● Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理

n次正方行列Aが与えられたとしよう。Aの成分はn^2個であるから、Aの自由度はたかだかn^2です。従って、$A^0, A^1, A^2, A^3, A^4, \cdots$すべてが一次独立ということは有りえません。一次独立という用語はベクトルに関する概念を示すが、ここで僕の云う一次独立とは、次が成り立つことです。

$$\alpha_0 A^0 + \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 + \cdots = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ (i = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

これが成り立たないと云う主張(Assertion)は、下記が成り立つという主張です。

> n次正方行列Aに対して、0以上の整数Nと、全てが0ではないN個の複素数$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_N$が存在し、次式が成り立つ。
>
> $$\alpha_0 A^0 + \alpha_1 A^1 + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3 + \cdots + \alpha_N A^N = 0 \qquad .1)$$
>
> ここで右辺の0は、その全ての成分が0のn次正方行列を意味する。
>
> 予想(19)

この予想(19)が正しいことを保証してくれるのが、Cayley-Hamiltonの定理です。Cayleyは初めて行列を数学に取り入れた数学者で、HamiltonはCayley-Hamiltonの定理を発見，証明した数学者だと思われます? Hamiltonは力学に登場するハミルトニアンを考案した物理学者と同一人物だと思いますが、どうでしょうか?

Cayley-Hamiltonの定理は予想(19)を含みますが、それよりも強い主張です。行列Aの自由度がn^2ですから、予想(19)におけるNはn^2だと考えるのが自然だと思うのですが、何と驚くことに、$N=n$です。それだけではありません。(19.1)の係数たち$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$は、線形代数学を学んだことのある人ならば誰でも知っているあのn次方程式の係数に一致するのです。何だか貴方にわかりますね。

僕がCayley-Hamiltonの定理を発見(再発見)したのはShyuko記号をいじくりまわしていたときのことです。偶然の産物です。つきつめて考えてみれば、その本質は行列式の余因子展開(Cofactor Expansion)そのものです。このことは後で出て来ます。その前にShyuko記号それ自身について論じる必要が有ります。

【P111】Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

僕が再発見した定理がCayley-Hamiltonの定理と呼ばれていることを知ったのはずいぶん後のことです。僕の買った、今も持っている代数学の洋書『ALGEBRA SERGE LANG』の400ページに、何でもないことのように数十行で呈示、証明されていました。でも、400ページもあるその内容をほとんどすべて精読しなければ理解できません。ところがその内容たるや、とても抽象的なのです。それに対して、僕の証明方法は、どちらかというと、具体的であり、機械的であり、力技であるとすら云えるでしょう。体系的な理論から自然に得られる命題の1つという訳では無いのです。

さて、Shyuko記号の話をしましょう。僕がShyuko記号を思いついたのは、ランダウ=リフシッツの『場の古典論』を読んでいたときのことです。その本の21ページの脚注（Footnotes）に啓発されたのです。それをそのままここに引用し（Quote）ておきましょう。式につけた番号は、僕自身の採番です。後で引用するかもしれません。

『場の古典論』からの引用

ここで参考のために、積 $e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu}$ に対する公式を引用しておこう。この積は真の6階のテンソルであり、したがって、単位テンソル $\delta_{\alpha\beta}$ の成分の積の和として表わすことができる：

$$
\begin{aligned}
e_{\alpha\beta\gamma}e_{\lambda\mu\nu} = {} & \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\nu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\lambda} + \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\mu} \\
& - \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\nu}\delta_{\gamma\mu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}\delta_{\gamma\lambda} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\nu}. \qquad .1)
\end{aligned}
$$

このテンソルを1つ，2つ，および3つの添字について縮約すると

$$e_{\alpha\beta\nu}e_{\lambda\mu\nu} = \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\lambda}, \qquad .2)$$

$$e_{\alpha\mu\nu}e_{\beta\mu\nu} = 2\delta_{\alpha\lambda}, \qquad .3)$$

$$e_{\lambda\mu\nu}e_{\lambda\mu\nu} = 6 \qquad .4)$$

が得られる。類似の式は4元テンソル e_{iklm} についても導くことができる.

引用 (20)

ここで引用した脚注は完全反対称単位擬テンソルの補記です。随分と密度の濃い補記ですね。しかも『場の古典論』のたった21ページ目に登場するの

です。またアインシュタイン(Einstein)の特殊相対性理論については、21ページ以前で既に論じ終っています。ランダウ=リフシッツの理論物理学教程はとてもよくできたシリーズです。特に『力学』と『場の古典論』は、エレガント(Elegant)だと思いました。

引用(20)では$\delta_{\alpha\beta}$を単位テンソルと呼んでいますが、通常はクロネッカーのデルタ(Kronecker's delta)と呼ばれています。ソ連時代のロシアと西洋との歴史的背景が関係していると思われます。また、完全反対称単位擬テンソル$e_{\alpha\beta\gamma}$が登場しましたが、僕は単に反対称単位テンソルと呼び、記号eではなくε(epsilon)を用いることにします。テンソルではなく擬(Psu-do-)テンソルと呼んでいるのは、一般相対性理論を意識してのことだと思われます。『場の古典論』ではその10章(266ページ)から、一般相対性理論を論じています。『力学』は全部で210ページとコムパクト(Compact)ですが、『場の古典論』は全部で423ページで随分とボリューム(Volume)があります。内容が豊富だからです。当然、マックスウェル(Maxwell)の方程式も論じています。『場の古典論』というタイトル(Title)から想像されるように、ランダウたちは、『場の量子論』も出版するつもりだったと思われます。それが成されなかったのは残念に思われます。唯、当時はまだ場の量子論は完成していなかったはずです。名著(Famous Book)で有名なディラック(P.A.M. Dirac)の『The PRINCIPLES of QUANTAM MECHANICS』ですら、場の量子論(特に真空の)に関しては、その困難性(主に発散の問題)について最終章で論じているだけです。

横道に逸れてしまいました。Shyuko記号の話でした。それを思いついたのは引用(20)に出合ったからということでした。引用(20)は、クロネッカーのデルタと3階の反対称単位テンソルの話です。クロネッカーのデルタは当文書の読者なら誰でも知っているはずですが、一応定義しておきましょう。また、3階の反対称単位テンソルについても、とりあえず"3階"に限った定義を行なっておきましょう。一般のn階の反対称単位テンソルの定義は後述とします。

(次ページへ続く)

Kronecker's deltaの定義

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$ 定義(21)

ここで注意してほしいのは、添字i, jのとり得る値についてです。δ_{ij}だけに関して云えば、i, jは何でも良いのです。ただし等しいか等しくないかが定まる識別子であるということだけを前題とします。例えば、$i, j \in \{$ア, イ, ウ, エ, …$\}$だったり、$i, j \in \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots\}$であっても良いのです。また$\delta_{ij}$だけに限って云えば、添字集合の元の個数にも制限はありません。通常添字集合として自然数の集合$\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$が用いられます。僕もそうすることにします。添字集合の個数に制限はないと云いましたが、反対称単位テンソル$\varepsilon_{ijk\cdots}$と同時に用いられる場合は注意が必要です。(20)の4つの式からわかるように右辺のδ記号の添字集合が$\{1, 2, 3\}$であることが暗黙の了解（an implicit understanding）とされています。混乱（Confusion）の可能性がある場合は添字集合を明記することにします。次に3階の反対称単位テンソルε_{ijk}の定義を行ないます。

反対称単位テンソルε_{ijk}の定義

$$\varepsilon_{123} = 1 \qquad .1)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} \qquad .2)$$

$$\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ijk}, \quad \varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk} \qquad .3)$$

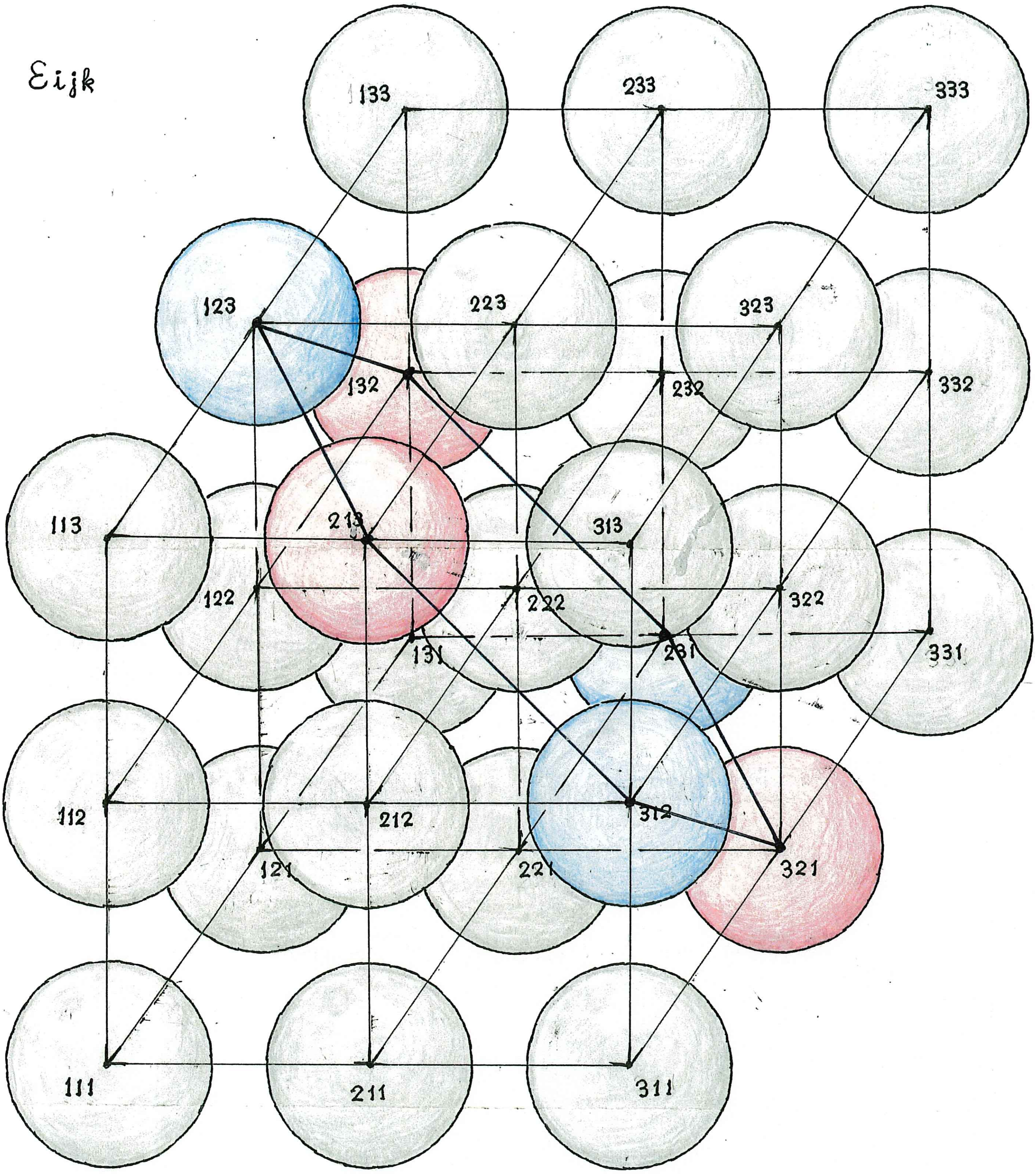
定義(22)

このε_{ijk}の定義では$i, j, k \in \{1, 2, 3\}$が暗黙の了解として仮定されています。また上記の定義は冗長です。.2)は不必要です。.2)は.3)から導出

【P114】 Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

できます。 jki も kij も ijk の偶置換です。それだけ。

式と文章だけが続いたのでこのへんで絵を描きましょう。 ε_{ijk} の作図です。



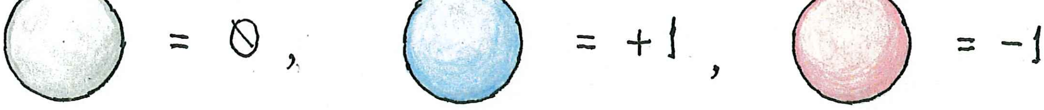


fig. 107

0の個数は21，+1の個数は3，−1の個数も3です。

 Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

Kronecker's deltaに対して、Diracの$\delta(x)$が有ります。δ_{ij}が添字の縮約（和をとる）のに対して、$\delta(x)$は積分に関してδ_{ij}と似た機能を発揮します。$\delta(x)$は通常の関数としては定義できません。超関数と呼ばれる数学上の実体の一種です。数学者たちは、Diracの$\delta(x)$の正当性を考察することによって、超関数を構築しました。Diracは天才ですね。

n階の反対称単位テンソルの定義は後で行いますが、これは置換（Permutation）のSignalの一般化であると考えることができます。Shyuko記号はKronecker's deltaと反対称単位テンソルを一般化したものとしてとらえることができます。

置換は線形代数学の基本中の基本です。貴方は良く理解しているはずですが、上記の理由から、当文書で復習しましょう。下記の命題の証明法がとても面白いのです。教課書のほとんど丸写しになります。

置換に関する定理とSignalの定義

任意の置換は互換の積として表わすことができる。その表わし方は一通りとは限らない。しかし現われる互換の個数が偶数であるか奇数であるかは置換によって一定である。

偶数であるときその置換を偶置換と呼び奇数であるとき奇置換と呼ぶ。

置換σに対して、そのSignal $\mathrm{sgn}(\sigma)$を次式で定義する。

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & (\sigma\text{が偶置換のとき}) \\ -1 & (\sigma\text{が奇置換のとき}) \end{cases} \qquad .1)$$

定理（23）

証明）互換の積として表わされることを証明するのは簡単ですから省略します。巡回置換の積で表わされること、巡回置換が互換の積で表わされることを証明すれば良いのです。互換の個数が偶数であるか奇数であるかは置換によって一定であることを証明しましょう。

【P116】Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

n個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{W1}$$

に対して

$$\sigma F(x_1\ x_2, \cdots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) \tag{W2}$$

と定義する。F, G を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式，σ, τ を $\{1, 2, \cdots, n\}$ の置換とするとき、次の式が成立します。

$$\sigma(\tau F) = (\sigma\tau)F \tag{W3.1}$$

$$\sigma(F+G) = \sigma F + \sigma G \tag{W3.2}$$

$$\sigma(FG) = (\sigma F)(\sigma G) \tag{W3.3}$$

ここで次のような $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式を考えましょう。

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 - x_2)\cdot(x_1 - x_3)\cdots\cdot(x_1 - x_n) \\ \cdot(x_2 - x_3)\cdots\cdot(x_2 - x_n) \\ \cdots\cdots \\ \cdot(x_{n-1} - x_n) \end{aligned} \tag{W4}$$

$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の因数のうち、x_j, x_j $(1 \leq i < j \leq n)$ を含むものは次の形で現われます。

$$\begin{array}{ll} (x_i - x_k)(x_j - x_k) & (j < k) \\ (x_i - x_k)\ x_k - x_j) & (i < k < j) \\ (x_k - x_i)(x_k - x_j) & (k < i) \\ (x_i - x_j) & \end{array} \tag{W5}$$

ここで x_i のところに x_j を、x_j のところに x_i を入れると、はじめの三つの形のものは不変であるが、$x_i - x_j$ は $x_j - x_i = -(x_i - x_j)$ にかわります。

このことは

$$(i\,j)\Delta = -\Delta \tag{W6}$$

が成立することを意味します

【P117】 Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

さていま1つの置換σが

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s = \tau_1\tau_2\cdots\tau_t \qquad (W7)$$

と2通りに互換の積として表わされたとすると、(W6)より

$$\sigma\Delta = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s)\Delta = (-1)^s\Delta$$
$$\sigma\Delta = (\tau_1\tau_2\cdots\tau_t)\Delta = (-1)^t\Delta \qquad (W8)$$

従って

$$(-1)^s = (-1)^t \qquad (W9)$$

よって、sが偶数ならばtも偶数、sが奇数ならばtも奇数です。Q.E.D.

$\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$はまるで定理(23)を証明するために、そのためにだけ存在する関数のように感じます。面白いですね。

(23)で定義した$\mathrm{sgn}(\cdot)$を用いて、正方行列の行列式(Determinant)は次式で定義されます。

行列式の定義

n次の正方行列$A = (A_{ij})$に対して、$\det A = |A|$と記される複素数を次式で定義する。

$$\det A = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\,\sigma(i)} \qquad .1)$$

$\det A$をAの行列式と呼ぶ。$\det A \neq 0$のときAを正則な行列と呼ぶ。

定義(24)

$\sum_{\sigma}$は、$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$の置換全体にわたって和をとることを意味します。$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}$とも書きます。$\mathfrak{S}_n$は$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$の置換全体の集合です。$\det A$は、$A$の成分$A_{ij}$に関する、$n!$個の項から成る$n$次の同次多項式です。

$n = 1, 2, 3$の場合の行列式の公式を書いておきましょう。貴方は暗記しているはずですね。

【P118】10月4日(日) Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理(続き)

行列式の公式 ($n=1,2,3$)

$$|A_{11}| = +A_{11} \qquad .1)$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = +A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \qquad .2)$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = +A_{11}A_{22}A_{33} + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{13}A_{22}A_{31} - A_{12}A_{21}A_{33} - A_{11}A_{23}A_{32} \qquad .3)$$

公式(25)

.3)の右辺の初めの＋の3項はfig.107の青玉に対応し、残りの－の3項は赤玉に対応します。

引用(20)の.1)と公式(25)の.3)とを、(20.2)と(25.2)を見比べて下さい。引用(20)の.1)と.2)は次のように書き換えることが出来ます。

『場の古典論』からの引用の書き換え

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} \\ \delta_{\gamma\lambda} & \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} \end{vmatrix} \qquad .1)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\nu}\varepsilon_{\lambda\mu\nu} = \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\lambda} & \delta_{\alpha\mu} \\ \delta_{\beta\lambda} & \delta_{\beta\mu} \end{vmatrix} \qquad .2)$$

引用の書き換え(26)

【P119】Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

（26.2）に注目して下さい。右辺には添字νは出現しませんが、左辺には2個出現しています。これは、$\nu=1, 2, 3$に関して和をとることを意味しています。つまり、νで縮約するということです。このように等式の一方の側しか出現しない添字のことを一般にダミー添字（Dummy Index）と呼びます。

（26.2）は、ベクトルの諸恒等式，ベクトル解析の諸恒等式の証明の際に決定的な働きをします。これらについては後述とします。

さて、僕は引用(20)から啓発さ（Inlighten）されてShyuko記号を思いついたと云いましたが、実際のところ、それを書き換えた（26）に啓発されたのです。Kronecker's deltaを用いて、Shyuko記号を次式で定義します。

Shyuko記号の定義

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_n \\ \beta_1 \beta_2 \beta_3 \cdots \beta_n \end{bmatrix} = \det(\delta_{\alpha_i \beta_j})$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{\alpha_1\beta_1} & \delta_{\alpha_1\beta_2} & \delta_{\alpha_1\beta_3} & \cdots & \delta_{\alpha_1\beta_n} \\ \delta_{\alpha_2\beta_1} & \delta_{\alpha_2\beta_2} & \delta_{\alpha_2\beta_3} & \cdots & \delta_{\alpha_2\beta_n} \\ \delta_{\alpha_3\beta_1} & \delta_{\alpha_3\beta_2} & \delta_{\alpha_3\beta_3} & \cdots & \delta_{\alpha_3\beta_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{\alpha_n\beta_1} & \delta_{\alpha_n\beta_2} & \delta_{\alpha_n\beta_3} & \cdots & \delta_{\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix} \qquad .1)$$

ここで、$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n$は任意の添字とする。左辺の記号をn階のShyuko記号と呼ぶ。

定義（27）

添字の添字が登場しました。これは避けられないことです。定義上α_i, β_jは任意ですが、δ_{ij}と同様に、n階の反対称単位テンソルやn次の正方行列と同時にとり扱う場合は、当然ながら、その値域には制限があります。前にも云いましたが、混乱しそうなときは、その都度注意することにします。

【P120】10月5日（月）Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理

Shyuko記号の名前の由来についてですが、Kronecker's deltaの一般化ですから拡張クロネッカー・デルタでも良かったのですが、反対称単位テンソルの一般化でもありますからふさわしくありません。それに長すぎます。ランダウに敬意を表してLandau記号と呼びたいところですが、Landau記号は解析学に登場しているので使えません。そこで、Shyuko記号と名付けたのですが、シュウコはある女性の名前です。『はじめに』で僕は自分の人生については触れないと云いましたね。ですからこれ以上は語りません。彼女のプライバシー（Privacy）にもかかわることになります。唯、シュウコのコが括弧[ ]（Brackets）のコと一致するのでゴロあわせには なります。

以下の議論では、添字はすべて$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$の元であるとします。nはかってに定めた自然数です。縮約も$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$に関する和とします。

まず、n階の反対称単位テンソルを定義しましょう。

n階の反対称単位テンソルの定義

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \qquad \text{定義(28)}$$

$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}$はShyuko記号の定義より、

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n} = \begin{vmatrix} \delta_{1\alpha_1} & \delta_{1\alpha_2} & \delta_{1\alpha_3} & \cdots & \delta_{1\alpha_n} \\ \delta_{2\alpha_1} & \delta_{2\alpha_2} & \delta_{2\alpha_3} & \cdots & \delta_{2\alpha_n} \\ \delta_{3\alpha_1} & \delta_{3\alpha_2} & \delta_{3\alpha_3} & \cdots & \delta_{3\alpha_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n\alpha_1} & \delta_{n\alpha_2} & \delta_{n\alpha_3} & & \delta_{n\alpha_n} \end{vmatrix} \qquad (W10)$$

右辺の$n \times n$の行列式は、各列に1個ずつの1が配置された行列式である。従って$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}$は値として$\pm 1$あるいは0しかとり得ない。このことが反対称単位テンソルの"単位"の由来だと思われる。さらに任意の2つの添字を入れ換えると、右辺の対応する2つの列を入れ換えることになるから、$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}$は$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$に関して反対称です。名前の"反対称"の由来ですね。しかも、$\varepsilon_{123\cdots n} = 1$である。従って、次が成り立ちます。

【P121】Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

n階の反対称単位テンソルに関する定理（その1）

$$\varepsilon_{123\cdots n} = 1 \qquad .1)$$

$$\varepsilon_{\alpha_{\sigma(1)}\alpha_{\sigma(2)}\alpha_{\sigma(3)}\cdots\alpha_{\sigma(n)}} = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n} \qquad .2)$$

定理(29)

上記の2式で $\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}$ が一意的に定まることに注意しよう。通常は(29)によってn階の反対称単位テンソルを定義していると思われます。僕はShyuko記号を用いて定義したので、(29)は定理ということになります。

(29)より特に、次式が成り立ちます。

n階の反対称単位テンソルに関する定理（その2）

$$\varepsilon_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\cdots\sigma(n)} = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

定理(30)

(26.1)を一般化した次の定理が成り立ちます。ランダウは ε_{iklm} についても類似の式を導くことができると云っていましたね。

n階の反対称単位テンソルに関する定理（その3）

$$\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}\cdot\varepsilon_{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}$$

定理(31)

証明）

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= |\delta_{i\alpha_j}|\cdot|\delta_{i\beta_j}| \\
&= |\delta_{\alpha_i j}|\cdot|\delta_{i\beta_j}| \\
&= |\delta_{\alpha_i k}\delta_{k\beta_j}| \\
&= |\delta_{\alpha_i\beta_j}| = \text{右辺}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Quod Erat Demonstrandum

 Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理(続き)

Shyuko記号に関して、次の展開公式が成り立つ。

Shyuko記号の展開公式(その1)

$$\begin{bmatrix} i & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ j & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{m}\begin{bmatrix} \alpha_k \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & i & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k & \cdots & \beta_m \end{bmatrix}$$

定理(32)

ここで m と添字集合は何でも良いのであるが、後でこれを用いるときに混乱がないように、$m<n$，添字集合は $\{1,2,\cdots,n\}$ としておきます。

証明) $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = \delta_{ij}$ であることに注意しよう。1列目に関して余因子展開すればよい。

$$\text{左辺} = \begin{vmatrix} \delta_{ij} & \delta_{i\beta_1} & \delta_{i\beta_2} & \cdots & \delta_{i\beta_m} \\ \delta_{\alpha_1 j} & \delta_{\alpha_1\beta_1} & \delta_{\alpha_1\beta_2} & \cdots & \delta_{\alpha_1\beta_m} \\ \delta_{\alpha_2 j} & \delta_{\alpha_2\beta_1} & \delta_{\alpha_2\beta_2} & \cdots & \delta_{\alpha_2\beta_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{\alpha_m j} & \delta_{\alpha_m\beta_1} & \delta_{\alpha_m\beta_2} & \cdots & \delta_{\alpha_m\beta_m} \end{vmatrix}$$

$$= \delta_{ij}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\delta_{\alpha_k j}\begin{vmatrix} \delta_{i\beta_1} & \delta_{i\beta_2} & \cdots & \delta_{i\beta_m} \\ \delta_{\alpha_1\beta_1} & \delta_{\alpha_1\beta_2} & \cdots & \delta_{\alpha_1\beta_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \cancel{\delta_{\alpha_k\beta_1}} & \cancel{\delta_{\alpha_k\beta_2}} & \cancel{\cdots} & \cancel{\delta_{\alpha_k\beta_m}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{\alpha_m\beta_1} & \delta_{\alpha_m\beta_2} & \cdots & \delta_{\alpha_m\beta_m} \end{vmatrix}$$

$$= \delta_{ij}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} - \sum_{k=1}^{m}\delta_{\alpha_k j}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & i & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_k & \cdots & \beta_m \end{bmatrix}$$

$=$ 右辺

ここで、2式目の行に関する置換(青矢印)は $k-1$ 回の互換で行うことができることに注意しよう。

Q.E.D.

【P123】 Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理(続き)

(32)より、添字の組について縮約すると次が成り立つ。

Shyuko記号の縮約の公式

特に1組の添字について縮約すると

$$\begin{bmatrix} k & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ k & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} = (n-m)\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \quad .1)$$

ここで左辺は k について 1 から n まで和をとるものとする。よって、$l+m=n$ とするとき

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_l & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_l & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} = l!\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \quad .2)$$

定理(33)

.2)に n が陽に出現しないのは面白いですね。これは

$$(n-(n-1))(n-(n-2))\cdots(n-(n-l)) = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot l = l!$$

だからです。(33)は引用の書き換え(26.2)の一般化したものと云えます。
(31)が成り立つからです。

行列式はShyuko記号を用いて表現できます。

Shyuko記号による行列式の表現

A を n 次の正方行列とする。次式が成り立つ。

$$\det A = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix}\prod_{k=1}^{n} A_{\alpha_k \beta_k}$$

定理(34)

この式は行列式の計算を行うためには全く役に立ちません。なにしろ通常の行列式の定義式よりはるかに多くの項をとり扱わなければなりません。しかし(34)はCayley-Hamiltonの定理の証明に大きなヒントを与えてくれます。

(34)を証明しましょう。ちょっと長くなります。丁寧に証明したいからです。

【P124】Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

（34）の証明.

云うまでも無いことでしょうが、確認します。右辺の$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2 \cdots, \beta_n$は全てダミー添字です。つまり全て$\{1, 2, \cdots, n\}$に渡って和をとることを意味しています。行列式の定義式(24)を再記します。

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \tag{W11}$$

一方 sgn(σ)は定理(30)より

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \varepsilon_{\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)} \tag{W12}$$

よって(W11)は次のように書けます。

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_{\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)} \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)} \tag{W13}$$

ところで、反対称単位テンソル$\varepsilon_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}$は$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$に関して反対称ですから、$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$の中に1組でも等しい添字が出現したら0になります。従って(W13)は次のように書けます。

$$\det A = \varepsilon_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n} \prod_{i=1}^{n} A_{i\beta_i} \tag{W14}$$

ここで右辺の$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \{1, 2, \cdots, n\}$はダミー添字です。ところでかってに固定し(Fix)た置換$\tau \in \mathfrak{S}_n$に対して、(W14)は次のようにも表現できます。

$$\det A = \varepsilon_{\beta_{\tau^{-1}(1)}\beta_{\tau^{-1}(2)}\cdots\beta_{\tau^{-1}(n)}} \prod_{i=1}^{n} A_{i\beta_{\tau^{-1}(i)}} \tag{W15}$$

何故なら、全ての$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$に関して和をとるということは、全ての$\beta_{\tau^{-1}(1)}$, $\beta_{\tau^{-1}(2)}, \cdots, \beta_{\tau^{-1}(n)}$に関して和をとることと同じだからです。ダミー添字$\beta_i$を$\beta_{\tau^{-1}(i)}$に改名したと思えば良いのです。わざわざ$\tau$の逆置換$\tau^{-1}$を導入した理由は、すぐ分かると思います。これが証明のみそです。

【P125】 Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

ここで（W15）の右辺の $\varepsilon_{\beta_{\tau^{-1}(1)}\beta_{\tau^{-1}(2)}\cdots\beta_{\tau^{-1}(n)}}$ と $\prod_{i=1}^{n} A_{i\beta_{\tau^{-1}(i)}}$ を、それぞれ変形しましょう。$\varepsilon_{\beta_{\tau^{-1}(1)}\beta_{\tau^{-1}(2)}\cdots\beta_{\tau^{-1}(n)}}$ は 定理（29.2）より、

$$\varepsilon_{\beta_{\tau^{-1}(1)}\beta_{\tau^{-1}(2)}\cdots\beta_{\tau^{-1}(n)}} = \mathrm{sgn}(\tau)\,\varepsilon_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n} \qquad (W16)$$

ここで $\mathrm{sgn}(\tau^{-1}) = \mathrm{sgn}(\tau)$ を用いました。また $\prod_{i=1}^{n} A_{i\beta_{\tau^{-1}(i)}}$ は、i に $\beta_{\tau^{-1}(i)}$ が対応するということは $\tau(i)$ に β_i が対応するということですから、積の順序を入れ換えれば、

$$\prod_{i=1}^{n} A_{i\beta_{\tau^{-1}(i)}} = \prod_{i=1}^{n} A_{\tau(i)\beta_i} \qquad (W17)$$

（W16），（W17）を（W15）に代入して、

$$\det A = \mathrm{sgn}(\tau)\,\varepsilon_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}\prod_{i=1}^{n} A_{\tau(i)\beta_i} \qquad (W18)$$

さらに $\mathrm{sgn}(\tau)$ は、定理（30）をもう一度引用して、

$$\mathrm{sgn}(\tau) = \varepsilon_{\tau(1)\tau(2)\cdots\tau(n)} \qquad (W19)$$

よって、かってに固定した置換 τ に対して、

$$\det A = \varepsilon_{\tau(1)\tau(2)\cdots\tau(n)}\,\varepsilon_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}\prod_{i=1}^{n} A_{\tau(i)\beta_i} \qquad (W20)$$

すべての $\tau\in\mathfrak{S}_n$ に関して和をとれば、$\#(\mathfrak{S}_n) = n!$ だから、

$$\det A = \frac{1}{n!}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon_{\tau(1)\tau(2)\cdots\tau(n)}\,\varepsilon_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}\prod_{i=1}^{n} A_{\tau(i)\beta_i} \qquad (W21)$$

（W13）から（W14）に変形したと同じ理屈で、τ に関する和は、$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\{1,2,\ldots,n\}$ に関する和に置き換えることが出来ます。

$$\det A = \frac{1}{n!}\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\,\varepsilon_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}\prod_{i=1}^{n} A_{\alpha_i\beta_i} \qquad (W22)$$

（W22）と定理（31）より（34）式が得られます。　　Q.E.D.

Shyuko記号による行列式の表現式（34）をよく観察し（Observe）しよう。行列式は正方行列から1つのスカラー（Scalar）、つまり1つの単なる複素数を抽出す（Abstract）る1つの方法、1つのアルゴリズム（Algorism）であると云えます。このようなこ行列から複素数を抽出するアルゴリズムは他にも考えられます。例えば、式（34）を一般化を考えれば、次のアルゴリズムを定義することが出来ます。

行列式の一般化としての $d^{(m)}(A)$ の定義

n次正方行列Aと0以上の整数mに対して、複素数$d^{(m)}(A)$を次のように定める。

$$d^{(0)}(A) = 1 \qquad .1)$$

$m \geq 1$に対して

$$d^{(m)}(A) = \frac{1}{m!}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \prod_{k=1}^{m} A_{\alpha_k \beta_k} \qquad .2)$$

これより直ちに

$$d^{(1)}(A) = \mathrm{tr}A \ , \quad d^{(n)}(A) = \det A \qquad .3)$$

$$d^{(m)}(A) = 0 \quad (m > n) \qquad .4)$$

定義（35）

執拗だ（Persistent）と思われるでしょうが繰り返し（Repeat）ます。.2）の$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_m$、$\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m$は全てダミー添字で、全て$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$に渡って和をとることを意味します。定義.2）には$n$が隠れ（isHidden）ています。

もし、からっぽの（Empty）Shyuko記号$[\ ]$を1と定義し、からっぽの積$\prod$を1と定義していたならば、$0! = 1$ですから .1）は不要でしたね。$\mathrm{tr}A$はAの跡（Trace）で、$\mathrm{tr}A = S_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = A_{11} + A_{22} + A_{33} + \cdots + A_{nn}$です。

【P127】Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

・$d^{(n)}(A) = \det A$は定理（34）そのものです。$m > n$とすれば、$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$は、$n$個の添字の集合$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$から、それよりも多い$m$個の添字を選ぶことになりますから、少なくとも1組の添字は等しくなります。$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$も同様です。従って定理（31）より、$\begin{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \\ \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m \end{bmatrix}$は全て0です。従ってこの場合は、$d^{(m)}(A) = 0$です。$d^{(m)}(A)$はdeterminantの$d$から選びました。拡張行列式と呼びたいところですが、行列式の一般化は他にも可能かもしれませんから止め（Abandone）ときましょう。小文字のdとしたのは、それがテンソルや行列では無く単なるスカラーであることを忘れ（Forget）無いようにするためです。後で大文字Dを用いた行列が登場する予定です。

・任意のn次正方行列A, Bに対して、$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ですから、$\det(AB) = \det(BA)$です。Shyuko記号を用いて、$\det(AB) = \det A \det B$を証明できるはずですが、自家撞着（Contradiction）を招きかねませんからやめておきます。何故なら、定理（31）の証明で$\det(AB) = \det A \cdot \det B$を既に使っているからです。$\mathrm{tr}(AB)$はどうでしょう。$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$も成り立ちます。

・$d^{(m)}(A)$の定義（35）も、定義（4）や定義（7）がそうであったように定義$+\alpha$です。定義（35）の$+\alpha$は、.3）と.4）です。当文書ではまた後でも$+\alpha$付きの定義が登場するでしょう。また定理（23）のように、定理+定義も登場するかもしれません。

次式が成り立ちます。

任意の2つのn次正方行列A, Bに対して

$$d^{(m)}(AB) = d^{(m)}(BA) \qquad \text{定理}(36)$$

証明）

$m = 0$のときは両辺とも1，$m > n$のときは両辺とも0ですから、$1 \leq m \leq n$の場合について証明すれば良い。

Kronecker's delta $\delta_{\alpha\beta}$の機能を全開で（Full）使います。また、定理（34）の証明で用いた積Πの入れ換えの理屈（Logic）も必須です。

【P128】 Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

定義式（35.2）より

$$d^{(m)}(AB) = \frac{1}{m!}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \prod_{k=1}^{m} A_{\alpha_k \gamma_k} B_{\gamma_k \beta_k} \tag{W23}$$

Shyuko記号の定義（27）と行列式の定義（24）より

$$d^{(m)}(AB) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{l=1}^{m} \delta_{\alpha_l \beta_{\sigma(l)}} \prod_{k=1}^{m} A_{\alpha_k \gamma_k} B_{\gamma_k \beta_k} \tag{W24}$$

ここで各$\delta_{\alpha_l \beta_{\sigma(l)}}$を各$A_{\alpha_k \gamma_k} B_{\gamma_k \beta_k}$に配る（Allot）様に積の順序を入れ換える。

$$d^{(m)}(AB) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{m} \delta_{\alpha_k \beta_{\sigma(k)}} A_{\alpha_k \gamma_k} B_{\gamma_k \beta_k} \tag{W25}$$

ダミー添字α_kに関する縮約を先に実行してしまおう。α_kは$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$の全ての添字をとり、$\beta_{\sigma(k)} \in \{1, 2, \cdots, n\}$だから、$\delta_{\alpha_k \beta_{\sigma(k)}}$は$\alpha_k$を$\beta_{\sigma(k)}$に置き代える機能を果たす。

$$d^{(m)}(AB) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{m} A_{\beta_{\sigma(k)} \gamma_k} B_{\gamma_k \beta_k} \tag{W26}$$

ここで$\prod_{k=1}^{m}$において、Aの添字$\beta_{\sigma(k)}$にγ_kが対応するということは、β_kに$\gamma_{\sigma^{-1}(k)}$が対応するということだから、積の順序を入れ換えると

$$\prod_{k=1}^{m} A_{\beta_{\sigma(k)} \gamma_k} B_{\gamma_k \beta_k} = \prod_{k=1}^{m} B_{\gamma_k \beta_k} A_{\beta_k \gamma_{\sigma^{-1}(k)}} \tag{W27}$$

これを（W26）に代入して、

$$d^{(m)}(AB) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{m} B_{\gamma_k \beta_k} A_{\beta_k \gamma_{\sigma^{-1}(k)}} \tag{W28}$$

（W25）を（W26）に変換したのと同様に、δ_{ij}の機能を逆に用いると、ダミー変数$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m \in \{1, 2, \cdots, n\}$を導入して

$$d^{(m)}(AB) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{m} \delta_{\mu_k \gamma_{\sigma^{-1}(k)}} B_{\gamma_k \beta_k} A_{\beta_k \mu_k} \tag{W29}$$

各$B_{\gamma_k\beta_k}A_{\beta_k\mu_k}$に配られている$\delta_{\mu_k\gamma_{\sigma^{-1}(k)}}$を、積の順序を入れ換て$\delta_{\mu_k\gamma_{\sigma^{-1}(k)}}$たちをまとめる。$sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$を用いる。

$$d^{(m)}(AB) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma^{-1}\in\mathfrak{S}_m} sgn(\sigma^{-1})\prod_{k=1}^{m}\delta_{\mu_k\gamma_{\sigma^{-1}(k)}}\prod_{k=1}^{m}B_{\gamma_k\beta_k}A_{\beta_k\mu_k} \qquad (W30)$$

$\sum_{\sigma^{-1}\in\mathfrak{S}_m} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m}$ だから

$$d^{(m)}(AB) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_m} sgn(\sigma)\prod_{k=1}^{m}\delta_{\mu_k\gamma_{\sigma(k)}}\prod_{k=1}^{m}B_{\gamma_k\beta_k}A_{\beta_k\mu_k} \qquad (W31)$$

Shyuko記号の定義(27)と行列式の定義(24)をもう一度用いて

$$d^{(m)}(AB) = \frac{1}{m!}\begin{bmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_m\end{bmatrix}\prod_{k=1}^{m}B_{\gamma_k\beta_k}A_{\beta_k\mu_k} \qquad (W32)$$

ところで、$\det(C) = \det({}^tC)$です。${}^tC$はCの転置行列(Transpose)です。従って、Shyuko記号の定義(27)より、

$$\begin{bmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_m \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m\end{bmatrix} \qquad (W33)$$

よって、

$$d^{(m)}(AB) = \frac{1}{m!}\begin{bmatrix}\gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_m \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_m\end{bmatrix}\prod_{k=1}^{m}B_{\gamma_k\beta_k}A_{\beta_k\mu_k} \qquad (W34)$$

(W32)の右辺は、$d^{(m)}(\cdot)$の定義(35.2)より、$d^{(m)}(BA)$です。 Q.E.D.

固有多項式(Eigen Polynomial)は$d^{(m)}(\cdot)$を用いて次のように展開することが出来ます。

固有多項式の$d^{(m)}(\cdot)$を用いた展開公式

任意のn次正方行列Aに対して次式が成り立つ。

$$|\lambda I - A| = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m d^{(m)}(A)\lambda^{n-m} \qquad \text{定理}(37)$$

この式と定理(36)を見ると、本当に$d^{(m)}(\cdot)$を拡張行列式と呼びたくなります。貴方はどう思います。証明は短いですが、よおく考える必要があります。

【P130】Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

（37）の証明.

n次正方行列の固有多項式 $\det(A-\lambda I) = |A-\lambda I|$ を λ の冪に展開しよう。係数 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ を用いて次のように書くとします。

$$|A-\lambda I| = \sum_{l=0}^{n} C_{n-l}\lambda^{l} \qquad \text{(W35)}$$

定理（34）より

$$|A-\lambda I| = \frac{1}{n!}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix}\prod_{k=1}^{n}\left(A_{\alpha_k\beta_k} - \lambda\delta_{\alpha_k\beta_k}\right) \qquad \text{(W36)}$$

これより、$n = l+m$ とし、n個からl個を選ぶ組み合わせ数を $\binom{n}{l}$ と記すとき、C_m は直ちに次のように表わせます。

$$C_m = \binom{n}{l}\frac{1}{n!}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_m & \lambda_1 & \cdots & \lambda_l \\ \beta_1 & \cdots & \beta_m & \mu_1 & \cdots & \mu_l\end{bmatrix}\prod_{k=1}^{m}A_{\alpha_k\beta_k}\prod_{k=1}^{l}\left(-\delta_{\lambda_k\mu_k}\right) \qquad \text{(W37)}$$

ここで、定理（29），（31）から得られる自明な恒等式、下記を用いました。

$$\begin{bmatrix}\alpha_{\sigma(1)} & \alpha_{\sigma(2)} & \cdots & \alpha_{\sigma(n)} \\ \beta_{\sigma(1)} & \beta_{\sigma(2)} & \cdots & \beta_{\sigma(n)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix} \qquad \text{(W38)}$$

ダミー添字 μ_k に関する縮約を実行しましょう。μ_k は $\{1,2,\cdots n\}$ の全てに渡り、$\lambda_k \in \{1,2,\cdots,n\}$ ですから、$\delta_{\lambda_k\mu_k}$ は μ_k を λ_k に置き代える機能を果たします。従って

$$C_m = (-1)^{l}\binom{n}{l}\frac{1}{n!}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & \lambda_l & \alpha_1 & \cdots & \alpha_m \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_l & \beta_1 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}\prod_{k=1}^{m}A_{\alpha_k\beta_k} \qquad \text{(W39)}$$

（W38）をもう一度用いました。Shyuko記号の縮約公式（33.2）より

$$C_m = (-1)^{l}\binom{n}{l}\frac{1}{n!}\,l!\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}\prod_{k=1}^{m}A_{\alpha_k\beta_k} \qquad \text{(W40)}$$

$\binom{n}{l} = \dfrac{n!}{l!\,m!}$ ですから

$$C_m = (-1)^{l}\frac{n!}{l!\cdot m!}\cdot\frac{1}{n!}\cdot l!\cdot m!\cdot\frac{1}{m!}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m\end{bmatrix}\prod_{k=1}^{m}A_{\alpha_k\beta_k} \qquad \text{(W41)}$$

ここで $d^{(m)}(A)$ の定義式（35.2）より

$$C_m = (-1)^l d^{(m)}(A) \tag{W41}$$

(W35)に(W41)を代入して

$$|A-\lambda I| = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l d^{(n-l)}(A)\lambda^l \tag{W42}$$

Aの次数はnだから

$$|\lambda I - A| = (-1)^n |A-\lambda I| \tag{W43}$$

(W42), (W43)より

$$\begin{aligned}|\lambda I - A| &= \sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} d^{(n-l)}(A)\lambda^l \\ &= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m d^{(m)}(A)\lambda^{n-m}\end{aligned}$$

Q.E.D.

Shyuko記号の2つ目の展開公式を呈示します。

Shyuko記号の展開公式(その2)

$m \geq 2$に対して次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} i & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ j & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \\ &- \sum_{r=1}^{m} \begin{bmatrix} i \\ \beta_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_r \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \\ &+ \sum_{\substack{r,s=1 \\ r\neq s}}^{m} \begin{bmatrix} i \\ \beta_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_r \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_s & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \cancel{\alpha_s} & \cdots & \alpha_m \\ \beta_r & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \cancel{\beta_s} & \cdots & \beta_m \end{bmatrix}\end{aligned}$$

定理(38)

この定理の証明では、Shyuko記号の定義(27)から自明な次の恒等式も用います。

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \tag{W44}$$

【P132】Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

（38）の証明．

定理（32）の展開公式より

$$
\begin{bmatrix} i & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ j & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix}
- \sum_{r=1}^{m} \begin{bmatrix} \alpha_r \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & i & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_r & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \qquad \text{(W45)}
$$

右辺才2項のShyuko記号は、定理（32）をもう一度用いると

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & i & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_r & \cdots & \beta_m \end{bmatrix}
&= \begin{bmatrix} i & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \alpha_m \\ \beta_r & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \beta_r & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \beta_m \\ i & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \beta_r \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \beta_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \\
&\quad - \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq r}}^{m} \begin{bmatrix} \beta_s \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \beta_r & \cdots & \beta_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \alpha_s & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \beta_r \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \beta_m \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \\
&\quad - \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq r}}^{m} \begin{bmatrix} \beta_s \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_r & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \cancel{\beta_s} & \cdots & \beta_m \\ \alpha_s & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \cancel{\alpha_s} & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} i \\ \beta_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \\
&\quad - \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq r}}^{m} \begin{bmatrix} i \\ \beta_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_s & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \cancel{\alpha_s} & \cdots & \alpha_m \\ \beta_r & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \cancel{\beta_s} & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \qquad \text{(W46)}
\end{aligned}
$$

（W45）に（W46）を代入すれば（38）が得られる。　　Q.E.D.

定理（32）は1列目に関して余因子展開して得られたのであった。上記の証明では、さらに（W44）つまり転置行列に変換して、1列目に関して余因子展開し、その後さらに転置行列に変換しているのだから、2度目の展開は行に関して余因子展開したことになります。

行列式のShyuk記号を用いた表現 定理(34)からヒント(Hint)を得て、行列の一般化としての$d^{(m)}(\cdot)$を定義したと同様に、Shyuko記号を用いた次のような行列を考えるのは、自然な成行き(Development)といえます。

$D^{(m)}(A)$の定義

n次正方行列Aと非負整数mに対して、行列$D^{(m)}(A) = (D^{(m)}_{ij}(A))$を次のように定める。

$$D^{(0)}(A) = I \qquad .1)$$

$m \geq 1$に対して

$$D^{(m)}_{ij}(A) = \frac{1}{m!}\begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ i & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \prod_{k=1}^{m} A_{\alpha_k \beta_k} \qquad .2)$$

これより直ちに

$$D^{(1)}(A) = d^{(1)}(A)I - d^{(0)}(A)A \qquad .3)$$

$$D^{(m)}(A) = O \quad (m \geq n) \qquad .4)$$

定義(39)

.1)のIはn次の単位行列です。また.4)のOは全ての成分が0のn次正方行列です。

$i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ですから$D^{(m)}(A)$は$n$次正方行列です。.2)のダミー添字$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$は全て、$\{1, 2, 3 \cdots, n\}$に渡って和をとることを意味します。また繰り返してしまいました。$d^{(m)}(\cdot)$の定義と$D^{(m)}(\cdot)$の定義はよく似てますね。

.2)の定義では$\begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \alpha_2 \cdots \alpha_m \\ i & \beta_1 & \beta_2 \cdots \beta_m \end{bmatrix}$を用いていますが、$\begin{bmatrix} i & \alpha_1 & \alpha_2 \cdots \alpha_m \\ j & \beta_1 & \beta_2 \cdots \beta_m \end{bmatrix}$を用いた方が自然な気がしますが、そうすると.3)の右辺にはAそのものでは無く${}^tA$が出現することになります。その方が不自然です。

定義(39)も定義+αです。αは.3), .4)です。自明と云いたいところですが説明(証明)しましょう。

【P134】 Shyuko記号とCayley-Hamiltonの定理（続き）

$$D_{ij}^{(1)}(A) = \frac{1}{1!}\begin{bmatrix} j & \alpha \\ i & \beta \end{bmatrix} A_{\alpha\beta}$$

$$= (\delta_{ji}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{j\beta}\delta_{\alpha i}) A_{\alpha\beta}$$

$$= (\delta_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta})\delta_{ji} - A_{ij}$$

$$= \mathrm{tr}A\,\delta_{ij} - A_{ij} = d^{(1)}(A)\delta_{ij} - d^{(0)}(A)A_{ij} \quad (W47)$$

$D^{(m)}(A) = 0 \quad (m \geq n)$ が成り立つのは、P127で $d^{(m)}(A) = 0 \quad (m > n)$ を証明したときと同じ理屈です。つまり全てのShyuko記号 $\begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ i & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix}$ が0だからです。

$d^{(m)}(AB) = d^{(m)}(BA)$ ですが、一般に $D^{(m)}(AB) \neq D^{(m)}(BA)$ です。これは、.3) から明らかです。残念でした。その代わりと云っては何ですが、$D^{(m)}(A)$ は次式を満たします。

$m \geq 2$ に対して

$$D^{(m)}(A) = d^{(m)}(A)I - d^{(m-1)}(A)A + AD^{(m-2)}(A)A \qquad \text{定理}(40)$$

証明）

Shyuko記号の展開公式(38)を用います。D_{ij}^{m} の定義(39.2)より

$$D_{ij}^{(m)}(A) = \frac{1}{m!}\begin{bmatrix} j & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ i & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \prod_{k=1}^{m} A_{\alpha_k\beta_k}$$

$$= \frac{1}{m!}\begin{bmatrix} j \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} \prod_{k=1}^{m} A_{\alpha_k\beta_k}$$

$$- \frac{1}{m!}\sum_{r=1}^{m}\begin{bmatrix} j \\ \beta_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_r \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} A_{\alpha_r\beta_r} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{m} A_{\alpha_k\beta_k}$$

$$+ \frac{1}{m!}\sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{m}\begin{bmatrix} j \\ \beta_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_r \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_s & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cancel{\alpha_r} & \cdots & \cancel{\alpha_s} & \cdots & \alpha_m \\ \beta_r & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \cancel{\beta_r} & \cdots & \cancel{\beta_s} & \cdots & \beta_m \end{bmatrix} A_{\alpha_r\beta_r} A_{\alpha_s\beta_s} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq r,s}}^{m} A_{\alpha_k\beta_k}$$

$$D^{(m)}_{ij}(A) = \frac{1}{m!}\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m\\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_m\end{bmatrix}\prod_{k=1}^{m}A_{\alpha_k\beta_k}\delta_{ij}$$

$$-\frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{(m-1)!}\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2\cdots\cancel{\alpha_r}\cdots\alpha_m\\ \beta_1\beta_2\cdots\cancel{\beta_r}\cdots\beta_m\end{bmatrix}\prod_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{m}A_{\alpha_k\beta_k}A_{ij}$$

$$+A_{i\beta}\frac{1}{m(m-1)}\sum_{\substack{r,s=1\\r\neq s}}^{m}\frac{1}{(m-2)!}\begin{bmatrix}\alpha\ \alpha_1\alpha_2\cdots\cancel{\alpha_r}\cdots\cancel{\alpha_s}\cdots\alpha_m\\ \beta\ \beta_1\beta_2\cdots\cancel{\beta_r}\cdots\cancel{\beta_s}\cdots\beta_m\end{bmatrix}\prod_{\substack{k=1\\k\neq r,s}}^{m}A_{\alpha_k\beta_k}A_{\alpha j}$$

$$= d^{(m)}(A)\delta_{ij} - \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}d^{(m-1)}(A)A_{ij} + A_{i\beta}\frac{1}{m(m-1)}\sum_{\substack{r,s=1\\r\neq s}}D^{(m-2)}_{\beta\alpha}(A)A_{\alpha j}$$

$$= d^{(m)}(A)\delta_{ij} - d^{(m-1)}(A)A_{ij} + A_{i\beta}D^{(m-2)}_{\beta\alpha}(A)A_{\alpha j} \qquad \text{Q.E.D.}$$

(39.1), (39.3), (40)を用いて幾つかのmについて$D^{(m)}(A)$を書き下してみよう。$D^{(0)}(A)$, $D^{(1)}(A)$も再記しよう。

$$D^{(0)}(A) = d^{(0)}(A)I \qquad (W48.0)$$

$$D^{(1)}(A) = d^{(1)}(A)I - d^{(0)}(A)A \qquad (W48.1)$$

$$\begin{aligned}D^{(2)}(A) &= d^{(2)}(A)I - d^{(1)}(A)A + AD^{(0)}(A)A\\ &= d^{(2)}(A)I - d^{(1)}(A)A + d^{(0)}(A)A^2 \qquad (W48.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^{(3)}(A) &= d^{(3)}(A)I - d^{(2)}(A)A + AD^{(1)}(A)A\\ &= d^{(3)}(A)I - d^{(2)}(A)A + A(d^{(1)}(A)I - d^{(0)}(A)A)A\\ &= d^{(3)}(A)I - d^{(2)}(A)A + d^{(1)}A^2 - d^{(0)}(A)A^3 \qquad (W48.3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^{(4)}(A) &= d^{(4)}(A)I - d^{(3)}(A)A\\ &\quad + A(d^{(2)}(A)I - d^{(1)}(A)A + d^{(0)}(A)A^2)A\\ &= d^{(4)}(A)I - d^{(3)}(A)A\\ &\quad + d^{(2)}(A)A^2 - d^{(1)}(A)A^3 + d^{(0)}(A)A^4 \qquad (W48.4)\end{aligned}$$

これらから、一般に次式が成り立つはずです。

$D^{(m)}(A)$の展開公式

$$D^{(m)}(A) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r d^{(m-r)}(A) A^r \qquad \text{定理(41)}$$

証明）

$m=0, 1$のときは成り立ちますから、$m=k$のときに成り立てば$m=k+2$のときも成り立つことを示せば良い。$m=k$のとき(41)が成り立つと仮定します。

定理(40)より、

$$D^{(k+2)}(A) = d^{(k+2)}(A) I - d^{(k+1)}(A) A + A D^{(k)}(A) A \qquad \text{(W49)}$$

帰納法の仮定より

$$D^{(k)}(A) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r d^{(k-r)}(A) A^r \qquad \text{(W50)}$$

(W49)に(W50)を代入すると

$$\begin{aligned}
D^{(k+2)}(A) &= d^{(k+2)}(A) I - d^{(k+1)}(A) A + A\left(\sum_{r=0}^{k} (-1)^r d^{(k-r)}(A) A^r\right) A \\
&= d^{(k+2)}(A) I - d^{(k+1)}(A) A + \sum_{r=0}^{k} (-1)^r d^{(k-r)}(A) A^{r+2} \\
&= d^{(k+2)}(A) I - d^{(k+1)}(A) A + \sum_{s=2}^{k+2} (-1)^{s-2} d^{(k+2-s)}(A) A^s \\
&= \sum_{s=0}^{k+2} (-1)^s d^{(k+2-s)}(A) A^s
\end{aligned}$$

Q.E.D.

(39.4)より$D^{(n)}(A) = 0$ですから、(41)の左辺を0とし、右辺のmをnとし、さらに両辺に$(-1)^n$を掛ければ次式が得られます。

任意のn次正方行列Aに対して次式が成り立つ。

$$0 = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m d^{(m)}(A) A^{n-m} \qquad \text{定理(42)}$$

定理(37)と定理(42)を見比べて下さい。次式が得られます。

Cayley-Hamiltonの定理

任意のn次正方行列Aに対して、その固有値を$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$とするとき、次式が成り立つ。

$$O = \prod_{k=1}^{n}(A - \lambda_k I) \qquad \text{定理(43)}$$

僕の持っている本『100人の数学者 古代ギリシャから現代まで』数学セミナー増刊 1989によると、Hamiltonはやはり、ハミルトンの正準形式、ハミルトニアンのHamiltonで、Cayley-Hamiltonの定理については4元数の研究で$n=3$の場合について論考したそうです。Cayleyが一般のnの場合について定式化したとのこと。Cayleyは『行列論』を著わしていて、線形代数の創始者とも云うべき人だそうです。またCayleyは8元数も研究しています。彼らの時代の主な数学者たちを、『100人の数学者』の中から僕なりに抽出してみました。

- Carl Fredrich Gauss (1777-1855)
- Siméon Denis Poissn (1781-1840)
- Augstin Louis Cauchy (1789-1857)
- Augustus Ferdinand Möbius (1790-1868)
- Nikolaĭ Ivanovič Lobačevskiĭ (1793-1856)
- Niels Henrik Abel (1802-1829)
- Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)
- William Rowan Hamilton (1805-1865)
- Herman Günther Grassmann (1809-1877)
- Évariste Galouis (1811-1832)
- George Boole (1815-1864)
- Karl Weierstrass (1815-1897)
- Arthur Cayley (1821-1895)
- Charles Hermite (1822-1901)
- Leopold Kronecker (1823-1891)
- Georg Friedrich B. Riemann (1826-1866)
- Marius Sophus Lie (1842-1899)
- Georg Cantor (1845-1918)

1800

1900

Leonhald Euler (1707-1783)

fig.107.5

● 小休止：酸漿（ほおづき） Ground Cherry ナス科の多年草

fig. 108