1 - \nu_2\mu_2 - \nu_3\mu_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega \end{pmatrix} = -\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (W27)$$

嬉しいことに綺麗な式が得られました。ちょっと驚きました。不自議な気分です。単に A, M, N という記号では無く、 $A(\mu, \nu), M(\mu), N(\nu)$ なる記号を採用していたら、これらと、 $A(\nu, \mu), M(\nu), N(\mu)$ たちの間に成り立つ一連の恒等式を追求することになっていたでしょう。でもとても Volume のある作業をこなさなければならなかったはず。そうじゃなくて良かったと思います。

【P191】 4次の反対称行列 (続き)

(W26), (W27) も定理として再記しておきます。

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \\ = -\nu^2 M + \omega \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 - \nu_2 & 0 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 & 0 \\ \nu_2 - \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .1)$$

$$A \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 - \nu_2 & \mu_1 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 & \mu_2 \\ \nu_2 - \nu_1 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{pmatrix} = -\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .2)$$

定理(59)

これで、 A^2, A^3, A^4 を μ, ν で表現するための準備が出来たはずです。計算しましょう。

$$A^2 = (M+N)(M+N) = M^2 + N^2 + (MN + NM)$$

(56.1), (57.1), (58.2) より

$$A^2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{pmatrix} - \mu^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} - \nu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}$$

(W28)

$$\begin{aligned}
 A^3 &= (M+N)(M^2+N^2+MN+NM) \\
 &= M^3+N^3+MN^2+NM^2 + M(MN+NM) \\
 &\quad + N(MN+NM)
 \end{aligned}$$

(56.5), (57.5), (58.5), (58.8), (58.9), (58.10), (59.1)より

$$\begin{aligned}
 A^3 &= -\mu^2 M - \nu^2 N + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad - \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{pmatrix} - \mu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^3 &= -\mu^2 M - \nu^2 N + \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{pmatrix} - \mu^2 N
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^3 &= -\mu^2 M - \nu^2 N - \mu^2 N - \nu^2 M + \omega \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 & -\nu_2 & 0 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 & 0 \\ \nu_2 & -\nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu_1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

【P193】 4次の反対称行列 (続き)

$$A^3 = -(\mu^2 + \nu^2)A + \omega \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 & -\nu_2 & \mu_1 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 & \mu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (W29)$$

(59.2)と(W29)より

$$\begin{aligned} A^4 &= AA^3 = -(\mu^2 + \nu^2)A^2 + \omega A \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 & -\nu_2 & \mu_1 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 & \mu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -(\mu^2 + \nu^2)A^2 - \omega^2 I \end{aligned} \quad (W30)$$

ここで I は 4×4 の単位行列 $\{\delta_{ij}\}$ です。すべての成分が 0 なる 4×4 の行列を単に 0 と記すことにすれば

$$0 = \omega^2 I + (\mu^2 + \nu^2)A^2 + A^4 \quad (W30)'$$

一方、定理(42)より

$$0 = d^{(4)}(A)I - d^{(3)}(A)A + d^{(2)}(A)A^2 - d^{(1)}(A)A^3 + d^{(0)}(A)A^4$$

ですが、 $d^{(m)}(\cdot)$ の定義(35)と、 A の反対称性より $d^{(3)}(A) = d^{(1)}(A) = 0$ は明らかです。また $d^{(0)}(A) = 1$ です。

$$0 = d^{(4)}(A)I + d^{(2)}(A)A^2 + A^4 \quad (W31)$$

$d^{(4)}(A) = \det(A)$ です。(W30)'と(W31)を見比べよう。どちらも A^4 の係数が1ですから次式が成り立つはずです。

$$\det(A) = \omega^2, \quad d^{(2)}(A) = \mu^2 + \nu^2 \quad (W32)$$

これを確かめるために、まず $d^{(2)}(A)$ を計算しましょう。

$$d^{(2)}(A) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} A_{ij} A_{kl}$$

$$\begin{aligned} d^{(2)}(A) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{il} \\ \delta_{kj} & \delta_{kl} \end{vmatrix} A_{ij} A_{kl} \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{kj}) A_{ij} A_{kl} \\ &= \frac{1}{2} (A_{il} A_{kj} - A_{ij} A_{kl}) \end{aligned}$$

Aは反対称行列だから、 $A_{il} = A_{kl} = 0$, $A_{ji} = -A_{ij}$ です。従って、

$$\begin{aligned} d^{(2)}(A) &= 0 - \frac{1}{2} A_{ij} (-A_{ij}) = \frac{1}{2} A_{ij} A_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (\mu_3^2 + (-\mu_2)^2 + \nu_1^2 + (-\mu_3)^2 + \mu_1^2 + \nu_2^2 \\ &\quad + \mu_2^2 + (-\mu_1)^2 + \nu_3^2 + (-\nu_1)^2 + (-\nu_2)^2 + (-\nu_3)^2) \\ &= \mu^2 + \nu^2 \end{aligned}$$

次に、(W31)-(W30)', $d^{(2)}(A) = \mu^2 + \nu^2$ より、

$$0 = (d^{(4)}(A) - \omega^2) I$$

より、 $d^{(4)}(A) = \omega^2$ も確認されました。 $\omega \neq 0$ なら A^{-1} が存在します。 A^{-1} の μ, ν による表式を求めよう。(W30)'の両辺に A^{-1} を掛けて、

$$0 = \omega^2 A^{-1} + (\mu^2 + \nu^2) A + A^3$$

$$\omega^2 A^{-1} = -(\mu^2 + \nu^2) A - A^3$$

A^3 に(W29)の右辺を代入して

$$\omega^2 A^{-1} = -(\mu^2 + \nu^2) A + (\mu^2 + \nu^2) A - \omega \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 - \nu_2 & \mu_1 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 \mu_2 \\ \nu_2 - \nu_1 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_3 - \mu_2 - \mu_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 - \nu_2 & \mu_1 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 \mu_2 \\ \nu_2 - \nu_1 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_1 - \mu_2 - \mu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (W33)$$

実はこれは既に求まっています。(59.2)です。上記の計算は A^3 の式(W29)の正しさを確認したことになります。

【P195】 4 次の反対称行列 (続き)

(W28), ..., (W33), 及び A の定義式 (55.6) をまとめて再記しよう.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mu_3 & -\mu_2 & \nu_1 \\ -\mu_3 & 0 & \mu_1 & \nu_2 \\ \mu_2 & -\mu_1 & 0 & \nu_3 \\ -\nu_1 & -\nu_2 & -\nu_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu^2 = \mu \cdot \mu, \quad \nu^2 = \nu \cdot \nu, \quad \omega = \mu \cdot \nu, \quad \lambda = \mu \times \nu \quad .1)$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & 0 \end{pmatrix} - \mu^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 \end{pmatrix} - \nu^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \quad .2)$$

$$A^3 = -(\mu^2 + \nu^2) A + \omega \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 & -\nu_2 & \mu_1 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 & \mu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad .3)$$

$$A^4 = -(\mu^2 + \nu^2) A^2 - \omega^2 I \quad .4)$$

$$d^{(2)}(A) = \mu^2 + \nu^2 \quad .5)$$

$$d^{(4)}(A) = \det(A) = \omega^2 \quad .6)$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 & -\nu_2 & \mu_1 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 & \mu_2 \\ \nu_2 & -\nu_1 & 0 & \mu_3 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & 0 \end{pmatrix} \quad .7)$$

定理 (6a)

(52.11) が 2 度用いられたので、『3次元のベクトル解析』の有用性の 1 つが例示されたことになります。但し、定理 (6a) の有用性が示されるならばのことです。

$\det(A)$ が ω であり A の成分の同次多項式の 2 乗 ω^2 に等しいのは偶然でしょうか？ 2 次の反対称行列の行列式 ($= \mu_3^2$) も μ_3 の 2 乗です。この問題については主題を改めて論じるつもりです。

● 小休止: Penrose Tile (ㄆㄠ1)

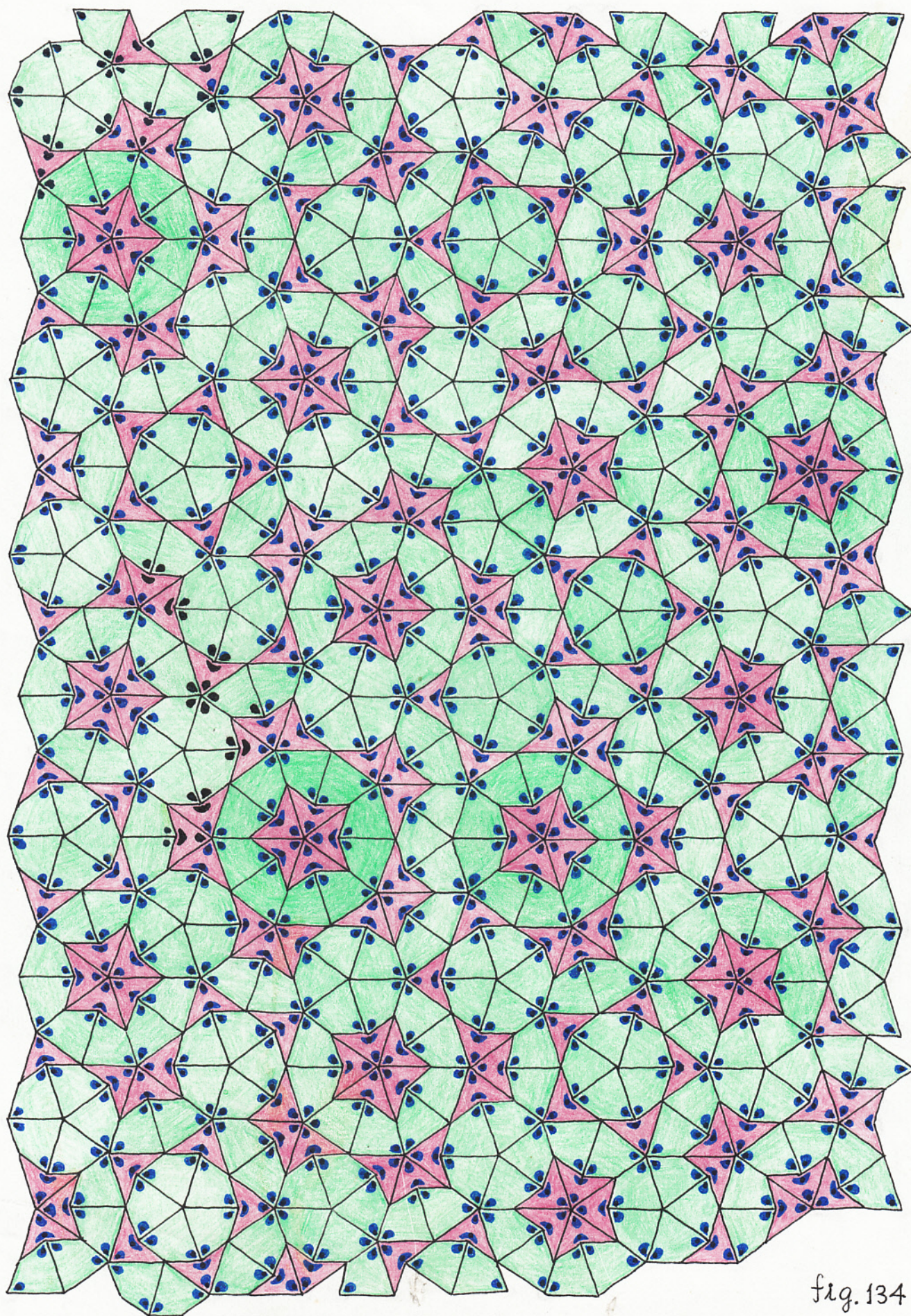


fig.134