● n次元平行体の呈示

n次元単体を研究するつもりならば、それと密接な関係にある（be closely related）n次元平行体（n Dimentionl Parallelix）についても論じる必要が有ります。

"n次元単体の呈示"（P001～P028）では、n次元単体の定義は、敢て行いませんでしたが、今回は、n次元平行体の定義（の幾つか）を示すつもりです。n次元平行体とn次元単体が密接な関係にあるというのは、例えば、次の命題が成り立つと思われるからです。

> 縮退していないn次元平行体は、n!個のn次元単体に等体積分割することができる。分割されたn!個のどの単体のn+1個の頂点はどれも、2^n個有るn次元平行体の頂点である。
>
> 予想（3）

この命題はまだ証明されていません。当文書の主題の1つと云えます。

0次元平行体はただ1点だけから成る幾何学的実体です。1次元平行体は線分です。ここまでは単体と一致します。0!＝1，1!＝1です。

2次元平行体は平行4辺形のことです。これが、2次元単体つまり3角形に2等分できるのは自明です（fig009.1）。3次元平行体は平行6面体のことです。これが3!＝6個の3次元単体つまり4面体に等体積分割できることは、fig.018で例示しました。n≧4の場合についてはまだ証明も分割例も得られていません。幾つかのnについて、n次元平行体を当紙面に射影した絵を描きましょう。ただし辺と頂点のみが見え、面や内点は透明（Transparent）だとします。また辺の前後関係は表現しないことにします。

（次ページへ続く）

【P081】n次元平行体の呈示（続き）

$n=0$

fig.083.0

$n=1$

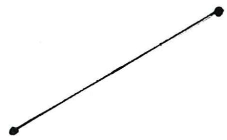


fig.083.1

$n=2$

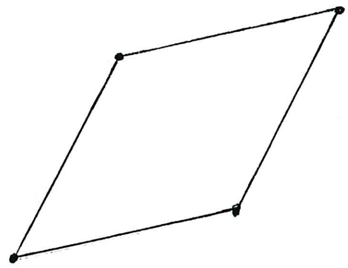


fig.083.2

$n=3$

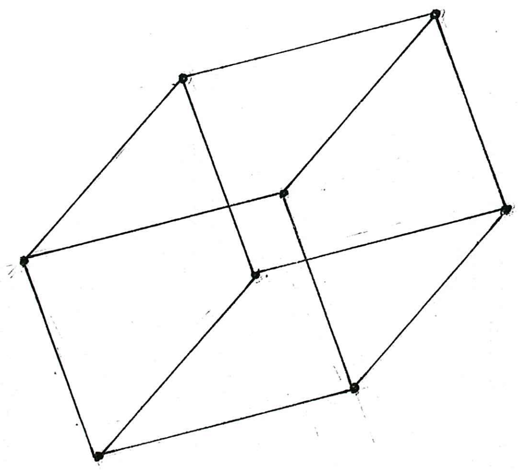


fig.083.3

$n=4$

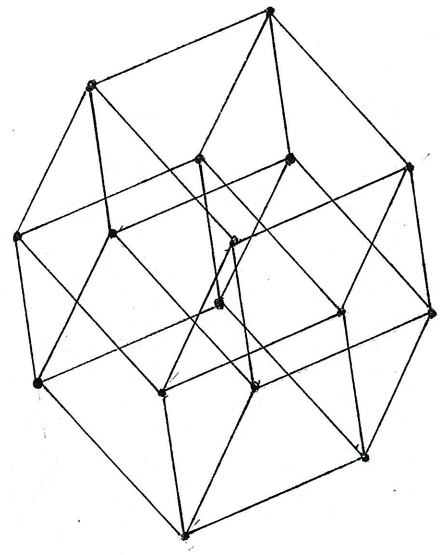


fig.083.4

$n=5$

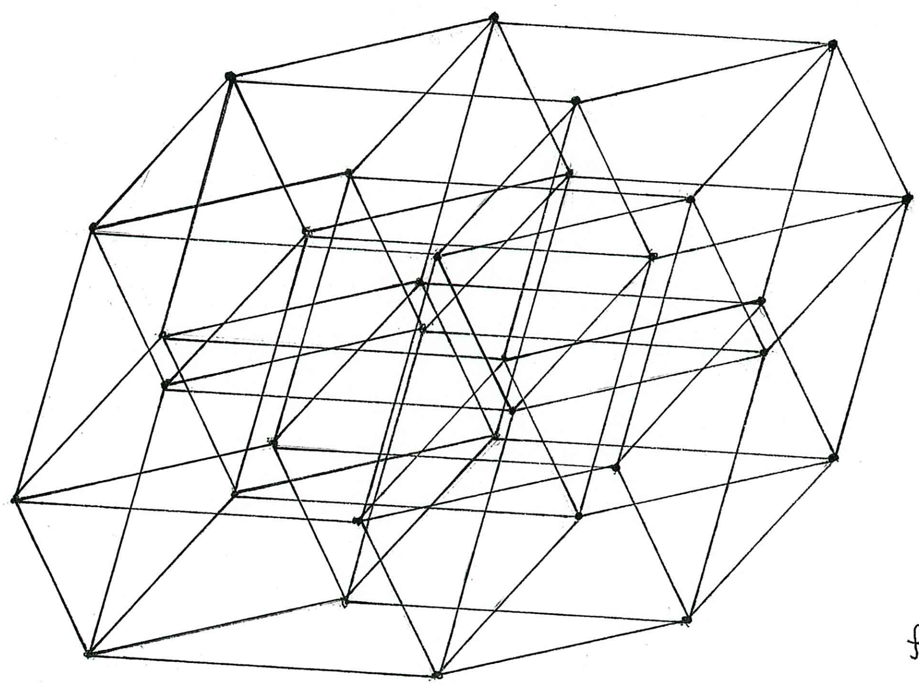
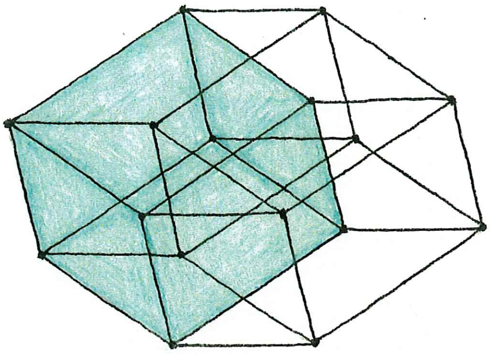


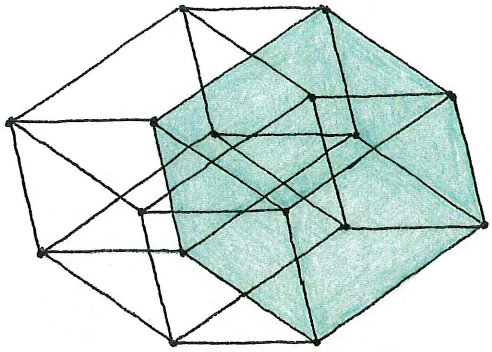
fig.083.5

【P082】8月30日(日) n次元平行体の呈示(続き)

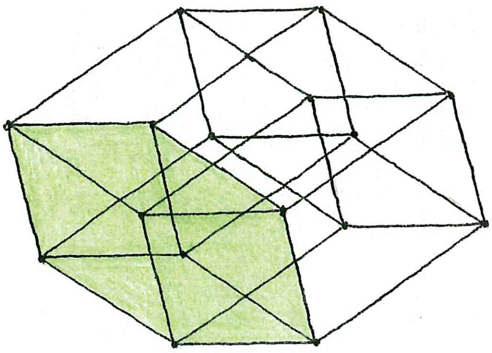
・n次元平行体の頂点の個数は 2^n 個で、各頂点を端点として共有する辺の個数はn個ですから、辺の個数は全部で $2^{n-1}\cdot n$ 個です。$(n-1)$次元の超表面は$(n-1)$次元平行体で、その個数は$2n$個なはずです。$n=1$, $n=2$, $n=3$ の場合は確かに$2n$個です。一般のnについて$2n$個なのは、n次元正規直行座標系での、原点に頂点の1つが一致し、角辺が座標軸のいずれかと平行な、n次元単位立方体を考えてみれば明らかです? 互いに平行なペアのn組から成ります。$n=4$ の場合について確かめてみましょう。



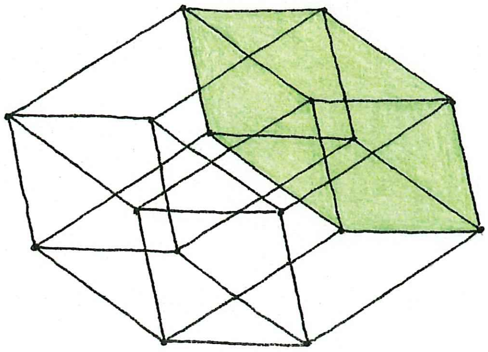
.1



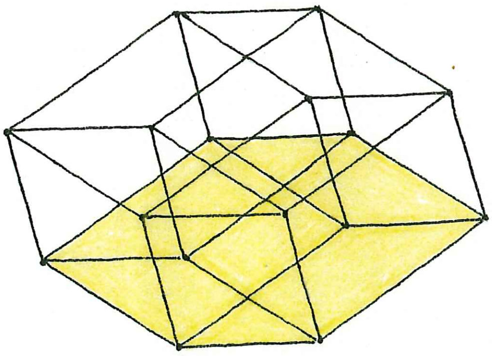
.2



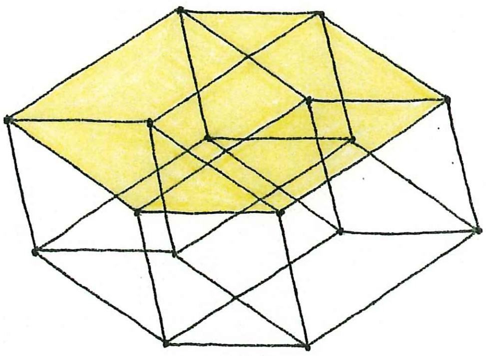
.3



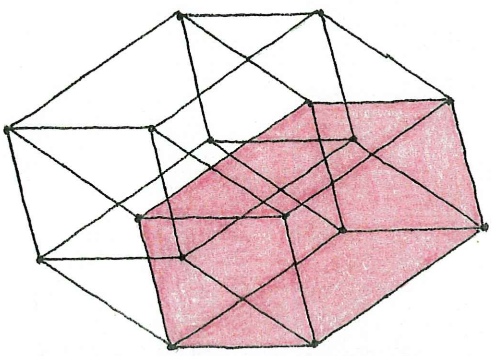
.4



.5



.6



.7

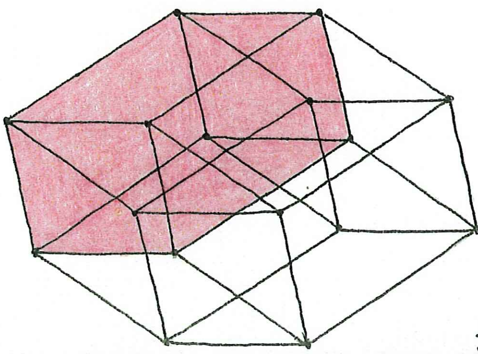


fig.084.8

【PQ83】8月31日(月) n次元平行体の呈示(続き)

6次元平行体の2次元平面への射影図を描きました。対称性が現われることを目的として、外周が正12辺形と成るように選びました。それが原因で、またn=6が偶数であることも原因となっているからか、多重頂点や多重辺、あるいは、2つの辺の1部が重なった線分が現われました。◉は2重頂点で、◎は4重頂点です。また、青色で強調した線分は、2重に重なった辺や、2つの辺の1部が重なった線分です。

正3角形，正方形，正6角形，正12角が複数個出現しました。特に正3角形、正方形の個数は多いですね。3，4，6，12はどれも12=2nの約数です。面白いですね。どうしてなのでしょうか？ 正5角形や正7角形などは出現しません。

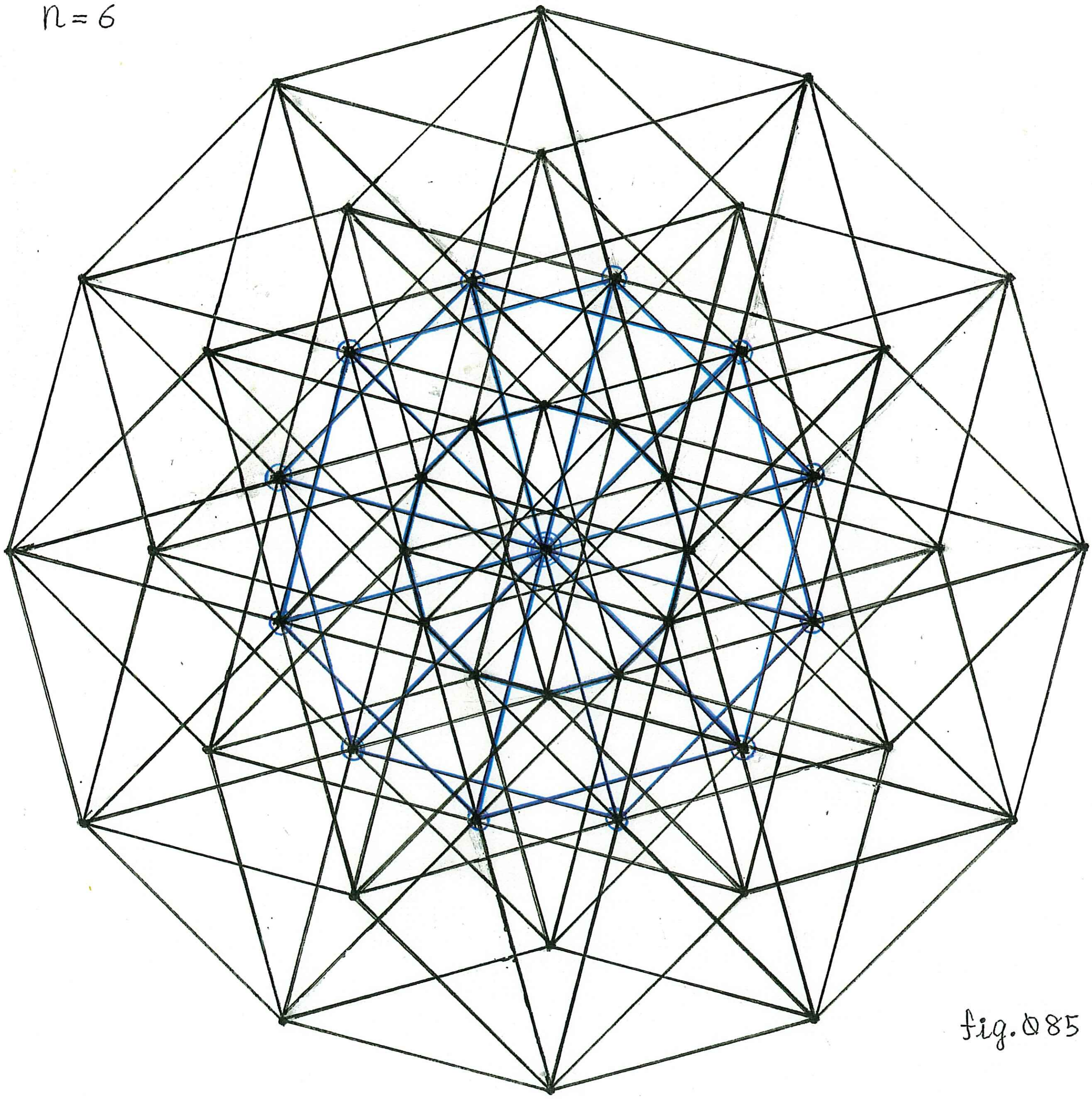


fig.Q85

きれいな図形ですね。まるでよくカットされたダイヤモンド(Diamond)の様に見えます。
7次元平行体の場合はどんな図形になるのでしょう。

【P084】9月1日(火) n次元平行体の呈示(続き)

7次元平行体の2次元平面への射影図を描きました。fig.085と同様に対称性が現われることを目的として、外周が正14角形と成るように選びました。頂点の多重点は中心の2重点だけです。また、辺の多重線分は全て、2つの辺の1部が重なってできる線分です。2つの辺がまるごと重なった線分は一本も存在しません。

正多角形は正14角形しか現われませんでした。正7角形は存在しません。ただし、正14角形は2種類存在します。どちらも複数個存在します。もう一種類の正14角形は、僕が初めて気付いた図形です。とても不思議な正14角形です。何と、自分自身と交わり、中心の周りを3周して初めて閉じるのです。

n = 7

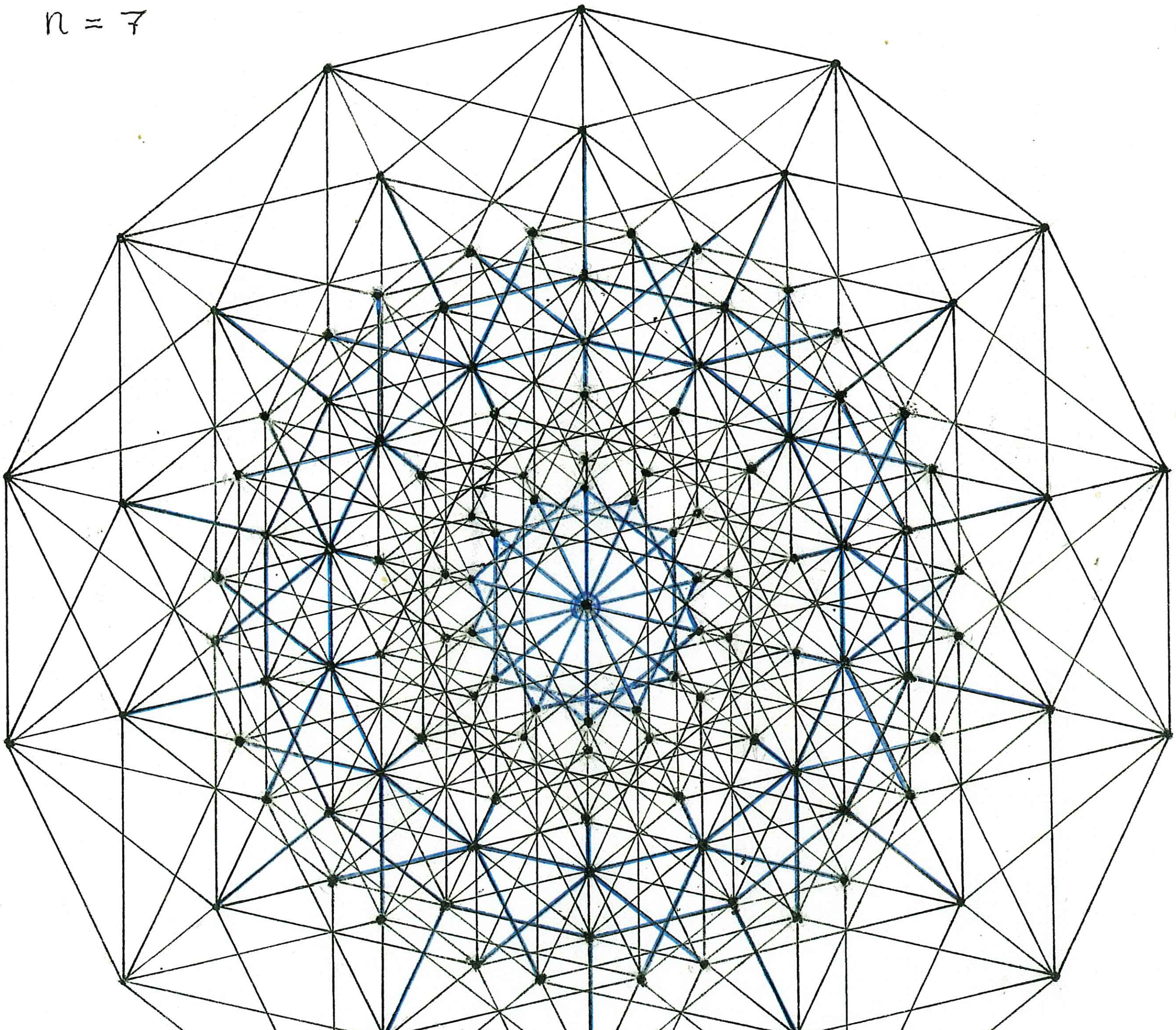


fig.086

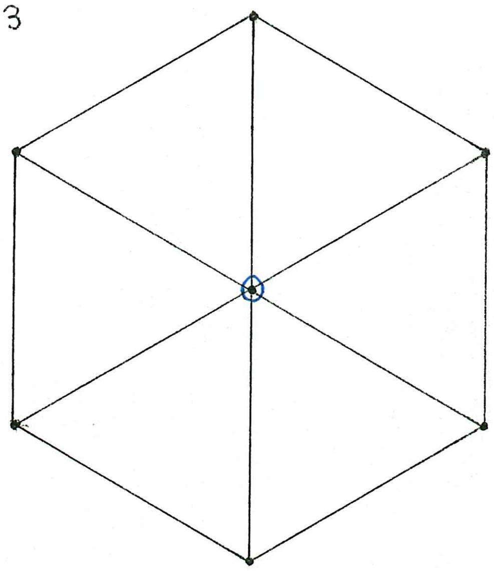
・たとえば、中心に最も近い14個の頂点からなる正14角形(青色)がそうです。これについては、それが解りやすいように後で作図して示すつもりです。

【P085】 9月4日（金） n次元平行体の呈示（続き）

fig.085 や fig.086 を、n次元平行体を2次元空間（平面）に射影した図形としてではなく、単に2次元の図形だと見做した場合の名前を付けましょう。n次光輝体（n Degree Brilliantix）と呼ぶことにします。fig.085は6次光輝体、fig.086は7次光輝体です。"光輝体"も"Brilliantix"も僕の造語です。こういう名前を選んだのは、6次光輝体がBrilliant Cutされた Diamond を想起させたからです。n次光輝体の外周は正2n角形から成ります。正2n角形が定まれば、n次光輝体は一意的に定まります。

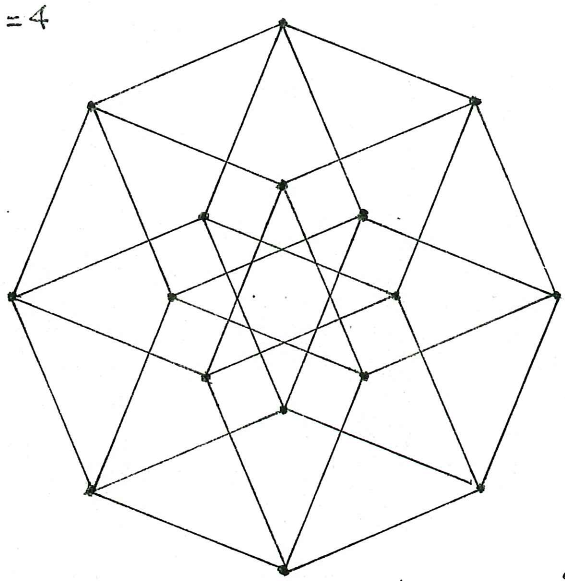
n＝3，4，5 の場合の光輝体も作図してみましょう。

n＝3



.3

n＝4



.4

n＝5

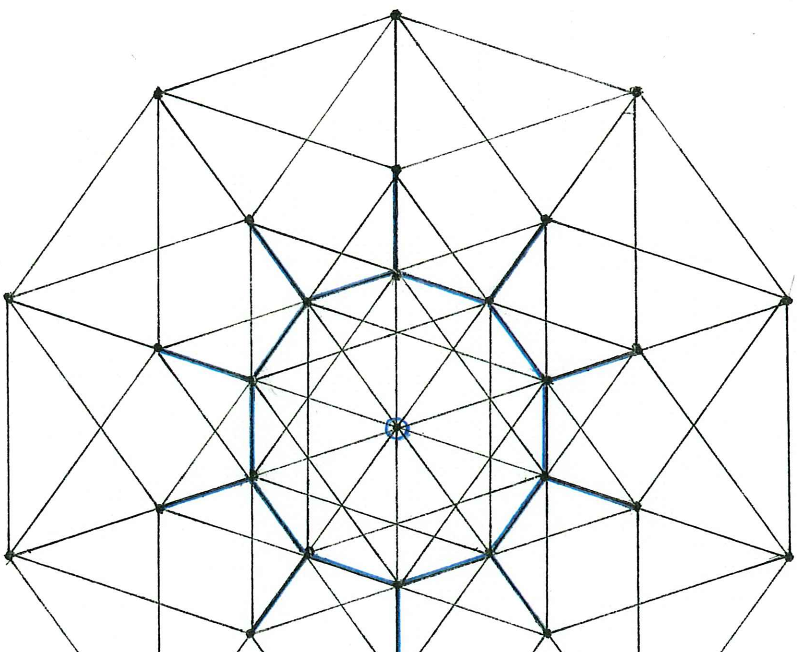


fig.087.5

【P086】n次元平行体の呈示（続き）

中心の周りをm周して初めて閉じる正n角形をm重正n角形と呼ぶことにしましょう。mやnを明示しないで総称する場合は、単に多重正多角形と呼びましょう。

4次光輝体には3重正8角形が、5次光輝体には3重正10角形が出現しました。

実は、多重多角形は当文書に既に出現していたのです。n次放射体です。ほとんどのn次放射体にはいくつもの多重正多角形が隠れています。僕が気付かなかっただけです。特に極小放射体は、ほとんどが多重正多角形そのものです。

幾つかの多重多角形を、それと解るように作図してみましょう。

2重正5角形

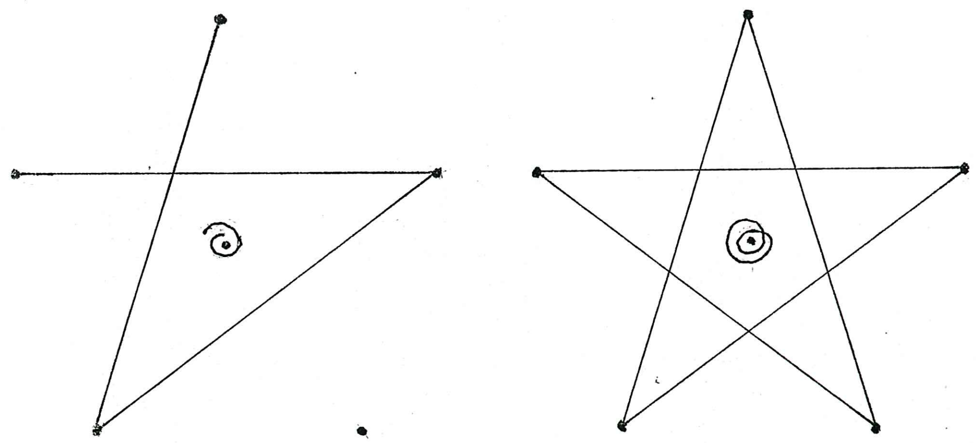


fig.088

2重正7角形

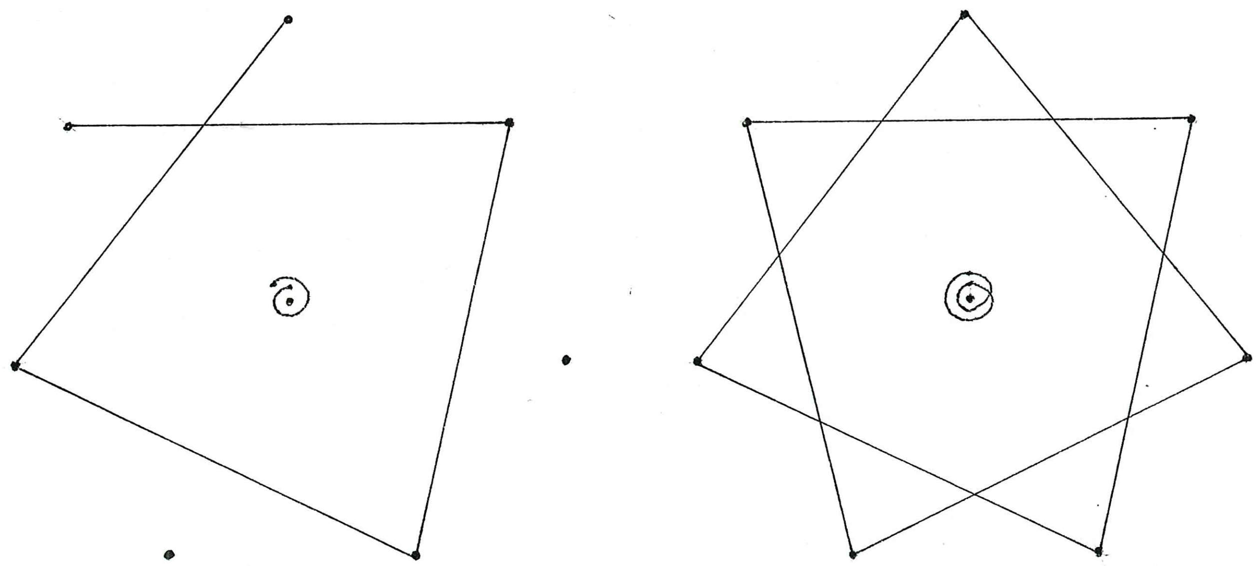


fig.089

【P087】9月5日(土) n次元平行体の呈示(続き)

3重正7角形

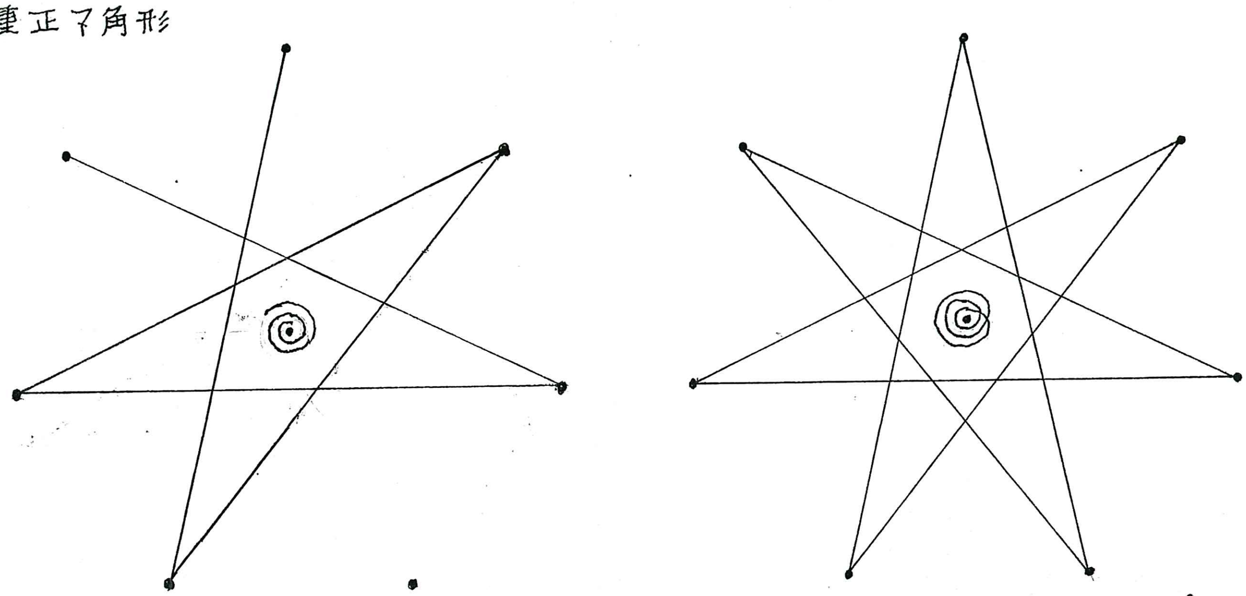


fig.090

3重正8角形

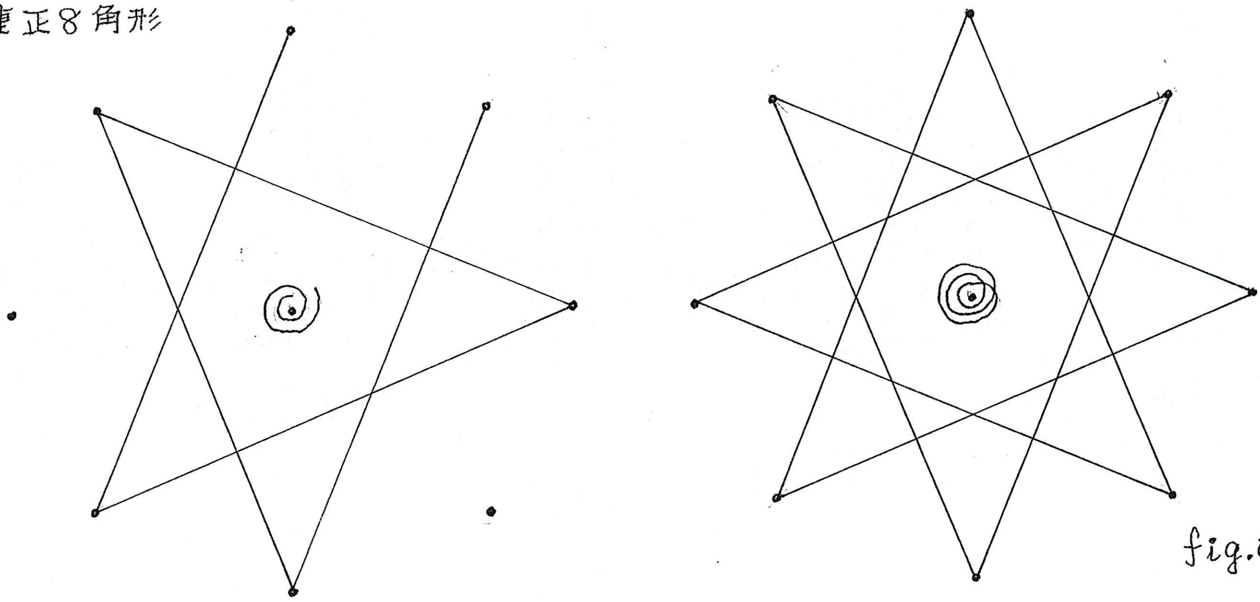


fig.091

2重正9角形

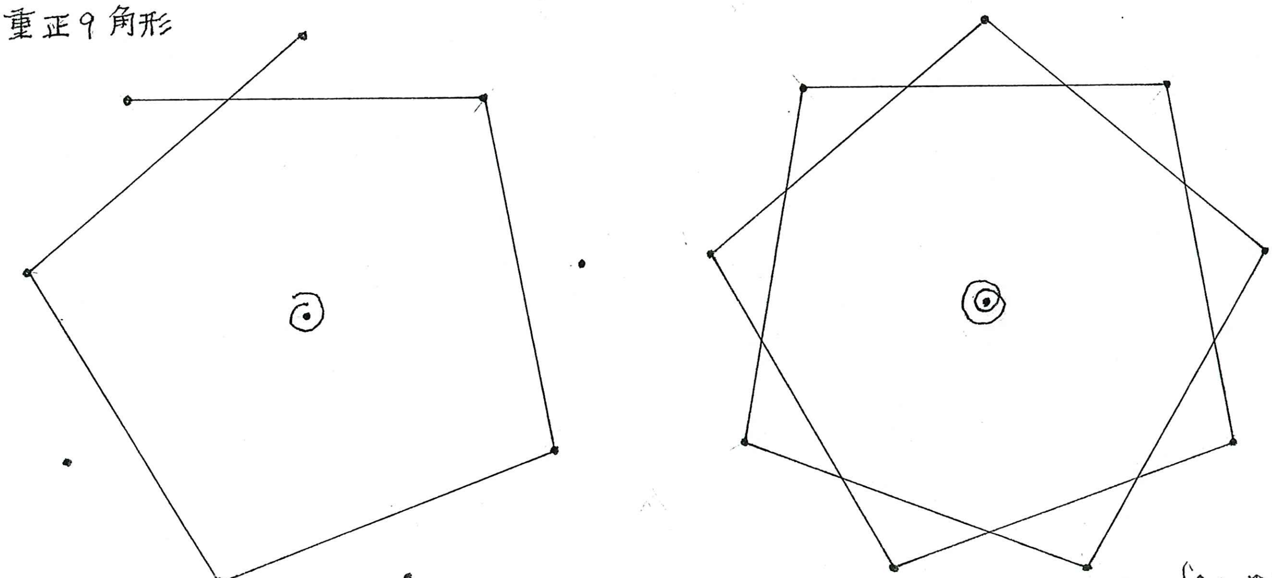


fig.092

【P088】 n次元平行体の呈示（続き）

4重正9角形

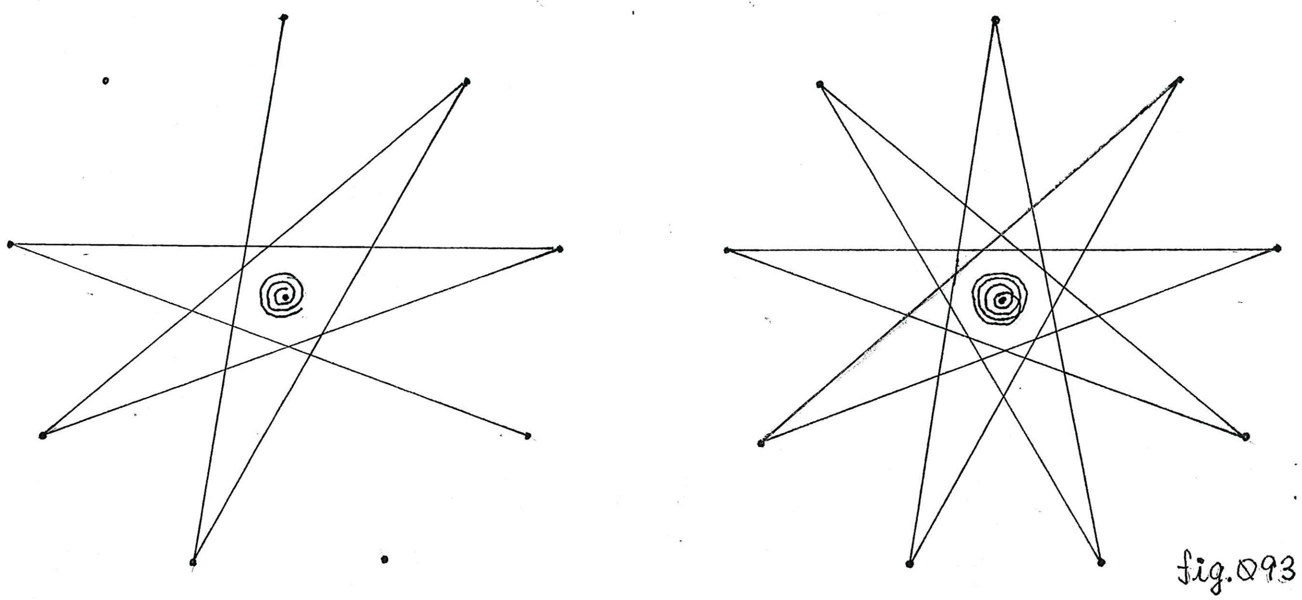


fig.093

3重正10角形

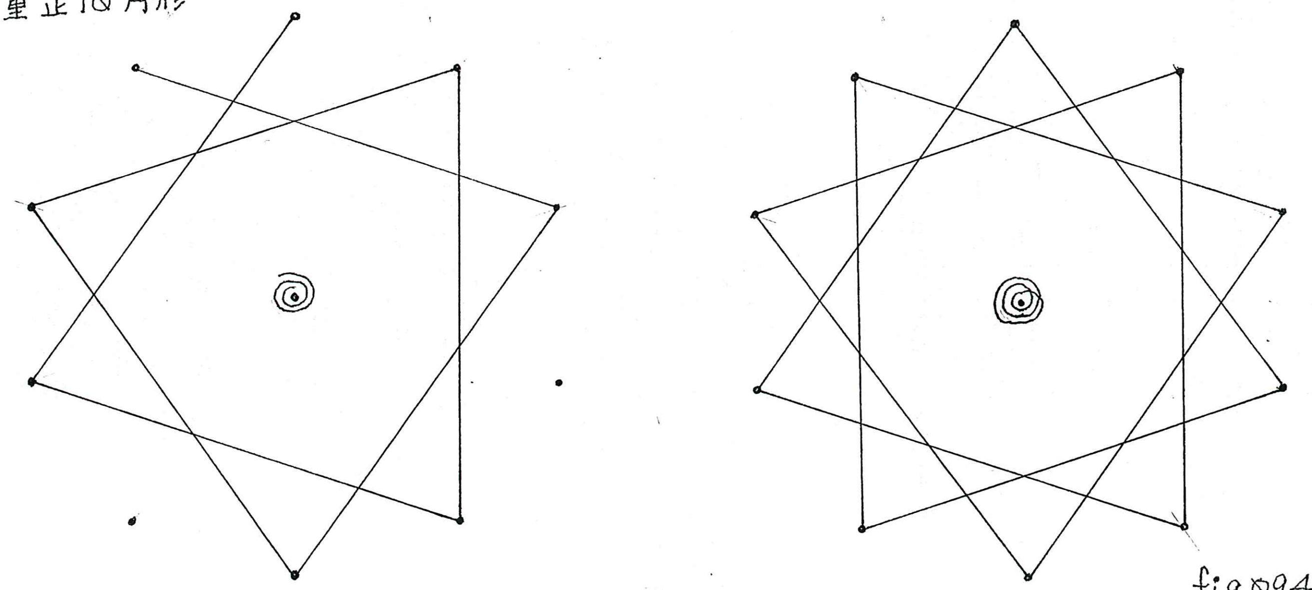


fig.094

2重正11角形

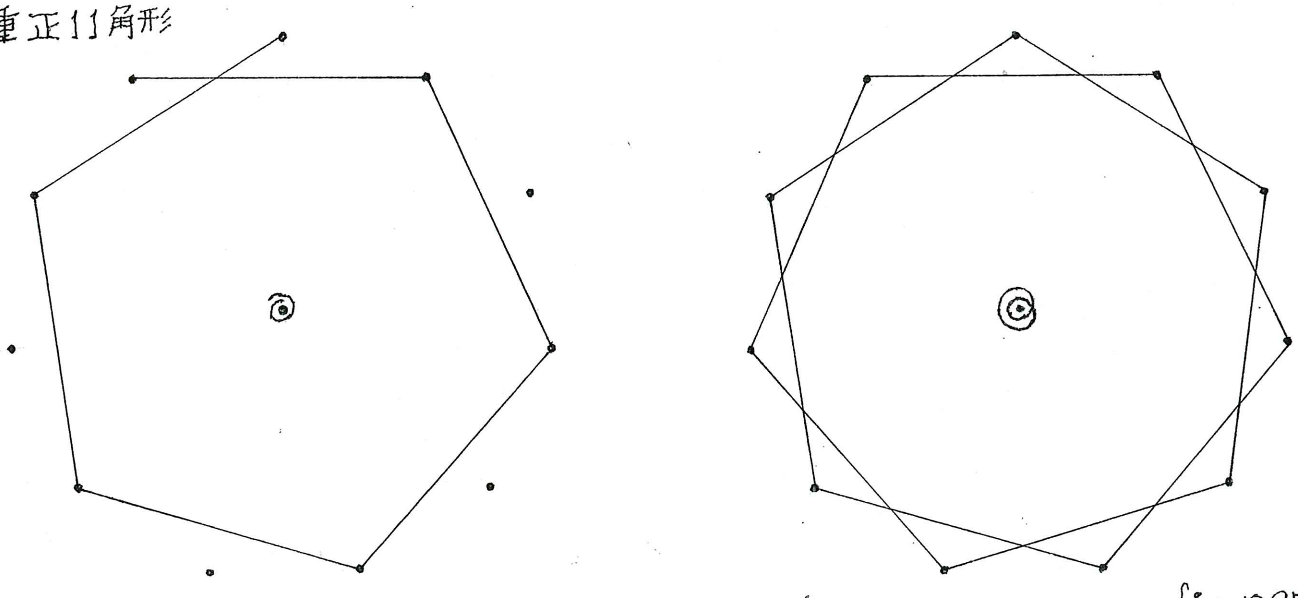


fig.095

【P089】9月6日(日) n次元平行体の呈示(続き)

3重正11角形

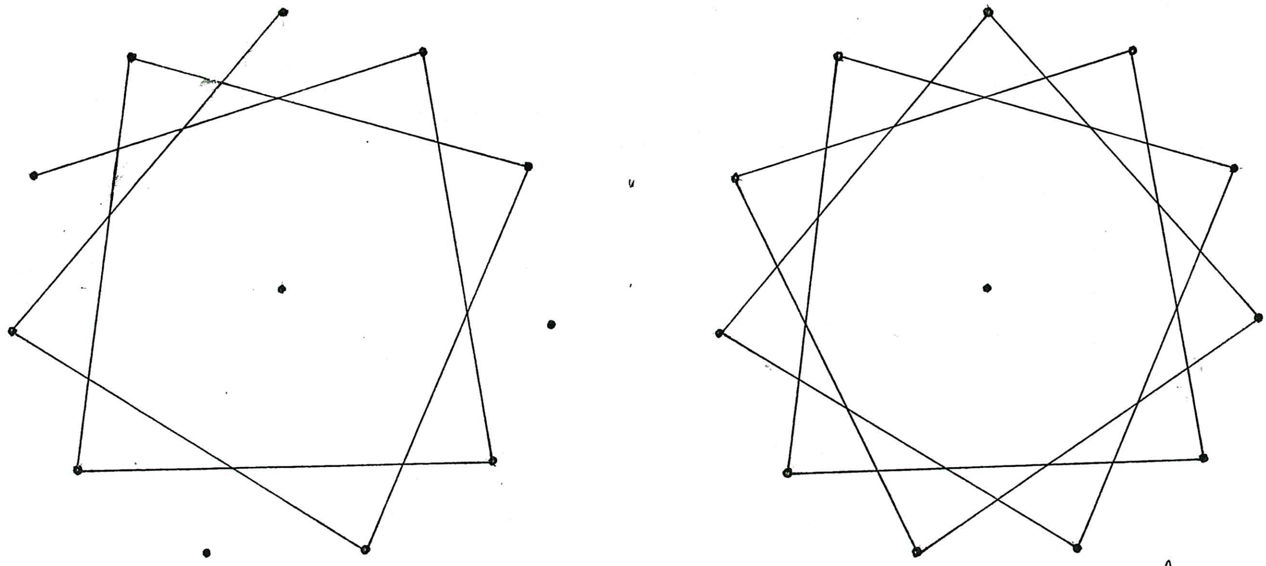


fig.096

4重正11角形

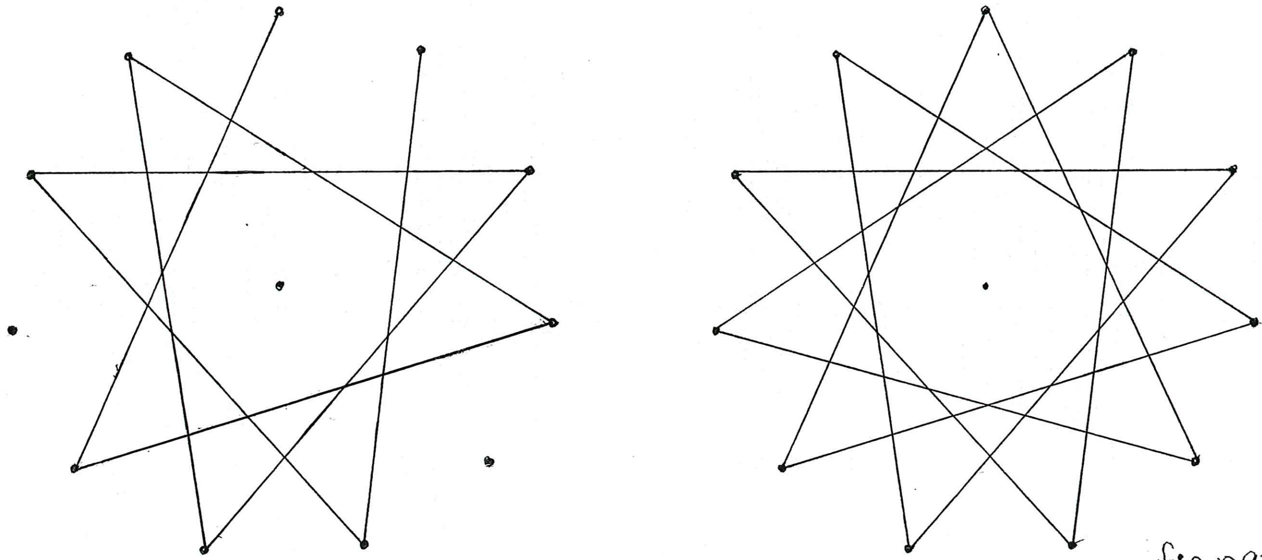


fig.097

5重正11角形

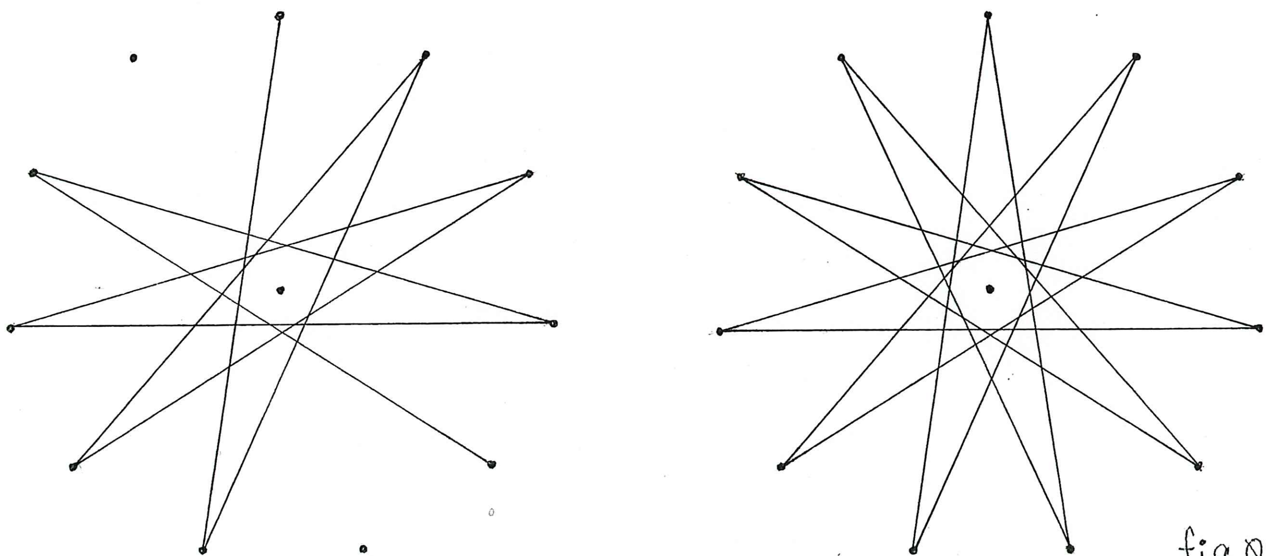


fig.098

5重正12角形

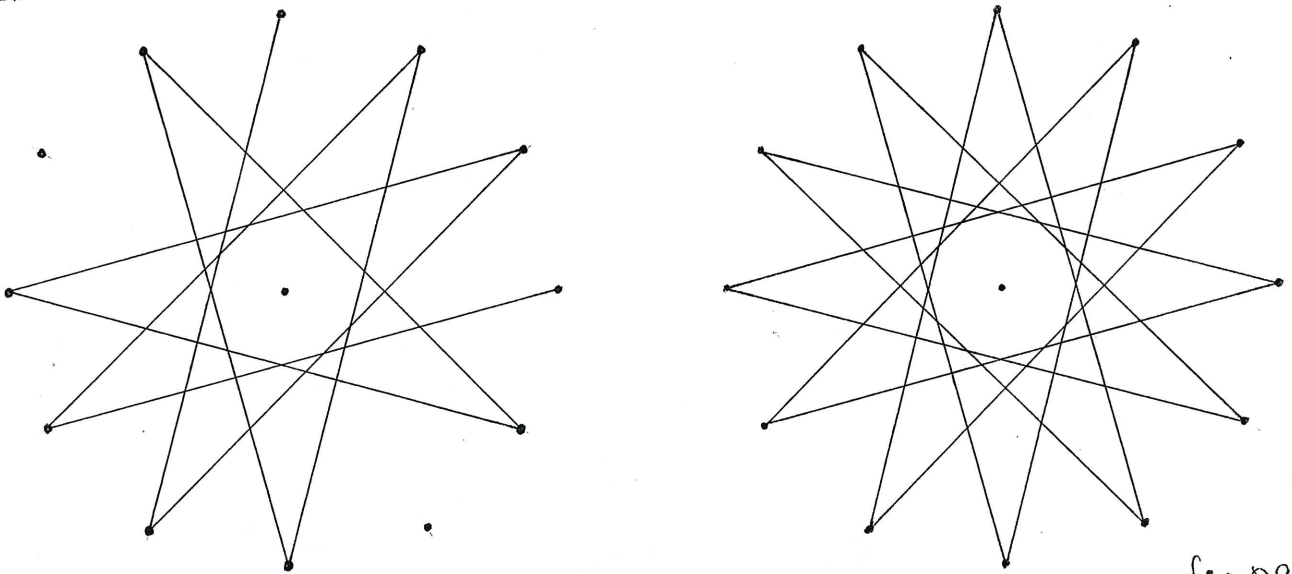


fig.099

作図はこれぐらいにしましょう。唯、正13角形の場合には、2重, 3重, 4重, 5重, 6重の全ての多重正13角形が存在することは、貴方にも明らかですね。一般に、nが素数ならば、2重, …, $(n-1)/2$ 重までの全ての多重正n角形が存在すると思われる。但し、$n \geq 5$ なる素数に関してである。正14角形については、P084で約束し(Promise)たので作図します。3重と5重の2種類存在します。

3重正14角形

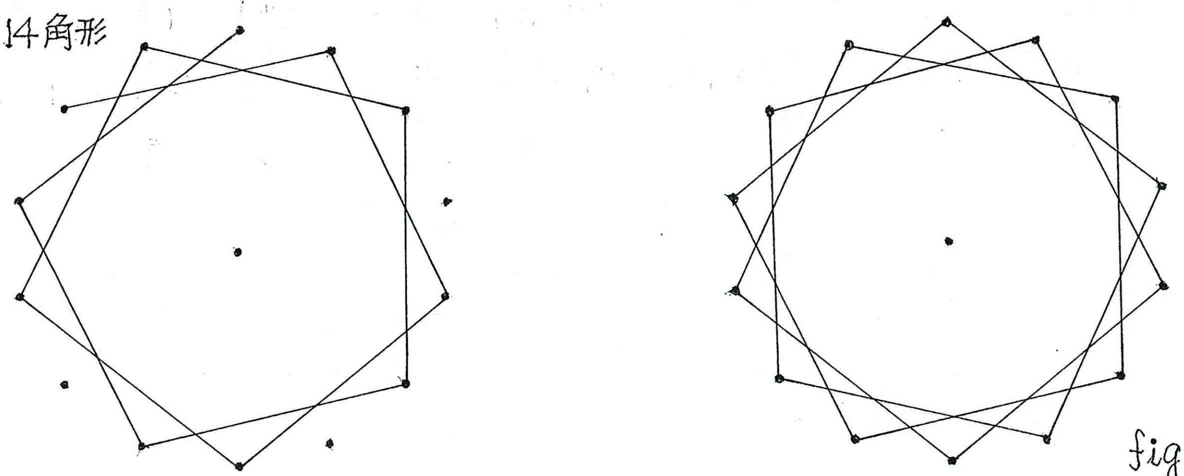


fig.100

5重正14角形

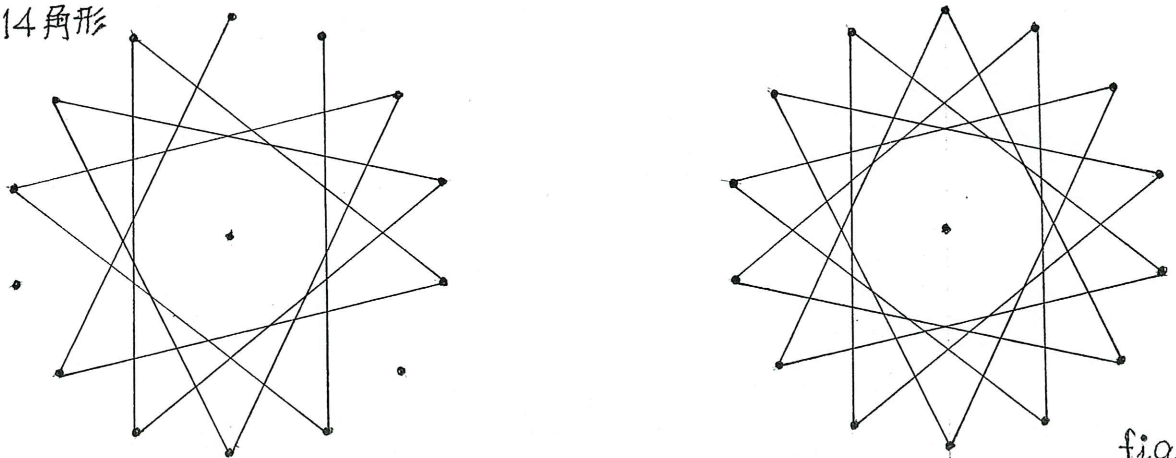


fig.101

【PQ91】n次元平行体の呈示（続き）

多重多角形の定量的な議論に関しては、例えば"多重正多角形の整数論"などを主題として、後で、考察したいと思っています。また、n次光輝体と、2n次放射体と、多重正2n角形との関係についても、議論する必要が有ると思っています。今は、平行体の話題に戻りましょう。

n次元平行体を次のように定義します。

n次元平行体の定義（その1）

n次元またはそれ以上のユークリッド空間R^N上の、1点A_0と、n個のベクトルの集合$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$に対して、

$$P_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) = \Big\{ x \in R^N ;\ x = A_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i v_i,\quad 0 \leq x_i \leq 1\ (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \Big\}$$

で定まる、R^Nの部分集合P_nのことを、**n次元平行体**と呼ぶ。上記の定義における、点A_0のことをP_nの**始頂点**と呼び、$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$のことを始頂点$A_0$に関する$P_n$の**平行要素集合**と呼ぶことにする。

$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$が**1次独立**であるとき、$P_n$を**縮退していない**n次元平行体と呼び、そうでないとき、**縮退した**n次元平行体と呼ぶ。

上記の定義式におけるn個のx_iが全て、0または1であるような点のことをP_nの**頂点**と呼ぶ。P_nは**2^n個の頂点**を持つ。始頂点A_0もP_nの頂点の1つである。

定義（4）

上記の定義は僕自身の考えた定義です。"始頂点"も"平行要素集合"も僕の造語です。一般に流布し（Circulate）しているとは思えません。上記の定義には注意が必要です。P_nをユークリッド空間上の集合と述べましたが、ベクトルを用いて定義しているので、厳密には、アファイン空間（Affine Space）上の集合と呼ぶべきです。PQ01で僕は、ユークリッド空間とベクトル空間とアファイン空間を区別しないことにすると述べましたが、今回はその例です。アファイン空間とは、ベクトル空間が付随しているユークリッド空間のことです。(R^n, V^n)とでも記すべき空間です。僕が大学（東北大学）の

教養部時代に習った線形代数学の教科書（和田秀三ら著）では、解析幾何学の章で、アファイン空間の集合としてのn次元平行体のn次元体積を論じています。但し、その定義は1通りだけです。また体積については平行体に特化した、体積を求めるのに都合のいい定義を行っています。これは教科書のページ数に制限があったためと思われます。和田先生の授業ではちゃんと定義していたかも知れません。僕はほとんど授業に出席しませんでしたのでわかりません。反省しています。唯、n次元空間上の集合のn次元体積を一般的に定義するのはとてもヴォリュームを必要とします。僕自身試みましたがまだ完成していません。後で、n次元平行体やn次元単体やn次元球などのn次元体積を論じる予定ですが、n次元体積の一般的定義は行いません。ただただ、読者である貴方の直感に訴えるのみです。

定義（4）の始頂点A_0は、一見すると、他の2^n-1個の頂点たちとは異なる特別な頂点のように見えるかもしれません。しかしそうではありません。下記が成り立つからです。

A_0を始頂点とし$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$を平行要素集合とするn次元平行体を$P_n$とおく。$P_n$の$2^n$個の頂点の中からかってに1点を選び$A_0'$とおく。頂点の定義より$A_0'$は次のように表わされる。

$$A_0' = A_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i v_i \text{ ,} \qquad s_i = 0 \text{ または } 1 \qquad .1)$$

この$s_i\ (i=1, 2, 3, \cdots, n)$に対して$v_i'$を次のように定める。

$$v_i' = \begin{cases} v_i & (s_i = 0 \text{ のとき}) \\ -v_i & (s_i = 1 \text{ のとき}) \end{cases} \qquad .2)$$

このとき、P_nはA_0'を始頂点とし$\{v_1', v_2', v_3', \cdots, v_n'\}$を平行要素集合とするn次元平行体でもある。

定理（5）

（次ページへ続く）

【P093】9月8日（火） n次元平行体の呈示（続き）

（5）を証明しよう。（4）の定義式におけるxは、（5.1）のA'_0を用いると、

$$x = x + A'_0 - A'_0$$
$$= A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + A'_0 - \left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i v_i \right)$$

∴

$$x = A'_0 + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - s_i) v_i \qquad \text{(W1)}$$

そこで、$s_i \ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$に対して、次式で定義される$\sigma_i$, λ'_iを導入する。

$$\sigma_i = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}, \quad \lambda'_i = \begin{cases} \lambda_i & (s_i = 0 \text{ のとき}) \\ 1 - \lambda_i & (s_i = 1 \text{ のとき}) \end{cases} \qquad \text{(W2)}$$

上記のσ_iの定義と、（5.2）のv'_iの定義より、次式が成り立つ。

$$v'_i = \sigma_i v_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad \text{(W4)}$$

またλ'_iの定義より、λ_iが0と1の間のすべての値をとるとき、λ'_iも0と1の間のすべての値をとる。

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \iff 0 \leq \lambda'_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad \text{(W5)}$$

次式が成り立つと仮定しよう。

$$\lambda_i - s_i = \lambda'_i \sigma_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad \text{(W6)}$$

このとき、（W1），（W4）より

$$x = A'_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i (\sigma_i v_i)$$

∴

$$x = A'_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i v'_i \qquad \text{(W7)}$$

（W5），（W7）より、P_nはA'_0を始頂点とし、$\{v'_1, v'_2, v'_3, \cdots, v'_n\}$を平行要素集合とする$n$次元平行体でもあることが証明されたことになる。

【P094】 n次元平行体の呈示（続き）

問題は（W6）である。これを証明すれば（5）が証明されたことになる。2通りの証明を行うことができます。一つ目の方法は、場合分けによる証明方法です。それは下記の通り。それだけ。

s_i	σ_i	λ'_i	$\lambda_i - s_i$	$\lambda'_i \sigma_i$
0	1	λ_i	λ_i	λ_i
1	-1	$1-\lambda_i$	$\lambda_i - 1$	$\lambda_i - 1$

（W8）

もう1つの証明方法は、とても技巧的で、出来の良い証明方法とは云い難いが、ちょっと面白い。σ_i, λ'_i は s_i の1次式として次のように表現できます。

$$\sigma_i = -2s_i + 1 \,, \quad \lambda'_i = (1-2\lambda_i)s_i + \lambda_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad (W9)$$

また、次が成り立ちます。

$$s_i = 0 \text{ または } 1 \iff s_i^2 = s_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad (W10)$$

（W9），（W10）より、

$$\begin{aligned}
\lambda'_i \sigma_i &= ((1-2\lambda_i)s_i + \lambda_i)(-2s_i + 1) \\
&= (-2 + 4\lambda_i)s_i^2 - 2\lambda_i s_i + (1-2\lambda_i)s_i + \lambda_i \\
&= (-2 + 4\lambda_i - 2\lambda_i + 1 - 2\lambda_i)s_i + \lambda_i \\
&= -s_i + \lambda_i
\end{aligned}$$

Q.E.D.

この2つ目の証明方法は、（W9）が成り立つことを確認するためには結局 $s_i = 0$ または1に関して場合分けして考える必要がありますから、1つ目の証明方法と同じですね。より複雑になってしまっただけです。ただ僕としてはどうしても（W10）を利用してみたかったのです。

$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ が1次独立で（Linearly Independant）あることと、$\{v'_1, v'_2, v'_3, \cdots$ が1次独立であることは同値ですから、P_n が縮退し（Degenerate）しているか縮退していないかは、始頂点の選び方によらない、P_n 自身の性質です。

定義(4)では"n次元平行体の定義(その1)"という表題を掲げましたが、これで貴方は(その2)も登場すると思ったことでしょう。その通りです。数学的帰納法(Mathematical Inductive Method)を用いた定義をします。

n次元平行体の定義(その2)

n次元またはそれ以上のユークリッド空間R^N上の、唯1点A_0から成る集合$P_0(A_0)=\{A_0\}$を0次元平行体と呼ぶ。点A_0のことをP_0の始頂点と呼ぶ。また単に、頂点とも呼ぶ。

$n-1 \geq 0$なる整数$n-1$に対して、$n-1$次平行体$P_{n-1}(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_{n-1})$が定義されていると仮定する。$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_{n-1}\}$は$R^N$に付随するベクトル空間$V^N$上の$n-1$個のベクトルの集合である。

このP_{n-1}及び$v_n \in V^N$を用いて、次式で定まるR^N上の部分集合P_Nのことをn次元平行体と呼ぶ。

$$P_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) = \{x \in R^N ;\ x = y + \lambda v_n,\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ y \in P_{n-1}\} \quad .1)$$

A_0をP_nの始頂点と呼び、$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$を$P_n$の始頂点$A_0$に関する平行要素集合と呼ぶ。$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$が1次独立であるとき、$P_n$を縮退していないn次元平行体と呼び、そうでないとき、縮退したn次元平行体と呼ぶ。

上記の定義式において、yがP_{n-1}の頂点であるとき、λが0または1であるような点をP_nの頂点と呼ぶ。

定義(6)

定義(4)と同様に、定義(6)でもP_nをユークリッド空間上の集合と述べましたが、厳密にはアファイン空間上の集合と呼ぶべきですね。定義(6)ではR^Nに付随するベクトル空間V^Nが明示的に登場しましたね。

今後は、このような注釈は行わないことにしたいと思います。注意してください。

【P096】9月10日(木) n次元平行体の呈示(続き)

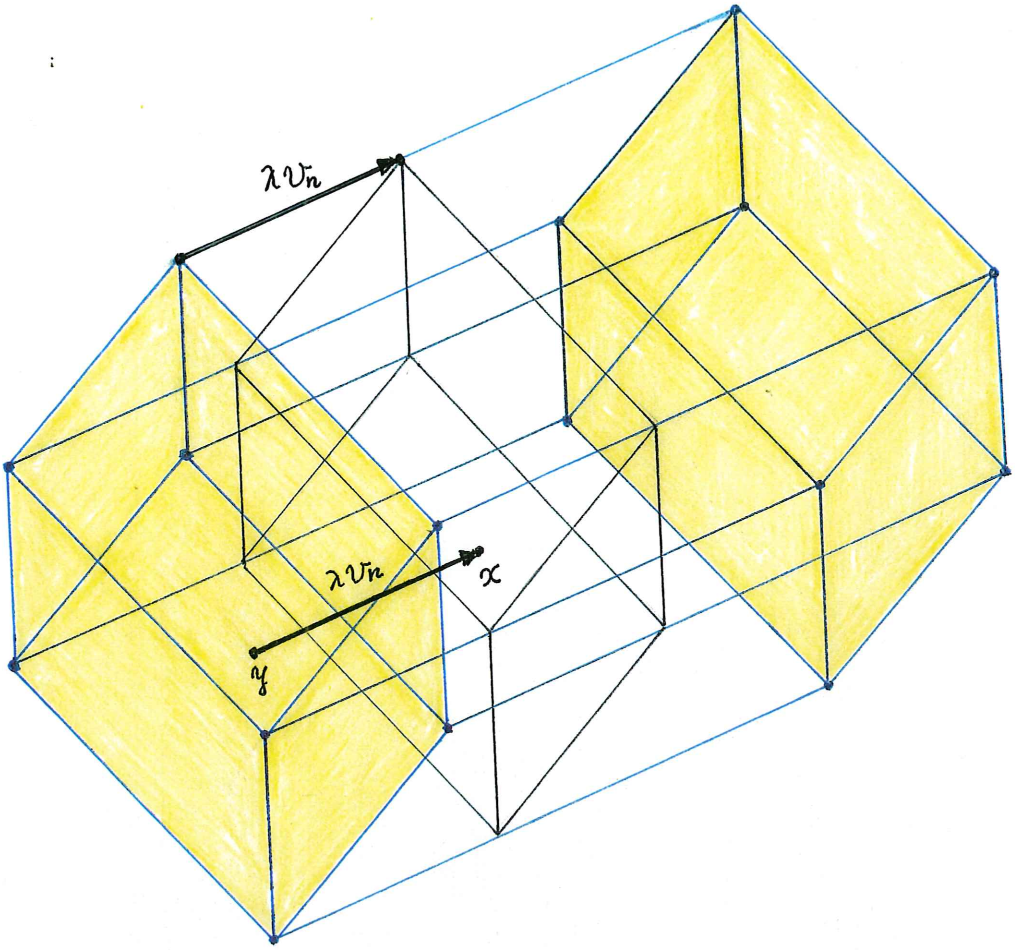


fig.102

定義(6)のイメージ図を描きました。$n \geq 5$だと複雑すぎるので、$n=4$の場合の絵を作図しました。n次元平行体の名前"平行体"の由来が良く分かる図ですね。また、n次元平行体の体積を求める際にも役に立ちそうですね。$n-1$次平行体を、v_n方向に平行移動するとしたときに、$n-1$次平行体が掃い(Sweep)て出来る領域がn次元平行体です。

定義(4)と定義(6)が同値であることはほとんど自明ですから、証明は省略します。唯、定義(6)が帰納法を用いているので、証明するとしたら、やはり帰納法を用いることになるということは指摘しておきます。

P082で、n次元平行体の$n-1$元超表面の個数が$2n$個だろうと述べましたが、証明はしませんでした。それは、$n-1$次元の超表面の定義が行なわれていないからです。辺の個数についても同様です。辺の正確な定義も行なわれていないのです。そこで、$0 \leq m < n$なる整数mに対して、n次元平行体のm次元超表面(m Dimentional Super Surface)の定義を行うことにしましょう。

n次元平行体の m次元超表面の定義

A_0を始頂点とし $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ を平行要素集合とするn次元平行体を P_n とおく。

$0 \leq m \leq n$ なる整数 m に対して、2つの添字集合 I_m, J_m を次式で定める。

$$I_m \cap J_m = \phi, \quad I_m \cup J_m = \{1, 2, 3, \cdots, n\} \qquad .1)$$

$$\#(I_m) = m, \quad \#(J_m) = n - m \qquad .2)$$

ここで、ϕは空集合を意味し、$\#(\cdot)$は有限集合・の元の個数を意味する。I_mが定まれば J_mも定まることに注意しよう。また $\#(I_m) + \#(J_m) = n$ であることにも注意しよう。このI_m, J_mを用いて、P_n のm次元超表面 ${}_nP_m$ を次式で定義する。

$$\begin{aligned} &{}_nP_m(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n) \\ &= \{ x \in R^N ; x = A_0 + \sum_{j \in J_m} s_j v_j + \sum_{i \in I_m} \lambda_i v_i \\ &\qquad s_j = 0 \text{ または } 1, \quad j \in J_m, \\ &\qquad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad i \in I_m \quad \} \end{aligned} \qquad .3)$$

0次元超表面 ${}_nP_0$ のことを P_nの頂点と呼び、1次元超表面 ${}_nP_1$ のことを P_nの辺と呼ぶ。

s_j のヴァリエーションは、$\#(J_m) = n-m$ だから 2^{n-m}個であり、I_m のヴァリエーションは、n個の添字からm個の添字を選ぶ組み合わせの数だから $\binom{n}{m}$ 個である。従って、P_n のm次元超表面の個数は、$2^{n-m} \cdot \binom{n}{m}$ である。

定義（7）

上記の定義（7）は単なる定義ではありません。定義＋αです。αとは定義から直ちに得られる命題で、m次元超表面の個数が $2^{n-m} \cdot \binom{n}{m}$ であるという命題です。定義（4）にも＋αの命題が述べられています。それは、P_nが 2^n個の頂点を持つという命題です。当文書では今後も、定義の中で、定義から直ちに得

られる命題を記述するかもしれません。また、定義の過程で、定義に必要な命題の呈示，証明の記述が出現するかもしれません。ご了承ください。

$2^{n-0}\cdot\binom{n}{0}=2^n$ より P_n の頂点の個数は 2^n 個です。$2^{n-1}\cdot\binom{n}{1}=2^{n-1}\cdot n$ より、P_n の辺の個数は $2^{n-1}n$ 個です。$2^{n-(n-1)}\cdot\binom{n}{n-1}=2n$ より、P_n の $n-1$ 次元超表面の個数は $2n$ です。

P_n の辺は、fig.102から明らかなように、$n-1$次平行体の頂点の個数が 2^{n-1} ですから、互いに平行な 2^{n-1} 本の辺を組とする n 組から成り、各組は平行要素集合の n 個のベクトルの各ベクトルと1対1で対応します。

P_n の $n-1$ 次超表面についても、fig.102から明らかなように、互いに平行な2つの $n-1$ 次超表面を組とする n 組から成り、各組はやはり平行要素集合の n 個のベクトルの各ベクトルと1対1で対応します。このことはP082でも述べましたね。

P_n の n 次元超表面 ${}_nP_n$ は P_n そのものです。このことは定義式（7.3）より明らかです。当然 $2^{n-n}\cdot\binom{n}{n}=1$ ですから、1個しかありません。それが P_n 自身と一致するのです。

n次元平行体 P_n の定義（4）、及び P_n の m 次元超表面の定義（7）より、下記が成り立つのは明らかです。証明は省略します。

n次元平行体 $P_n(A_0;v_1,v_2,v_3,\cdots,v_n)$ の $2^{n-m}\cdot\binom{n}{m}$ 個の m 次元超表面 ${}_nP_m$ は全て、m次元平行体である。

その始頂点，平行要素集合は下記で与えられる。

始頂点　：　$A_0+\sum_{j\in J_m}s_jv_j$ ，　$s_j=0$ または 1

平行要素集合：　$\{v_i\ ;\ i\in I_m\}$

ここで、I_m, J_m は定義（7.1），（7.2）で定めた添字集合である。

定理（8）

【PQ99】9月13日(日)n次元平行体の呈示(続き)

辺に関して云い忘れたことがあります。これはPQ82でも述べたことですが、PQ82では、超表面の定義がまだ行われていなかったので、予想として述べただけです。始頂点をA_0、$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$を平行要素集合とするn次元平行体を$P_n$とする。始頂点$A_0$を頂点の1つとして共有する辺は、定義(7)より

$$\{x \in R^N \,;\, x = A_0 + \lambda v_i,\ 0 \leq \lambda \leq 1,\ (i=1,2,3,\cdots,n)\} \qquad \text{(W11)}$$

と表わされます。v_iが定まるごとに辺が定まりますから、A_0を頂点として共有する辺の個数はnです。定理(5)より、どの頂点についても同じことが云えます。従って辺の個数は$2^n \cdot n/2 = 2^{n-1}n$となります。辻褄が合っていますね。

n次元平行体のもう1つの定義を思い付きました。最小凸集合としての平行体の定義です。そのためには凸集合の定義を行う必要があります。そしてそのためには線分の定義を行う必要があります。線分なんて直感的に自明だなどと云う訳にはいきません。論理的な議論を行うためには、数式を用いて定義しておく必要があります。幾つかの定義が可能です。

線分の定義(その1)

n次元またはそれ以上のユークリッド空間R^N上の2点A_0, A_1が与えられているとする。このとき

$$\{x \in R^N \,;\, x = (1-\lambda)A_0 + \lambda A_1,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

上式で定まる集合を、A_0, A_1を2頂点とする線分と呼ぶ。

定義(9)

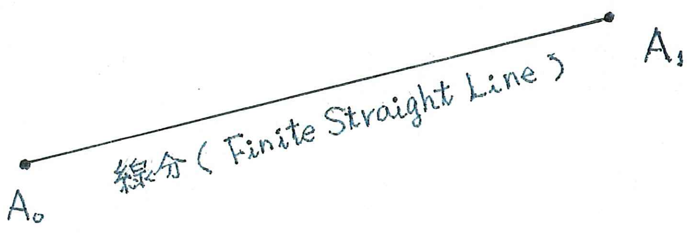


fig. 103

線分の定義(その2)

n次元またはそれ以上の空間R^N上の2点A_0, A_1が与えられているとする。このとき

$$\left\{ x \in R^N ;\quad x = \sum_{i=0}^{1} \lambda_i A_i ,\quad \sum_{i=0}^{1} \lambda_i = 1 ,\quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \ (i = 0, 1) \right\}$$

上式で定まる集合を、A_0, A_1を2頂点とする線分と呼ぶ。

定義(10)

線分の定義(その3)

n次元またはそれ以上の空間R^N上の2点A_0, A_1が与えられているとする。また、R^Nに付随するベクトル空間V^N上のベクトルv_1が次式で与えられているものとする。

$$v_1 = \overrightarrow{A_0 A_1} = A_1 - A_0 \qquad .1)$$

A_0, v_1を用いて

$$\left\{ x \in R^N ;\quad x = A_0 + \lambda v_1 ,\quad 0 \leq \lambda \leq 1 \right\} \qquad .2)$$

上式で定まる集合を、A_0, A_1を2頂点とする線分と呼ぶ。

定義(11)

定義(9), 定義(10), 定義(11)が同値であることは明らかです。証明は省略します。定義(9)と比べると、定義(10), 定義(11)はちょっと複雑ですね。線分が関与する命題では専ら定義(9)を用いることになると思われます。

【P101】 n次元平行体の呈示（続き）

線分の定義（その2），（その3）をわざわざ呈示したのには訳があります。n次元単体の定義はまだ行われていないのですが、1次元単体も1次元平行体も線分であることに注意しよう。次のことが云えるのです。

$$\left\{ (\text{その}2)\text{の}1\text{般化}:\ \sum_{i=0}^{1} \lambda_i A_i \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A_i \right\} \Rightarrow n\text{次元単体}$$

$$\left\{ (\text{その}3)\text{の}1\text{般化}:\ \{v_1\} \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3, \cdots v_n\} \right\} \Rightarrow n\text{次元平行体}$$

つまり、線分を2通りで1般化することで、似て非なる2つの幾何学的実体、n次元単体とn次元平行体が出現するのです。面白いと思いませんか？ 当文書では、他にも2通りの1般化と見做せる命題が出現するかもしれません。

線分を用いて凸集合（Convex Set）の定義をしましょう。

凸集合の定義

n次元またはそれ以上のユークリッド空間R^N上の集合Cが、それに含まれる任意の2点を2頂点とする線分がCに含まれるとき、集合Cを凸集合と呼ぶ。

定義（12）

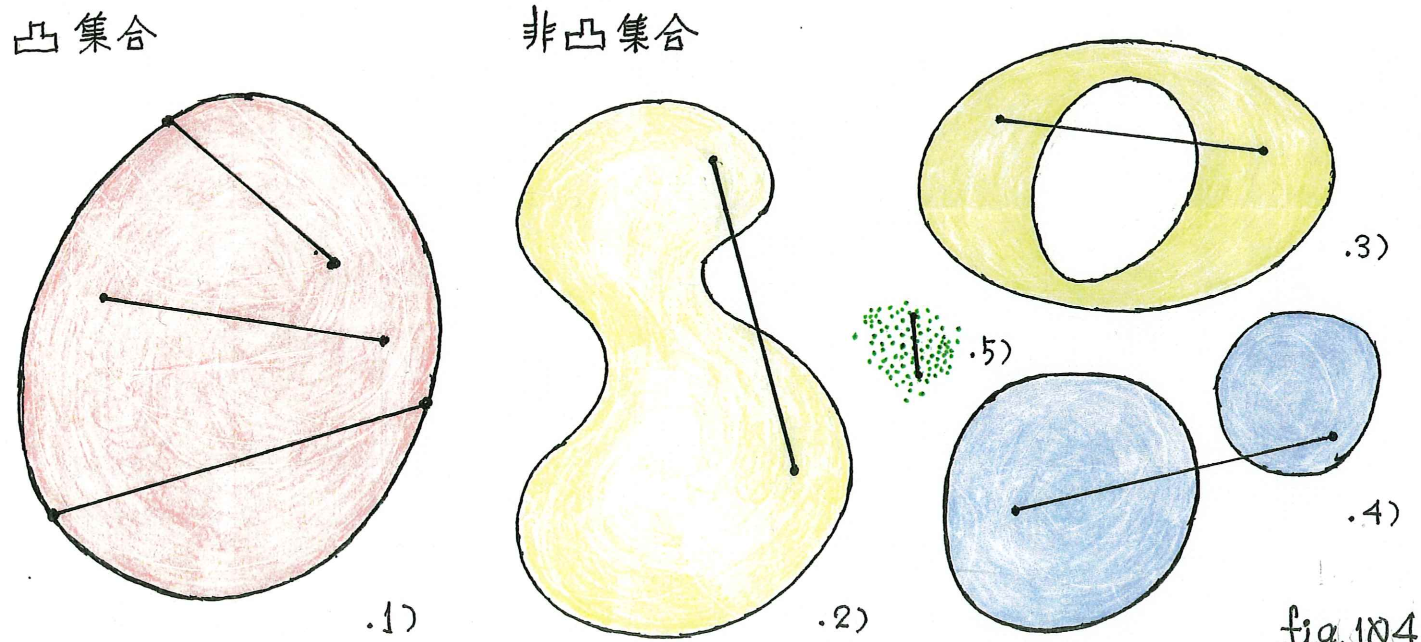


fig.104

余談になりますが、もし凹集合（Concave Set）なる集合を定義するとしたら、どんな集合を凹集合と呼ぶべきでしょうか？ところで、凸と凹と云えば、人間が発明したとても便利な道具（Tool）、凸レンズ（Convex Lens）と凹レンズ（Concave Lens）がありますね。このことを念頭に置いていて下さい。

非凸集合を全て凹集合と呼ぶべきでしょうか？fig.104を見て下さい。.2），.3），.4），.5）は非凸集合の典型的な4種類の例です。.4）は、互いに共通集合を持たない2つ以上の凸集合から成る集合です。これを凹集合と呼ぶのは不自然だと思います。2つ以上の凸レンズを組み合わせても凹レンズの機能は果たせません。.3）は、凸集合に1つ以上の穴が開いた集合です。この様な集合を凹集合と呼ぶのも不自然な気がします。気泡があいたレンズは凸レンズとしても凹レンズとしても使い物になりませんね。.5）は非凸集合の極端な例（Extreme Case）で、離散的な（Discrete）集合です。線分を用いて定義するならば、それに含まれる任意の2点を2頂点とする線分は、その2頂点と例外的に偶然に幾つかの点だけしか線分に含まれないような集合ということになります。また近傍系を用いた定義も可能ですが、長くなるので省略します。このような集合を凹集合と呼ぶのは論外で（Out of the Question）です。大気や水（水面近くの水）は光線を屈折さ（Refract）せますが、凹レンズとしては機能しません。ただ凸レンズとして機能することはあるかもしれません。

僕が思い付いた非凸集合の例で残るのは.2）だけです。僕は.2）こそが凹集合と呼ぶべきだと思います。.2）の、.3），.4），.5）との違いは何でしょう。.2）だけが持つ性質とは何でしょう？

以上の考察を踏まえて、凹集合の定義を試みましょう。

凹集合の定義の試み

n次元、またはそれ以上のユークリッド空間R^N上の集合Cが、非凸集合であり、かつ、nまたはそれ以下の非負整数mに対して、Cが、位相幾何学的にm次元球体と同位相なとき、集合Cを凹集合と呼ぶ。

試案定義（13）

当文書ではまだ定義されていない用語、"位相幾何学的に同位相"，"m次元球体"が出現しましたね。貴方の知識に期待していると云うのは無責任でしょうか？

【P103】 n次元平行体の呈示（続き）

凹集合の定義がどうであれ、当文書で今後凹集合を用いた議論を行うことはないでしょう。ですから何の問題もありません。

多次元球体については、当文書で論じる積り（Intend）です。その際、その定義も行います。

同相（同位相）については、位相幾何学の基礎となる概念（Concept）ですから、当文書でまた出現する可能性があります。その時は同相の定義も行うことになるでしょう。ただここでちょっと云うとしたら、同相写像と呼ばれる、全単射の写像を用いて定義できる概念であると云うことです。直感的には、2つの幾何学的実体が同相であるとは、1方から他方へ連続的に変形できるということです。

以上、ちょっと長くなりましたが、余談でした。

下記が成り立ちます。

n次元平行体は凸集合である。	定理(14)

証明）

A_0を始頂点とし、$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$を平行要素集合とするn次元平行体を$P_n$とします。$P_n$上の任意の2点を$x, y$とします。n次元平行体の定義（4）より、$x, y$は次式で表わされます。

$$x = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad \text{(W12)}$$

$$y = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i, \quad 0 \leq \mu_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad \text{(W13)}$$

x, yを2頂点とする線分上の任意の点をzとするとき、線分の定義（9）より、zは次式で表わされます。

$$z = (1-\nu)x + \nu y, \quad 0 \leq \nu \leq 1 \qquad \text{(W14)}$$

（W14）の右辺に、（W12）のx、（W13）のyを代入します。

$$\begin{aligned} z &= (1-\nu)\left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) + \nu\left(A_0 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i\right) \\ &= (1-\nu)A_0 + (1-\nu)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \nu A_0 + \nu \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \end{aligned}$$

$$z = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \{(1-\nu)\lambda_i + \nu \mu_i\} v_i \qquad \text{(W15)}$$

ここで、κ_iを次式で定義する。

$$\kappa_i = (1-\nu)\lambda_i + \nu\mu_i \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad \text{(W16)}$$

(W15), (W16)より

$$z = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \kappa_i v_i \qquad \text{(W17)}$$

κ_iを評価し(Appraise)よう。

$0 \leq \nu \leq 1$だから、$(1-\nu) \geq 0$, $\nu \geq 0$であることに留意し(Heed)よう。

また、$0 \leq \lambda_i \leq 1$, $0 \leq \mu_i \leq 1$であることにも留意すれば、下記が成り立ちます。

κ_iは$\lambda_i = \mu_i = 0$のとき最小となる。: $\min\kappa_i = (1-\nu)\cdot 0 + \nu\cdot 0 = 0$

κ_iは$\lambda_i = \mu_i = 1$のとき最大となる。: $\max\kappa_i = (1-\nu)\cdot 1 + \nu\cdot 1 = 1$ (W18)

よって、

$$0 \leq \kappa_i \leq 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \qquad \text{(W19)}$$

(W17)及び(W19)より、zはP_n上の点であり、x, yを2頂点とする線分はP_nに含まれます。よって、$x, y \in P_n$の任意性により、P_nは凸集合です。Q.E.D.

$\min\kappa_i$と$\max\kappa_i$のどちらも、λ_i, μ_i, νのどれにも依存(Depend)しないというのはちょっと面白い。というよりも、依存するとしたら、λ_i, μ_i, νのどんな式になるのかは想像で(Imagine)きません。

n次元平行体の才3の定義を行うためには、最小凸集合を定義する必要があります。

最小凸集合の定義

n次元またはそれ以上のユークリッド空間上の集合Sに対して、Sを含む凸集合C_0が、Sを含む任意の凸集合Cに含まれるならば、C_0を集合Sを含む最小凸集合と呼ぶ。

C_0はSに対して一意的に定まる。つまり、唯一の集合である。

定義(15)

定義(4)，定義(7)と同様に、定義(15)も定義+αの命題ですね。定義(15)のαとは、C_0がSに対して一意的に（Uniquely）に定まるという命題です。

自明ですが、一応証明しましょう。

集合Sを含む最小凸集合が2つ存在するとします。それらをC_0，C_0'とする。
C_0はSを含む最小凸集合で、C_0'はSを含む凸集合だから、$C_0 \subset C_0'$である。
C_0'はSを含む最小凸集合で、C_0はSを含む凸集合だから、$C_0' \subset C_0$である。
以上。Q.E.D.

集合における等号の定義

$$S \subset S' \quad \text{かつ} \quad S' \subset S \quad \Longleftrightarrow \quad S = S'$$

定義(16)

(16)は、形式論理学（Formal Logic？）上の公理（Axiom）だと思い勝ちですが、集合における等号"＝"の定義だと考えるべきです。

次の定理が成り立つ。この定理は最小凸集合（Minimal Convex Set）としての平行体の定義のためには必須で（Essential）す。

$A_0 \in R^N$を始頂点とし、R^Nに付随するベクトル空間V^N上のn個のベクトル$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$を平行要素集合とするn次元平行体を$P_n$とおく。

P_nの頂点（0次元超表面）全てから成る集合を$\mathcal{A}_n$とおく。P_nのm次元超表面の定義(7)より、$\mathcal{A}_n$は次式で表わされることに留意されたし。

$$\mathcal{A}_n = \left\{ A \in R^N ; \ A = A_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i v_i, \quad s_i = 0 \text{ または } 1 \ (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \right\} \qquad .1)$$

このとき、P_nは集合$\mathcal{A}_n$を含む最小凸集合である。

定理(17)

証明）

$\mathcal{A}_n \subset P_n$であることに注意しよう。また、定理(14)より$P_n$は凸集合であることにも注意しよう。従って、$P_n$の最小性を示せば定理(17)は証明されたことになる。

n次元平行体の定義（6）の冒頭（Head Pragraph）で述べたように、$P_0 = \{A_0\}$ であり、A_0は P_0の唯一の頂点である。よって、$\mathcal{A}_0 = \{A_0\}$である。従って P_0は集合 $\mathcal{A}_0$を含む最小凸集合である。よって$n=0$のときは命題（17）は成り立つ。$\mathcal{A}_n$を含む任意の凸集合をC_nとおく。数学的帰納法によって、$P_n \subset C_n$を証明する。

$n=k-1$のとき命題（17）が成り立つと仮定する。P_{k-1}, $\mathcal{A}_{k-1}$のそれぞれに対して、P'_{k-1}, $\mathcal{A}'_{k-1}$を次式で定義する。

$$\begin{cases} P'_{k-1} = \{ x' \in R^N ;\ x' = x + v_k ,\ x \in P_{k-1} \} \\ \mathcal{A}'_{k-1} = \{ A' \in R^N ;\ A' = A + v_k ,\ A \in \mathcal{A}_{k-1} \} \end{cases} \tag{W20}$$

P'_{k-1}, $\mathcal{A}'_{k-1}$はそれぞれ、ベクトルv_kによって、P_{k-1}, $\mathcal{A}_{k-1}$を平行移動した集合である。P_{k-1}, $\mathcal{A}_{k-1}$と同様に、P'_{k-1}は$k-1$次元平行体であり、$\mathcal{A}'_{k-1}$はP'_{k-1}の全ての頂点から成る集合である。次が成り立つことに注意されたし。

$$\mathcal{A}_{k-1} \subset \mathcal{A}_k \quad \text{かつ} \quad \mathcal{A}'_{k-1} \subset \mathcal{A}_k \tag{W21}$$

ところで、$\mathcal{A}_k \subset C_k$である。従って（W21）より

$$\mathcal{A}_{k-1} \subset C_k \quad \text{かつ} \quad \mathcal{A}'_{k-1} \subset C_k \tag{W22}$$

また、帰納法の仮定より

$$\begin{cases} P_{k-1}\text{は集合}\mathcal{A}_{k-1}\text{を含む最小凸集合である。} \\ P'_{k-1}\text{は集合}\mathcal{A}'_{k-1}\text{を含む最小凸集合である。} \end{cases} \tag{W23}$$

（W22），（W23）より次が成り立つ。

$$P_{k-1} \subset C_k \quad \text{かつ} \quad P'_{k-1} \subset C_k \tag{W24}$$

ところで、2点x, yを2頂点とする線分と$L(x, y)$と記すことにすれば、平行体の定義（その2）の（6.1）は、$L(\cdot,\cdot)$を用いれば次のように表現される。

$$P_k = \bigcup_{\substack{x \in P_{k-1} \\ x' = x + v_k}} L(x, x') \tag{W25}$$

$x \in P_{k-1}$, $x' \in P'_{k-1}$ に注意しよう。C_k は（W24）を満たす凸集合だから、

$$L(x, x') \subset C_k \tag{W26}$$

（W25），（W26）より、$P_k \subset C_k$ である。Q.E.D.

定理(17)及び最小凸集合の唯一性より、n次元平行体の次のような定義ができることは明らかです。

n次元平行体の定義（その3）

n次元またはそれ以上のユークリッド空間 R^N 上の1点 A_0 と、R^N に付随するベクトル空間 V^N 上の n個のベクトルの集合 $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ に対して、集合 $\mathcal{A}_n$ を次式で定める。

$$\mathcal{A}_n = \{A \in R^N ;\ A = A_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$
$$s_i = 0 \text{ または } 1 \ (i = 1, 2, 3, \cdots, n)\} \quad .1)$$

集合 $\mathcal{A}_n$ を含む最小凸集合を $P_n(A_0; v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n)$ と記し、n次元平行体と呼ぶ。A_0 を P_n の始頂点と呼び、$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ を P_n の平行要素集合と呼ぶ。$\mathcal{A}_n$ に含まれる点を P_n の頂点と呼ぶ。$\{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$ が1次独立なとき P_n を縮退していないn次元平行体と呼び、そうでないとき P_n を縮退したn次元平行体と呼ぶ。

定義（18）

n次元平行体の定義（その1）は直接的な（Direct）定義で、（その2）は帰納法的な定義で、（その3）は最小凸集合としての定義と云えます。同様に、n次元単体の定義も（その1），（その2），（その3）に対応する定義を行う予定です。平行体に比べてやや単純になるはずです。なにしろ、Simpleなヤツですからね。

【P108】9月20日(日) n次元平行体の呈示(続き)

『n次元平行体の呈示』はこれぐらいにしておきましょう。当主題で幾つかの課題が呈示されました。平行体と単体に関する予想(3)，光輝体，多重正多形などです。また，n次元平行体のn次元体積の求積も残されています。

当主題を終えるにあたって，**8次光輝体**の作図に挑戦し(Challenge)ます。

n = 8

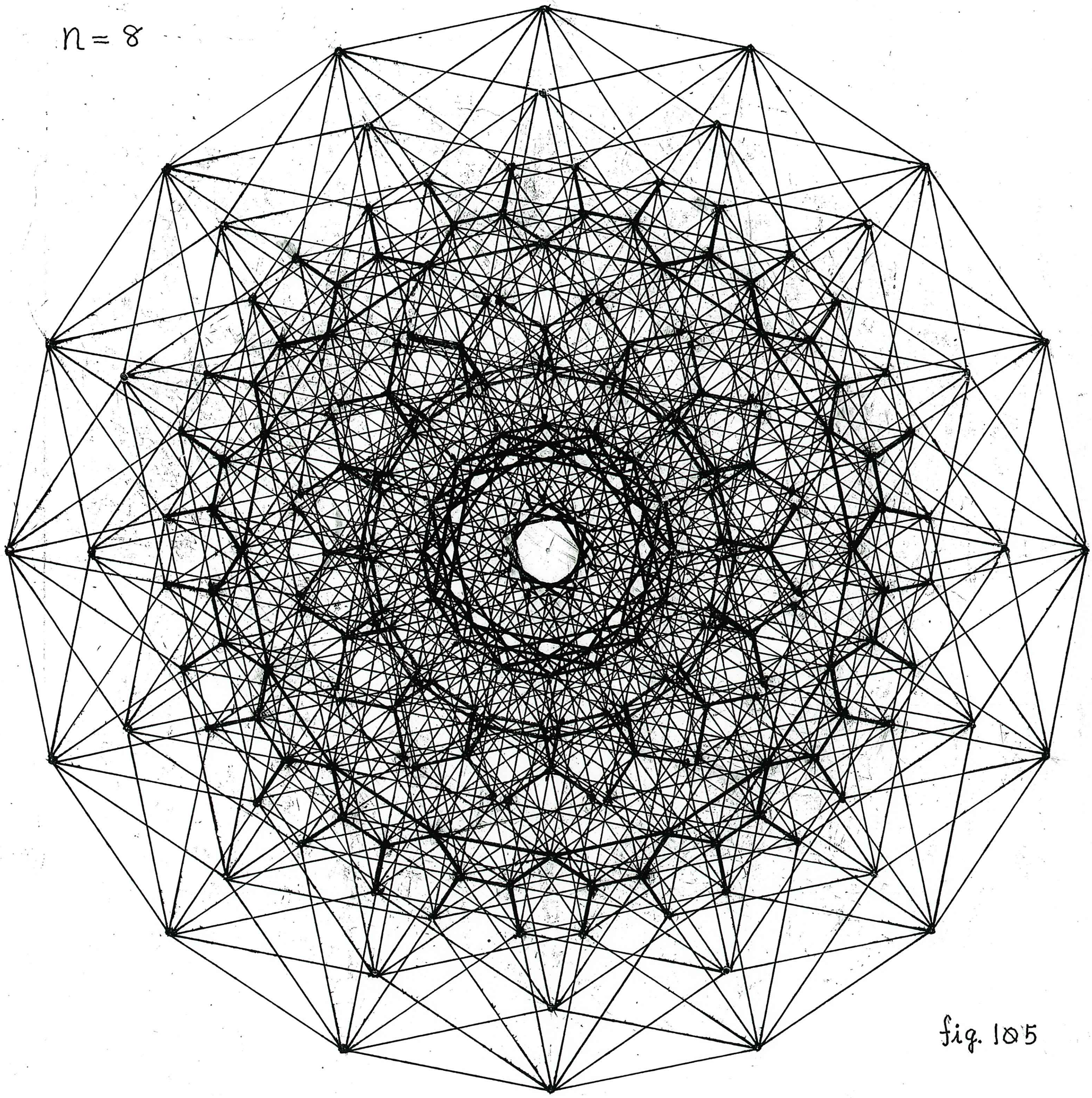


fig. 105

● 小休止：ギリシャ文字

大文字	小文字	発音					
A	α a	alpha	ǽlfə	N	ν n	nu	njú
B	β b	beta	béitə	Ξ	ξ x	xi	zái, ksái
Γ	γ g	gamma	gǽmə	O	ο 短音o	omicron	áməkràn
Δ	δ d	delta	déltə	Π	π p	pi	pái
E	ε 短音e	epsilon	épsəlàn	P	ρ r	rho	róu
Z	ζ z	zeta	zí:tə	Σ	σ s	sigma	sígmə
H	η 長音e	eta	í:tə	T	τ t	tau	táu
Θ	θ, ϑ th	theta	θí:tə	Υ	υ y	upsilon	jú:psəlàn
I	ι i	iota	aióutə	Φ	φ, ϕ ph	phi	fái
K	κ k	kappa	kǽpə	X	χ ch	chi	kái
Λ	λ l	lambda	lǽmdə	Ψ	ψ ps	psi	psái
M	μ m	mu	mjú	Ω	ω 長音o	omega	oumégə

小文字欄の右上に記したのは、対応する英語の、文字、または音節（Sillable）；または音節の1部です。epsilonとetaはそれぞれ、短音のe，長音のeに対応し、omicronとomegaはそれぞれ、短音のo，長音のoに対応します。theta，phi，chi，psiはそれぞれ、th，ph，ch，psに対応します。

ギリシャ文字に無い英文字は下記の8個です。

c, f, h, j, q, u, v, w

fig. 106