● n次元単体の呈示

n次元単体（n Dimentional Simplex）とはどんなものなのか？今は唯、仄めかし（Hint）による呈示（Presentation）を行うに留めることにしよう。正確な定義は後述としたい。実は、n次元単体の定義は思ったより難しい（Difficult）。しかもいくつかの定義がある。それらの定義（Definition）が互いに同値であることを示す必要がある。

0次元単体とは、唯1点だけからなる幾何学的実体である。これについては何も語る必要がないだろう。唯、十分に大きなNのN次元空間中の1点として想像（Imagination）してほしい。$n \geq 1$についても同様である。
今、N次元空間（N Dimentional Space）という言葉を用いたが、これはユークリッド（Euclidean）空間のことを指している。また、ベクトル（Vector）空間でもあり、アファイン（Affine）空間でもある。厳密に（Exact）云えば、これらは異なるものであるが、僕はそれらを区別し（Distinct）ないことにする。問題ないと思う。もし問題が生じたら、その時（に限って）区別することにしよう。N次元ユークリッド空間のことを$\mathbb{R}^N$と記すことにする。n次元単体は、$n<N$とするとき、N次元空間内のあるn次元部分（Partial）空間上に乗っている幾何学的実体である。つまり、N次元空間内にかってに1つのn次元単体が与えられた時、そのn次元単体が乗っているn次元空間が（少なくとも）1つ存在するということである。1つだけでなく無数のn次元空間が存在する場合もあるだろう。その時、そのようなn次元単体のことを縮退したn次元単体と呼ぶことにする。縮退したn次元単体の正確な定義については後述とする。（n次元単体の定義の際に語るつもりである。）

1次元単体とは、2点間を結ぶ線分である。この2端点のことを頂点（Apex）と呼ぶ。また、2頂点を結ぶ線分のことを辺（Side）と呼ぶ。1次元単体では、その辺の長さ（Length）を考えることができる。この長さのことを1次元体積（Volume）と呼びV_1と記すことにする。縮退した1次元単体は0次元単体である。また、1次元単体は縮退した2次元単体でもある。頂点や辺，体積については$n \geq 2$でも同じ用語を持ちいることにする。

2次元単体とは、3角形（Triangle）のことである。一般に、2次元単体は、3つの頂点と3つの辺を持つ。2次元単体の3つの辺のことをその面（Surface）と呼ぶ。2次元単体つまり3角形はその内点も含まれているものとする。従って、その面積を考えることができる。3角形の面積（Square）とは、その2次元体積V_2を指す。

【P002】 n次元単体の呈示（続き）

2次元単体の2つの辺に注目（Notice）しよう。これらは1つの頂点を共有する。その時、2辺の成す角度（Angle）を考えることができる。3個の辺から2個の辺を選ぶのであるから、3個の角度が存在する。これらには1つの恒等式（Identical Equation）が成り立つ。誰でも知っているあの恒等式のことである。このとき注意してほしいのは僕の云う角度とはいわゆる内角のことである。また、3個の辺の長さの間には3個の不等式が成り立つ（これも後述とする）さらに、3個の辺と3個の内角の間には一連の恒等式が存在する。これについては、後で平面3角法という主題で論じることにする。3個の角度の間に成り立つ恒等式についても平面3角法に含めて論じることにする。唯これが、ユークリッド幾何学における平行線（Parallel Lines）の公理（Axiom）に由来することだけは指摘しておく。2次元単体の3個の辺の長さに対応して、2次元単体は3なる自由度を持つと云う。（下図参照）。

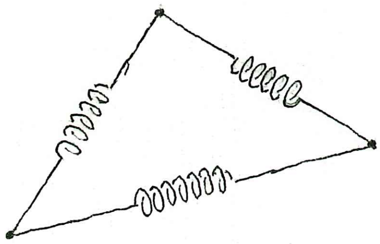


fig.002

2つの2次元単体が与えられたとしよう。これら2つの単体の辺の長さに注目した時、適当な対応付けで、対応するどの2つの辺の長さも等しいとき、この2つの2次元単体は互いに合同である（Congruent）と云う。また、同じ対応付けで、どの2つの辺の長さの比（Ratio）も等しいとき、この2つの2次元単体は相似である（Similar）という。$n \geq 3$ の場合についても同様とする。合同や相似の正確な定義については、後で（余裕があれば）まとめて論じることにしたい。
同一平面上で2つの合同な2次元単体が与えられたとしよう。（下図参照）。

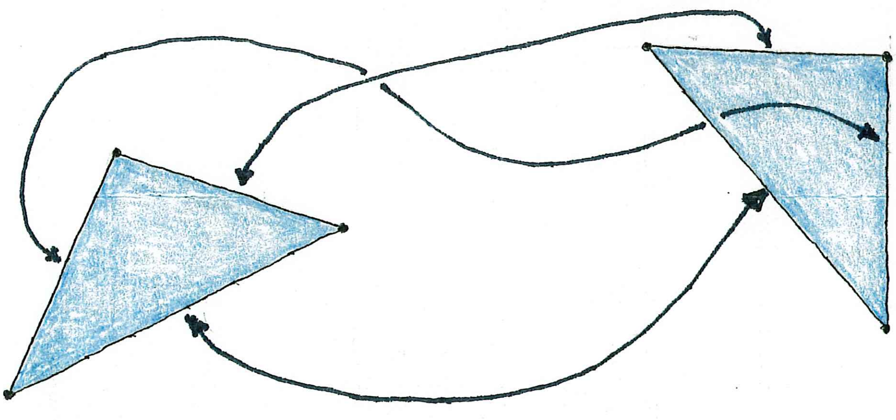


fig.003

【P003】6月11日(木) n次元単体の呈示(続き)

これらは、一方に平行移動と回転を、両者が乗っている同一平面上で行うことによって、重ね合わせることができる場合と、重ね合わせることができない(不可能)な場合がある. fig.003は後者の例です. しかし、後者の場合でも、鏡像変換も行うことで重ね合わせることができます。(下図参照)

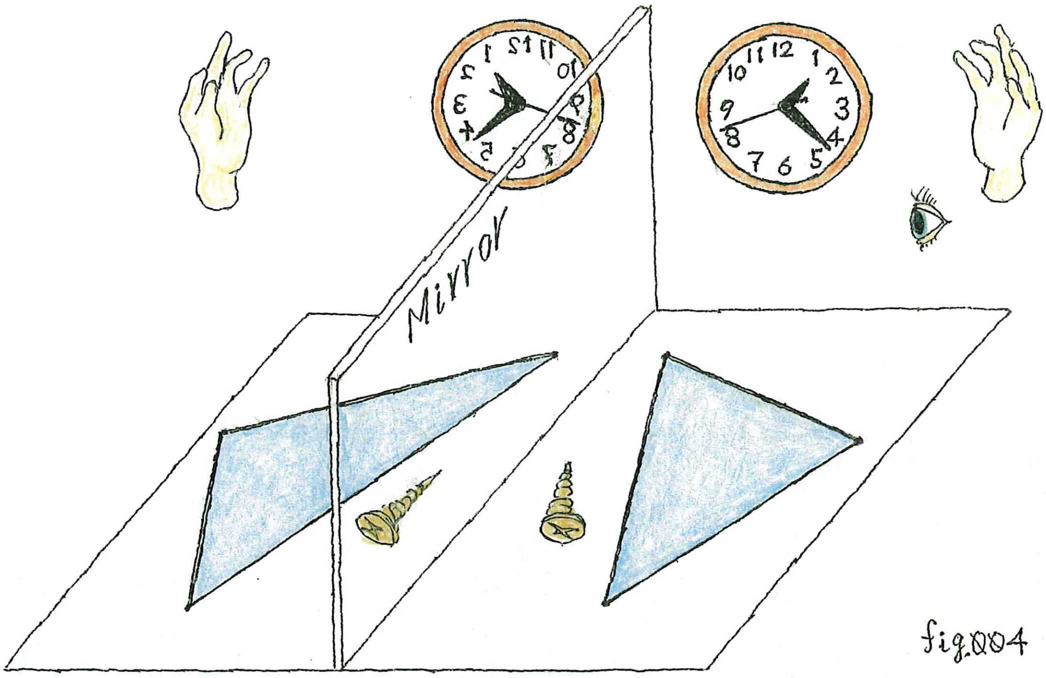


fig.004

鏡像変換のことを物理学者はP変換と呼んでいます. PはParityの頭文字です. 我々が日常的に体験する世界ではP変換を行っても何も変わりません. ある現象(Phenomenon)が起こる(Happen)とき、その現象をP変換した現象も起こり得ます。しかし量子力学のある現象については、P変換した現象が起こり得ないということが知られています。ただしCPT変換を行なえば対称性が保たれます。Cは電荷(Charge)のCで、C変換とは電荷の符号(Sign)を入れ換えることです. Tは時間(Time)のTで、T変換とは時間の向き(Direction)を入れ換えることです。鏡像変換によって、右手は左手に見えます. 時計の針は反時計回りに回ります(このことは時間が逆に流れるということを意味するものではありません. 言うまでないことですね.). 右螺旋(Screw)は左螺旋に見えます。鏡像変換は見掛け(Appearance)によらず難しい(Difficult)概念(Concept)です. 不思議で(Mysterious)すらあります。僕には、(仄めかしの図形を用いないとすれば)数学的に定義することが出来そうにありません。

今、太陽系からそれほど離れていない星系の惑星(Planet)に、人類と同じ程文明が進んでいる宇宙人がいたとして、彼らと我々人類がある通信装置を用いて会話ができるとしましょう. ただし音声(Voice)のみで、映像は送れない装置だ

【P004】n次元単体の呈示（続き）

とします。貴方が数学者で、右手に右螺旋を握っていて、貴方が会話しようとしている宇宙人も右手に右螺旋を握っている数学者だとしましょう。このとき貴方たちは会話だけで、自分たちの握っている螺旋が同じ右螺旋であることを確認することが出来るでしょうか？ 僕は出来ないと思う。但し（However）、貴方が、貴方の握っている螺旋を持って宇宙人に会いに行くなり、宇宙人が、宇宙人の握っている螺旋を持って貴方に会いに来れば、お互に螺旋を比らべることができて、同じ右螺旋であることを確認することができるだろう。本当に、Parityは不思議な概念だと思う。しかもとても危険な概念でもある。回転を数学的に表現するとき、座標系の回転なのか、それとも、座標系で表現されている幾何学的実体の回転なのかを区別する必要がある。つまり回転角度の符号の問題である。具体的な微小回転を図にして確認することが必須で（Essential）ある。かつて、東芝が作った人工衛星を打ち上げたら、太陽電池板（Panel）が逆回転してしまって、大失敗（Failure）したことがあったと聴いたことがある。Parityに気を付けなかったからだと思う。！

$n \geqq 3$ に関しても、回転，平行移動，Parity変換について同様な議論が成り立つ。これらの変換によって不変な量を研究対象とする。つまり、長さ，面積，…，n次元体積、そして、角，立体角などである。それだけではない。位相的な性質も研究対象となるだろう。

Parity変換は、1個余分な（Extra）次元を付け加えるとするならば、その次元を経由した（Via）回転として表現することができる。（下図より明らか）。

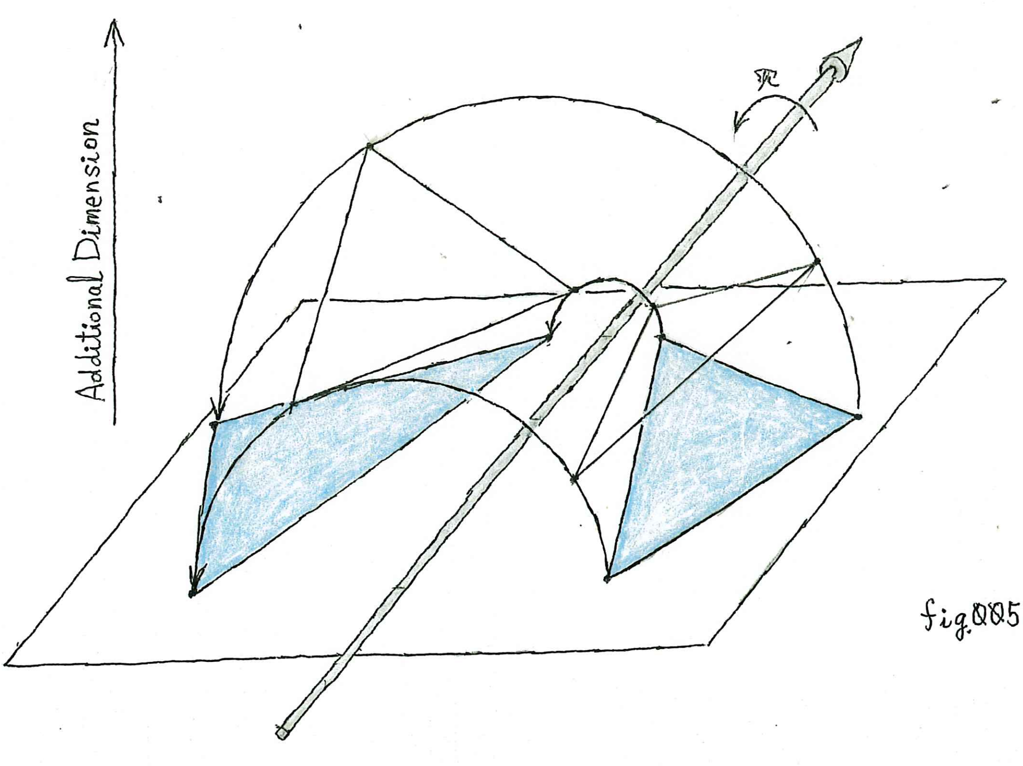


fig.005

でもこれは邪道（Evil Courses）だと思いませんか？n次元空間内の幾何学的実体の性質は、それが含まれいるn次元空間内に限って、定義や議論（Discussion）されるべきだと思う。P003で、P変換を数学的に定義することが僕には出来そうにないと言ったのは、そういう意味です。fig004の鏡像変換の絵や、fig005の回転の絵は、どちらも追加次元（Additional Dimension）を導入し（Introduce）して描い（Draw）た仄めかしの絵にすぎません。

物理学には、3次元空間の3つの次元と、時間の次元、さらに質量（Mass）の次元が登場します。質量を1つの次元として扱うのは無理があると考えるべきかもしれません。負の質量をもつ物質は今のところまだ発見されていません。また、質量が連続的な（Continous）量なのか、それとも不連続的な量なのかも、まだ解っていません。さらに厳密に云うと、質量には２種類あります。慣性質量と重力質量です。これらは通常（Usually）同じものだと見做し（Consider）ます。ほとんどの物理学者はそう考えていると思います。でも唯比例するだけなのかもしれません。比例定数（Constant）が重力常数Gの中に封じ込め（Enclose）られているのかもしれません。質量を1つの次元として扱おうとするのには根拠（Ground）があります。知られているすべての物理量は、3次元空間の3つの次元に対応した長さ$\mathfrak{L}$と、時間次元に対応した時間間隔（Interval）$\mathfrak{T}$と、質量次元に対応した質量の間隔$\mathfrak{M}$によって、与えられた物理量の次元（単位）は、$\mathfrak{L}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$たちを掛け（Multiply）たり、割っ（Divide）ったり、根号をほどこし（Root, √￣）たりすることよって表現することができます。これが質量を1つの物理学的な（Physical）次元として扱う根拠です。例えば速度の次元は$\mathfrak{L}/\mathfrak{T}$です。エネルギー（Energie）の次元は$M\cdot\mathfrak{L}^2/\mathfrak{T}^2$です。電荷の次元は$\sqrt{M\cdot\mathfrak{L}^3/\mathfrak{T}^2}$です。これらについては後述するつもりです。

P変換の話に戻りましょう。空間の次元のような1つの追加次元が存在するとしましょう。fig005のように、追加次元を経由して、元の空間に戻って来たらParityが変換されてしまったとしましょう。このとき何が起きるのでしょうか？スピン（Spin）や角運量は反転します。スピンの反転は有りそうな事です。右螺旋は左螺旋になります。困ります。螺旋の生産者も消費者（Consumer）も困ります。でも一旦（Once）使用してしまえば（何かに捩じ込んでしまえば）問題ありません。こんな現象は発生していないのだから、そんな追加次元は存在しないか、存在しているとしても、リサ（Lisa Radall）が思い付いたように余剰次元（Extra Dimension）はワープ（Warp）しているのかもしれません。次に時間次元を3次元の空間に追加され

た余剰次元だと考えてみましょう。このとき、時間次元を経由してParityが変換されてしまったとしましょう。これはT変換です。僕はP変換を一般化して考えていることになります。T変換のみならずC変換もP変換の一種として考えていることになります。このとき、電荷が入れ換わります。電子は陽電子に変換されます。一般に物質と反物質が入れ換わります。宇宙のすべての物質が一斉に反物質に変換されてしまったとしても何も起りません。ちょっと不思議ですね。電子の電荷を負と定義したのは物理学者の失敗だったと、工学者(Engineer)が嘆い(Lament)ています。電子の移動の向きと電流の向きが逆だからです。でも何の問題もありません。次に、質量次元を、3次元の空間に追加された余剰次元だと考えてみましょう。さらに、質量次元を経由してParityが変換されてしまったとしましょう。このとき質量の符号が入れ換わります。負の質量を持つ物質が出現します。もし負の質量を持つ物質がこの宇宙に存在するとしたら、負の質量をもつ物質は寄り添い合います。また正の質量をもつ物質同士も互いに寄り添い合います。負の質量をもつ物質と正の質量をもつ物質は互いに斥け合います。従って住み分けることになります。負の質量をもつ物質が圧倒的(Overwhelming)だとしたら、正の質量をもつ物質は狭い領域に押し込められることになります。観測されている宇宙の大規模構造(Large Scale Structure)は負の質量をもつ物質が存在する証拠(Evidence)なのかもしれません。それが直接観測されていないのは、負の質量をもつ物質が光子(Photon)と相互作用をしないと考えれば納得でき(Comply)ます。Parityの話はこれぐらいにしましょう。唯1つだけ。ダビンチ(da Vinci)です。彼は天才です。芸術家であり、物理学者であり、数学者でもあったかもしれません。ダビンチが左きき(Left-Handed)だったことはよく知られています。彼の書いた文章は右から左へつづられています。つまり鏡像変換をした文章を書いていたことになります。それだけ。

(次ページへ続く)

【P007】6月13日(土) n次元単体の呈示(続き)

2次元単体には、それに関連し(Relate)た、いくつかの円(Circle)、つまり2次元球体(Sphere)が存在します。内接球や外接球、また互いに接し合う球体たちです。また特別な1点、重心(Center of Gravity)も存在します。下図にそれらを描きました。それらの詳細(Details)については後述します。$n \geq 3$ の場合にも同様の球体たちや重心が存在します。

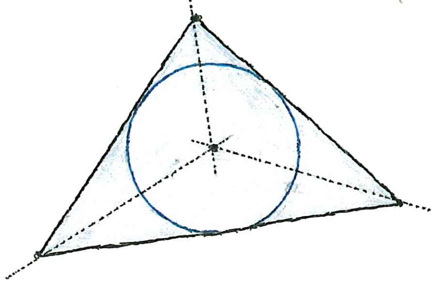


fig.006.1

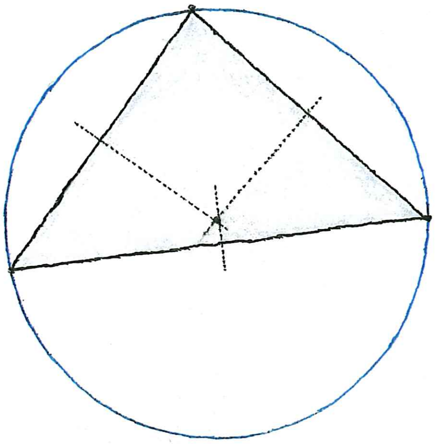


fig.006.2

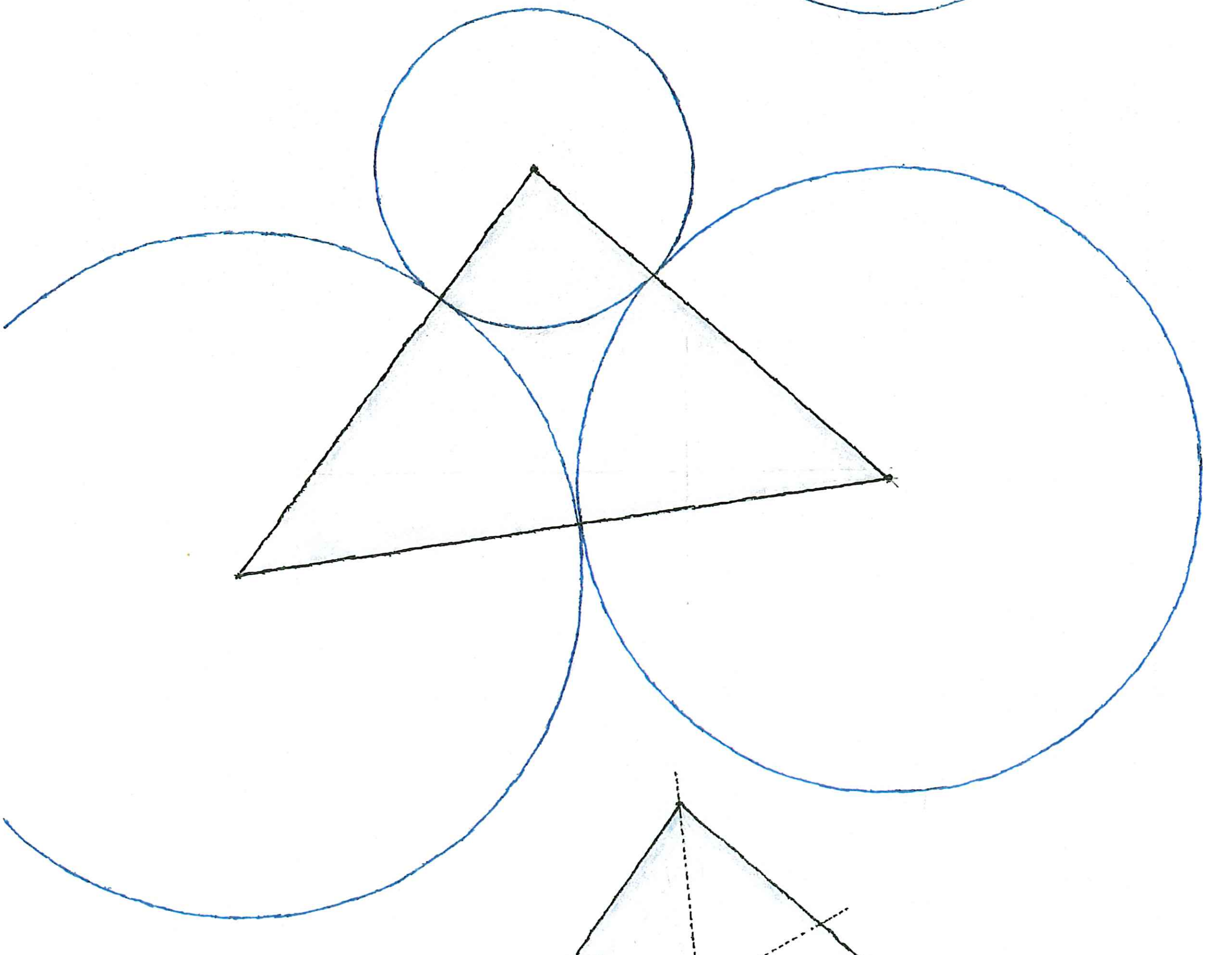


fig.006.3

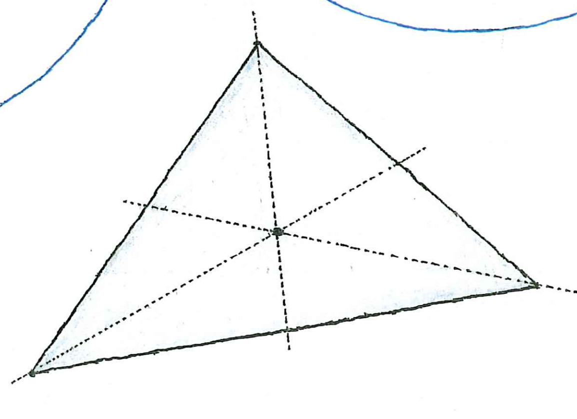


fig.006.4

【P008】n次元単体の呈示(続き)

2次元内接球体は、互いに接し合う3つの2次元球と直交する。(下図)

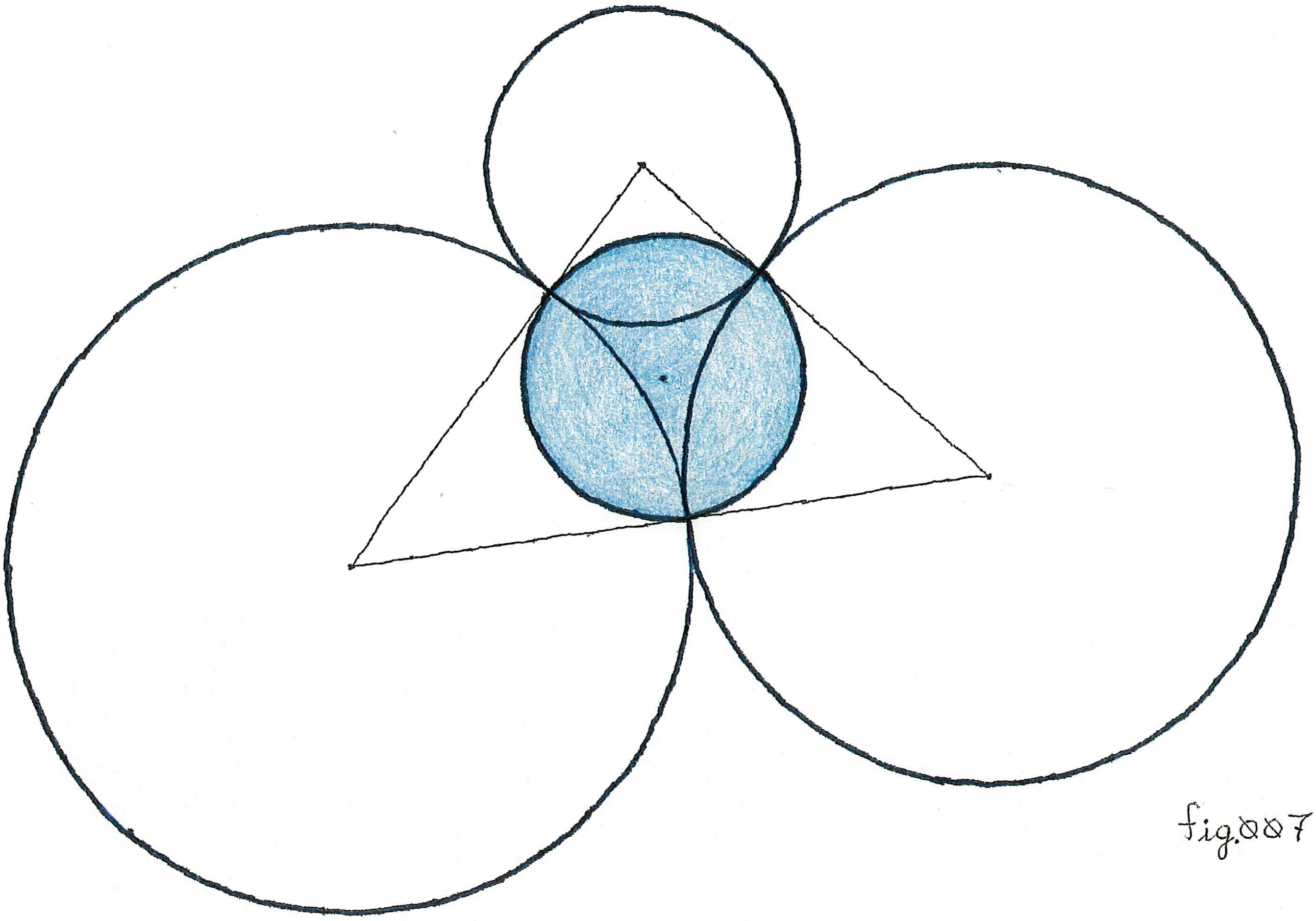


fig.007

重心は、その名前が示しているように、重心に糸の一端を取っ付けて他端を何かに取っ付ければ、水平にして静かに離せば、そのまま水平を保ったまま静止(Rest)する。また、釘(Nail)を垂直に(Perpendicularly)に立てて、その先端に重心が一致するように水平に乗せて静かに離せば、やはりそのまま水平を保ったまま静止する。(下図)。このことは自明ではない。計算して示す必要があります。

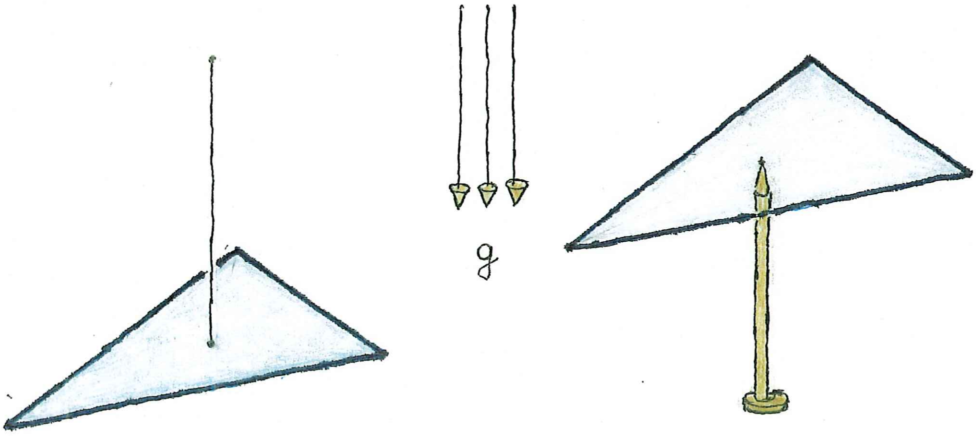


fig.008

【P009】6月14日(日) n次元単体の呈示(続き)

静かに離せば静止するということは、何かたちが(あるいは、何かと何かが)釣り合っ(Balance)しているということです。後々、重心について議論する際、重さを測る(Measure)装置(Equipment)たち、例えば天秤(Balance)や竿秤(扛)についても論じたいと思っています。またそれらと関連して時間を測る装置、時計についても話題にしたいと思います。時計といっても、振子時計や発条(Spring)を用いた機械(Machine)式の腕時計(Wrist Watch)ののことです。これらの装置は振動(Oscilation)子や歯車(Gear Wheel)から構成されています。物理学的量とそれらを測定す(Measure)る装置とは奇妙な(Strange)関係にあります。測定装置はある物理法則が成り立つ仮定して(その法則を信頼して)用いられます。そして、測定によりある物理法則を確認したり、新しい物理法則を見出したりします。これは自家撞着(Contrdiction)ではないでしょうか? ガリレオ(Galileo Galilei)はシャンデリア(Chandelier)が揺れ(Tremble)るのを見て、自分の脈搏を用いて振子の等時性を発見したそうです。現代では脈搏数は脈搏計を用いて計ります。脈搏計は時計です。重心の話はこれぐらいにして、2次元単体の話に戻りましょう。

2次元単体には、それに関連した(いくつかの)平行4辺形が存在します。(下図)

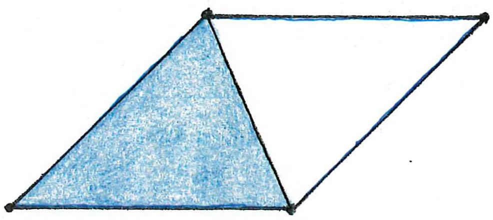


fig.009.1

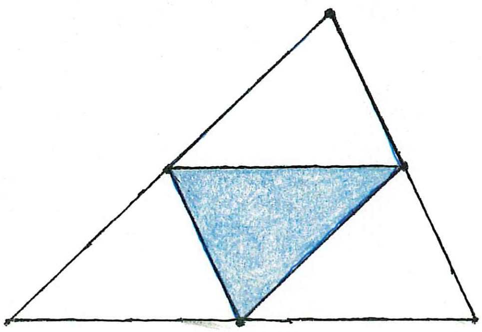


fig.009.2

左の図(fig009.1)を見よ。平行4辺形(Parallelogram)が2つの3角形に分割(Divide)されています。これら2つの3角形は合同です。平行4辺形のことを2次元平行体(2 Dimentional Parallelix)と呼ぶことにします。一般に、n次元平行体を定義することができます。(後述)。3次元平行体とは平行6面体です。3次元平行体は6個の3次元単体に分割できます。このことは確認済みです。一般にn次元平行体はn!個のn次元単体に等分割できると予想さ(Expect)されます。等分割とは等体積分割のことです。分割の定義がまだです。分割は意外に難しい概念です。

【P010】n次元単体の呈示(続き)

分割は切断(Cut)と密接な関係が(Closely Related)あります。(下図)

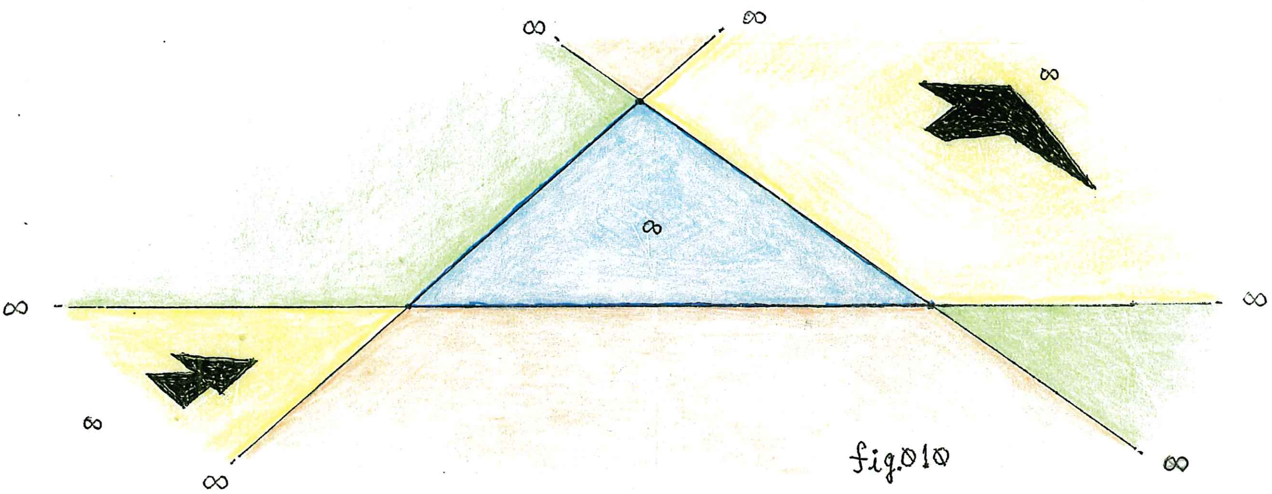


fig.010

この図は2次元空間を3個の1次元部分空間(直線)で切断したものです。この切断によって、この2次元空間は7個の領域に分割されました。数字7の由来は何でしょう! ちょと不思議ですね。1個は中央の有界な領域、つまり2次元単体です。3個は2次元単体と一辺で接する無限領域です。無限遠点が実在するとすれば、これらも3頂点3辺から成る2次元単体ということになります。また、無限遠点ではなく、無限遠の領域が実在するとすれば、例えば図の右上の領域は、無限遠領域を越えて、左下の無限領域に戻って来たと考ることも出来ます。残りの2つの無限領域についても同様です。この場合、2次元空間は4個の2次元単体に分割されたということになります。さらに、無限遠領域においても、3個の直線が上図のように交わっていると考えることも出来ます。この場合、無限遠領域にも1つの2次元単体が存在することになります。2次元空間は$8=2^3$個の2次元単体に分割されたということになります。これは分かり易いですね。2分割を3回繰り返せ(Repeat)ば8分割されると云うことになります。無限大∞や無限遠領域を考えることはとても有意義(Useful)です。また後で出て来るかもしれません。∞に対して0(Zero)があります。無限小の世界です。0点ではなく、0領域を考えることも出来ます。例を挙げてみましょう。行列式(Determinant)が0となる$n \times n$の行列の集合です。これらの行列は積に関して閉じています。しかし逆行列が存在しないので群(Group)ではありません。また和に関しては閉じていないので環(Ring?)でもありません。しかし、無矛盾な数学的実体として、その構造を考察してみるのも有意義だと思います。ユークリッド幾何学を越えた話をしてしまいました。
前ページの右図(fig009.2)を見よ。2次元単体がが4つの互いに合同な2次元単体に分割されています。中央の2次元単体に注目して下さい。それに関連した

【P011】6月15日(月) n次元単体の呈示(続き)

3個の2次元平行体が存在します。その1つを青線で強調し(Emphasise)ました。どうして3個なのでしょうか？ 中央の2次元単体に注目して下さい。この2次元単体と左下の2次元単体は1つの辺を共有しています。この2つの2次元単体は同じ1つの2次元平行体を2分割して得られた片割れ同士だと考えることが出来ます。分割は切断によって成されます。切断直線が、2つの2次元単体が共有している辺が乗っている直線です。つまり共有辺と2次元平行体は1対1で対応し(Correspond)しています。2次元単体は3個の辺を持ちます。ですから、それに関連した平行体の数は3です。分割して出来た4個の2次元単体のどの2つのParityも同じであることが見て取れます。どうしてなのかは解りません。3次元単体の場合にもいくつか(8個)の互いに合同な3次元単体に分割することが可能でしょうか？ 今のところ解りません。頭の中で想像す(Imagine)ることが出来ません。

3次元単体とは、4面体のことである。一般に、3次元単体は、4つの頂点と6つの辺を持つ。またその名(4面体)が示しているように4つの面を持つ。3次元単体にはその内点も含まれているものとする。従ってその3次元体積V_3を考えることができる。3次元単体の6つの辺の長さに対応して、3次元単体は6なる自由度を持つと云う(下図参照)

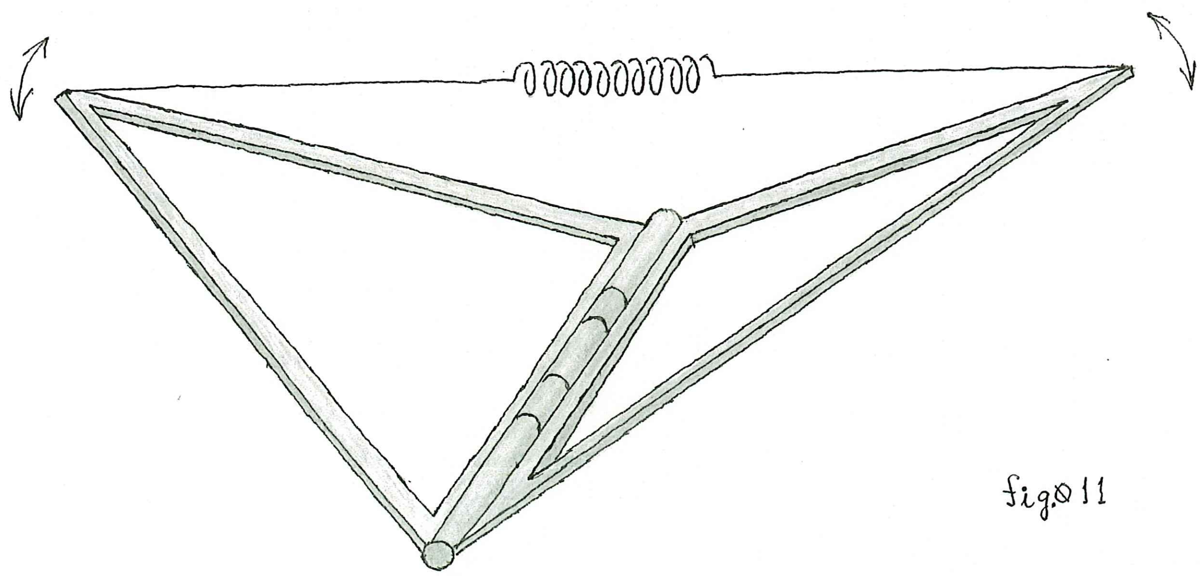


fig.011

5個目までの自由度が、蝶番(チョウツガイ)(Hinge)や、蝶(Butterfly)の羽(Wings)の辺の長さとしてかってに固定されたとしよう。(上図) 6個目の自由度は2つの羽の頂点をつないだ発条(バネ)(Spring)として描かれている。これは自由に延び縮みすることができる。蝶番は良く出来た日本語だと思う。蝶は勿論てふてふのことである。

【P012】n次元単体の呈示（続き）

3次元単体の4つの面はそれぞれ2次元単体である。3次元単体の6つの辺は1次元単体である。また3次元単体の4つの頂点は0次元単体である。頂点の個数と面の個数が等しく4であることに注意しよう。これは偶然で（Accidental）はない。

2次元単体の呈示のところで平面3角法について言及し（Refer）ましたが、これを2次元単体法と改名す（Rename）ることにする。

3次元単体では辺の長さや、面の2次元体積や、3次元単体自身の3次元体積について考察することになるが、さらに2つの辺が成す角度や、2つの面が成す角度や、頂点を共有する3つの辺で定まる立体角も考察の対象となる。これらの量の間に成り立っている一連の恒等式を見い出すことが課題となる。（下図）

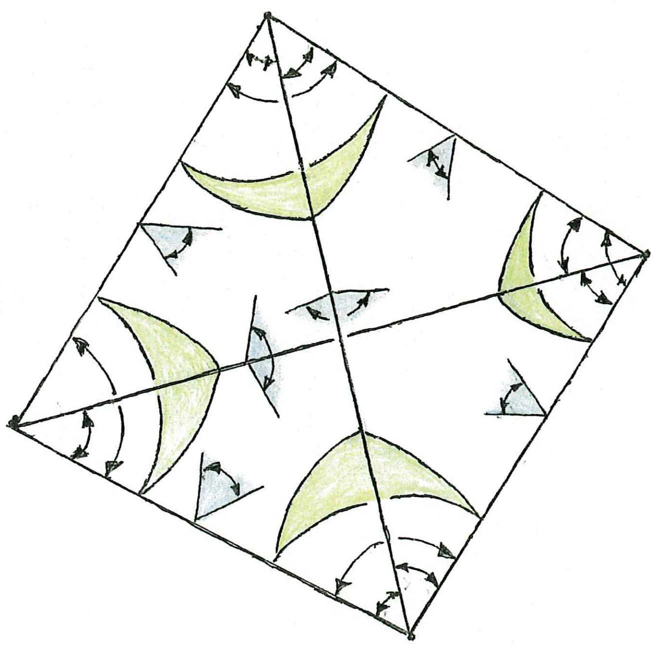


fig.012

これらの恒等式たちは、3次元単体法とでも呼ぶべき一連の恒等式としてまとめることができるものもあれば、そうでない恒等式も存在するかも知れない。立体角を論じるには、球面3角法を用いる必要がある。球面3角法も2次元球面単体法と改名しておくことにする。3次元球面単体法も考えられるのかもしれない。一般にn次元単体法やn次元球面単体法なるものが存在するのかもしれない。

2次元単体の辺の長さに関して3個の不等式が存在するように、3次元単体の場合にも何らかの不等式が成り立っていると思う。2次元単体にとって、辺は

【P013】6月16日(火) n次元単体の呈示(続き)

面であると考えるべきかもしれない。頂点の個数と面(つまり辺)の個数は等しく3である。こう考えれば2次元単体に関する不等式は、3次元単体の場合にはその4つの面の面積の間に成り立つ不等式である。どんな不等式なのかは、直感的に(Intuitive)は明らかですね。3次元単体が一次元分だけ縮退する場合、それが2次元単体に縮体するとは限らない。fig012は4角形に縮退した3次元単体のようにも見えますね。この紙面は2次元平面(の一部)だと云えます。$n \geq 3$ の n 次元の幾何学的実体そのものを2次元平面に描くのは原理的に(principle)不可能です。そのため、それらを2次元平面に射影し(Project)た図形を描いて、読者の直感に訴えることになります。下図に3次元単体の重心を描きました。

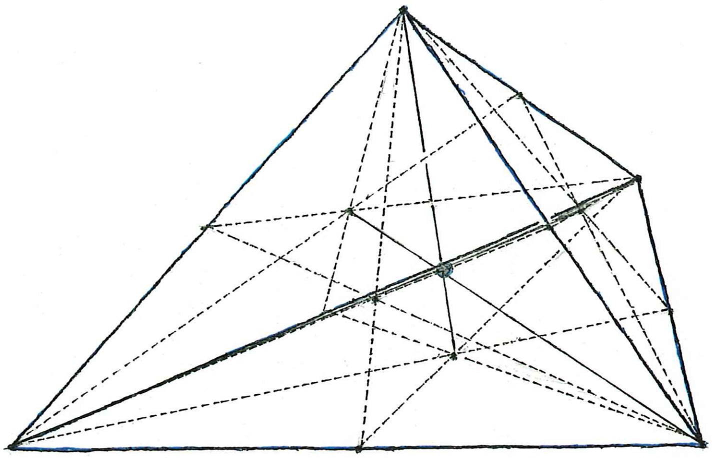


fig.013

ちょっと失敗してしまいましたね。奥の辺といくつかの補助線が重なって見えるような視点から(View)描いてしまいました。重心は直線たちの4重交点になっています。このことは証明する必要があります。僕の描いたのは、4つの面(2次元単体)のそれぞれの重心を作図し、各面の重心と、その面に乗っていない合対する第4の頂点とを結んだ線分を描いたものです。これら4本の線分が同一の1点で交わる(Cross)のです。その1点が重心です。ちょっと不思議ですね。
既に(Already)に触れ(Mention)たように、3次元単体にも内接球や外接球が存在します。内接球は4つの面すべてと接する球体で、これは、3次元単体に集合として含ま(Include)れます。外接球は、その表面に単体のすべての頂点が乗っているような球体で、これは、3次元単体を集合として含んでいます。$n \geq 3$ 以上の n 次元単体にはもう1つの球体が存在します。3次元単体の場合に関して云えば、6個の辺すべてに、その表面が接しているような球体です。この球体のことを単体の(に関連した)満腹球(Full Sphere)と

【P014】n次元単体の呈示（続き）

呼ぶことにします。廣也に聞いたら、満月（Full Moon）がいいんじゃないかと言っていた。どちらもFullを用いているので、満腹球と呼ぶことで満足し（Satisfy）た。

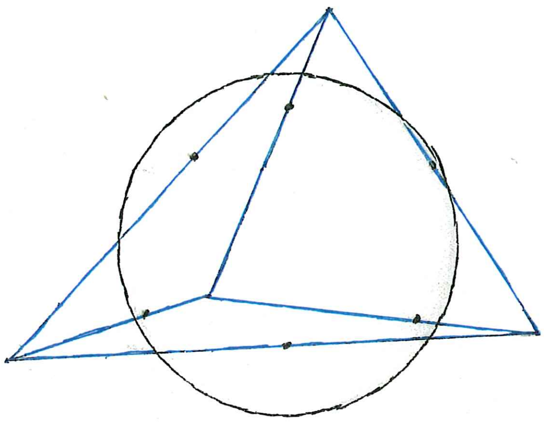


fig.014

満腹球を想像するのはちょっと難しいだろうと思う。３次元単体の面を取り払って辺だけを残し、辺を鉄格子だと考えよう。つまり檻（Cage）だとします。この中に球体状の宇宙生物を入れてペット（Pet）として飼う（Feed）ものとします。ペットは次第に（Gradually）太り始め、まず１つの辺に接します。さらに太ると、才2、才3、…の辺にも接し、最後に６個目の辺に接して、それ以上太らなくなるでしょう。但し適切な３次元単体であればです。この球体を満腹球と呼ぶわけです。解ってもらえたと思うのですがどうでしょう。２次元単体の満腹球は内接円と一致します。$n=2$ の特殊性の１つです。どのnにもnに固有な（Peculiar）特殊な性質が有るのかもしれません。

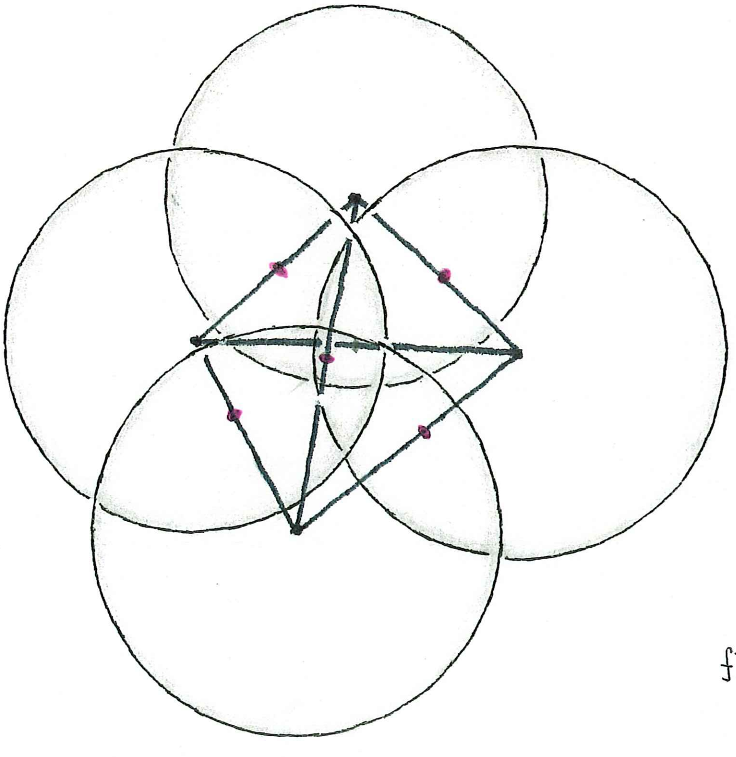


fig.015

【PQ15】6月17日(水) n次元単体の呈示(続き)

fig.Q15を見よ。これは2次元単体に関する図fig.006.3の3次元版(Version)です。各頂点を中心とする4つの球体たちが互いに接し合っています。このような球体たちが、すべての3次元単体に関連して存在する訳では有りません。n>4の場合にも同様です。接し合うn次元球体が存在するn次元単体のことを接球的n次元単体(Touching Spherical n Dimentional Simplex)と呼ぶことにします。すべての2次元単体は接球的2次元単体です。これもn=2の特殊性の1つです。接球的3次元単体の自由度は4です。互いに接し合う球体たちの接点のことをがちんこ点と呼ぶことにします。fig.Q15ではがちんこ点を赤点で示しています。がちんこ点はすべて、いずれかの辺に乗っています。fig.Q07で示した球と同様に、接球的3次元単体にも、互いに接し合う4つの球体たちすべてと直交する球体が存在します。(下図)。

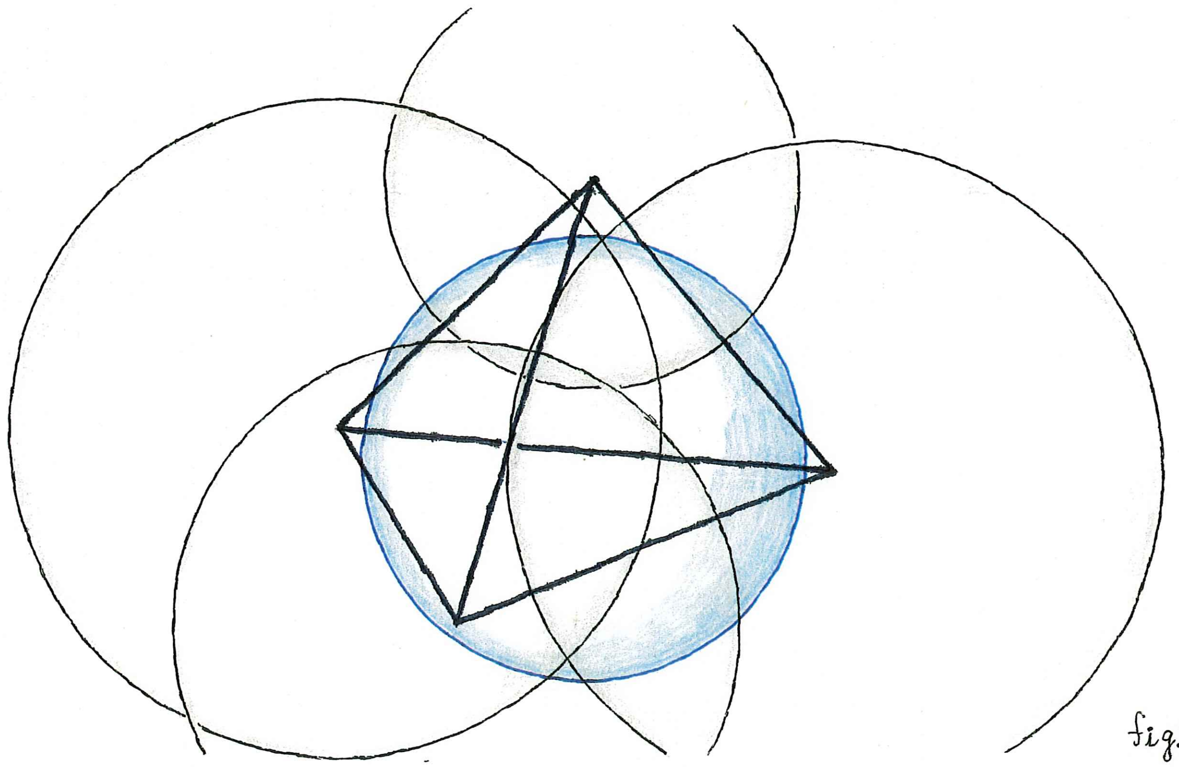


fig.Q16

この球体は内接球ではありません。満腹球です。このことは証明する必要があります。それにしても3次元的な幾何学的実体を2次元の紙面上で表現するのは難しい。さらにそれを見て3次元的実体として想像するのはもっと難しいと思われます。読者である貴方はどうですか? fig.Q16では、僕は敢て、がちんこ点や、直交し合う球体たちがその表面において現れる交線としての曲線、これは円ですが、紙面上では楕円(Elipse)に見えるはずですが、描きませんでし

た。絵が繁雑に(Complicated)に成り過ぎ、貴方の想像力や直感の妨げ(Disturb)になると思ったからです。それだけではない。それらを適切に(Right)描くのが困難(Difficult)だからです。射影幾何学の問題です。3次元単体にも、2次元単体の場合にそうであったように(fig.009)、それに関連した幾つかの3次元平行体が存在します? fig.009.1に相当する(Correspond)絵を描きました。(下図)

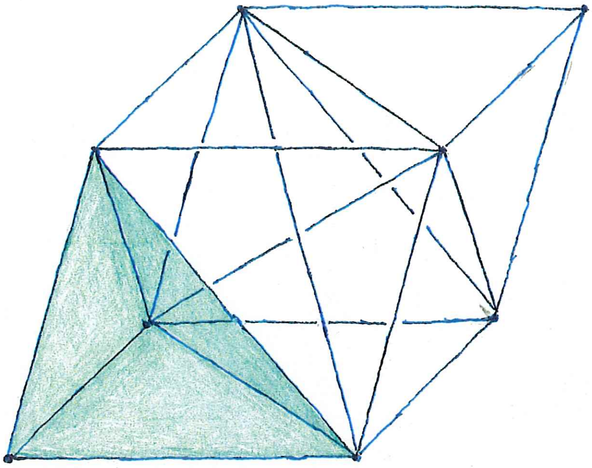


fig.017

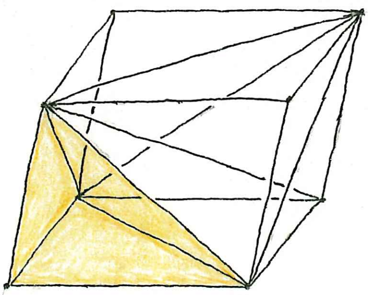


fig.018.1

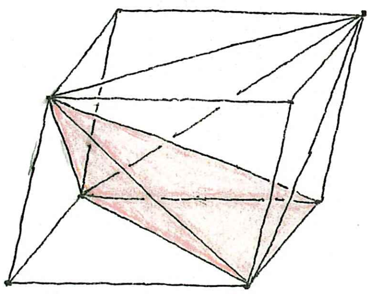


fig.018.2

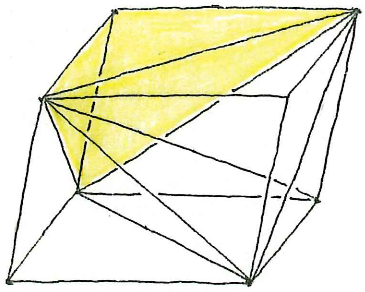


fig.018.3

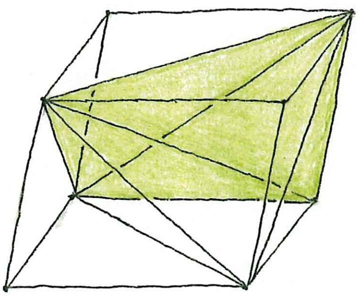


fig.018.4

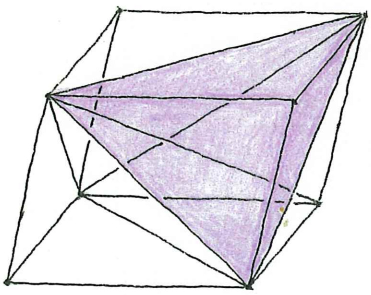


fig.018.5

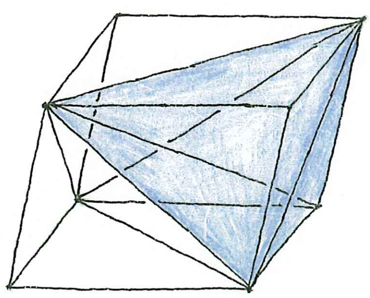


fig.018.6

【PQ17】 n次元単体の呈示（続き）

fig.Q17は分りにくいですね。6個の3次元単体を特定する（Specify）のがむずかしいです。そこでfig.Q18でそれぞれの単体を色分けして描いてみました。fig.Q17とfig.Q18とでは分割の仕方が異なります。いくつもの分割が考えられます。下図はfig.QQ9.2に相当する絵です。

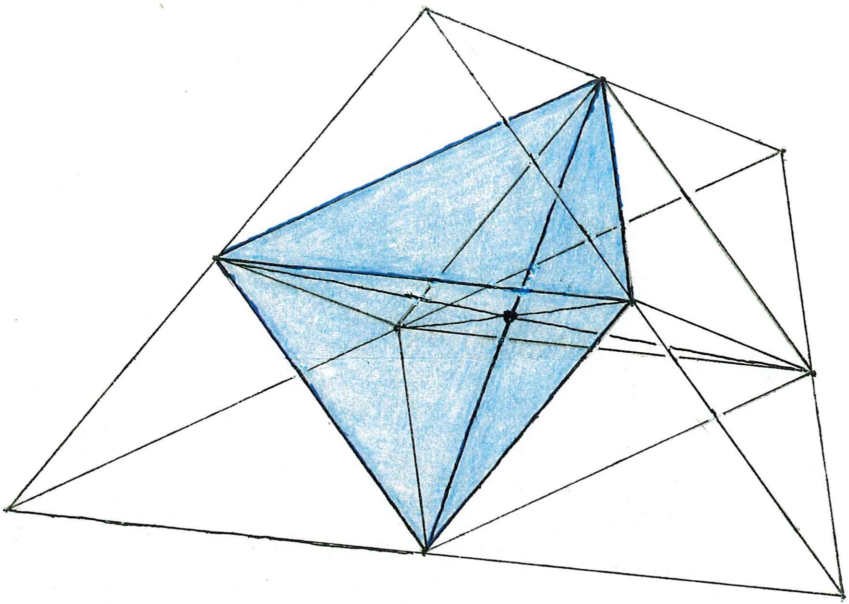


fig.Q19

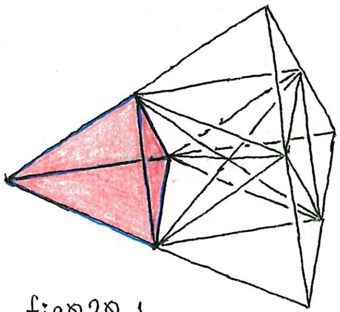


fig.Q20.1

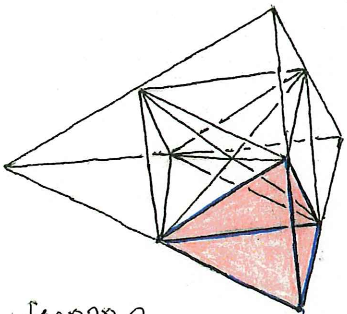


fig.Q20.2

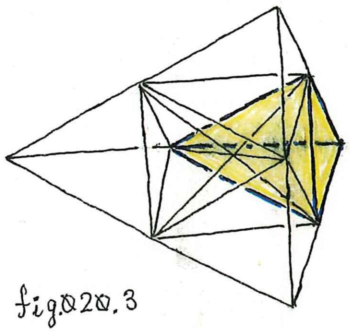


fig.Q20.3

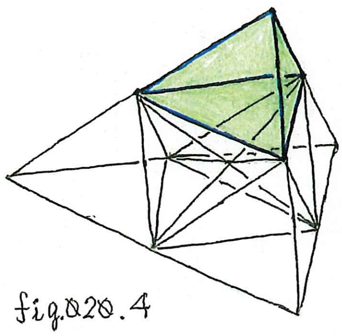


fig.Q20.4

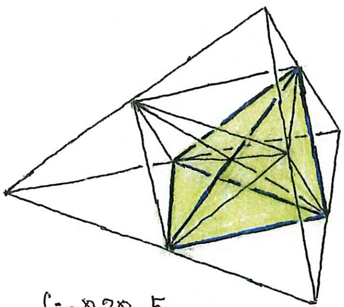


fig.Q20.5

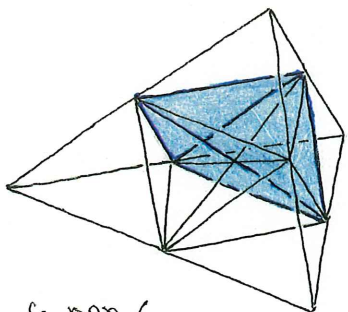


fig.Q20.6

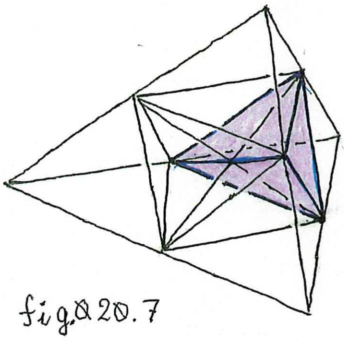


fig.Q20.7

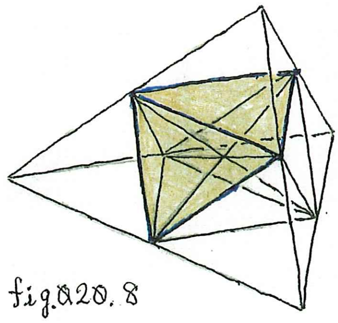


fig.Q20.8

fig.Q20.1～.4までは良いとして、fig.Q20.5～.8では、もしかしたら間違って（Wrong）いる可能性がある？ 何れにしても分割法方は一通りではない。これは確かである。作図過程で、興味深い（Interesting）1点が見付かった。（下図）。

【P018】n次元単体の呈示（続き）

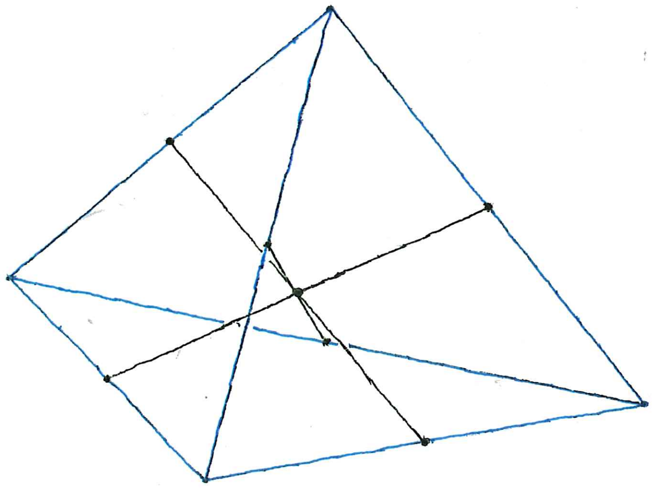


fig.021

3次元単体の6個の辺は、互いにねじれの位置にある2個の辺の対(Pair)から成る3組(Group)に分類できます。ねじれの位置にある辺とは、頂点を共有しない辺のことです。このような分類が出来るのは3次元単位の場合に限られます。ねじれの位置にある2辺の中点同士を結ぶ線分に注目します。これら3本の線分は同一の1点で交わる(と思われます)。もしそうなら、その点のことを捩点(Twist Point)と呼ぶことにします。捩点は重心と一致すると思われます。
fig019, fig020で3次元単体を8個の3次元単体に分割しましたが、2次元単体の場合(fig.009)とは異なり、3次元平行体は出現しませんでしたね。3次元平行体や3次元単体そのものが3次元単体たちに等体積分割できたと同様に3角柱も3次元単体に等分割できます。(下図)。

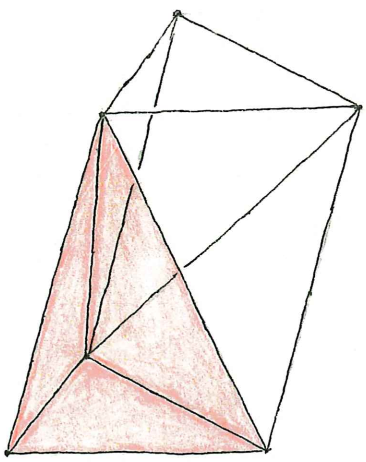


fig.022.1

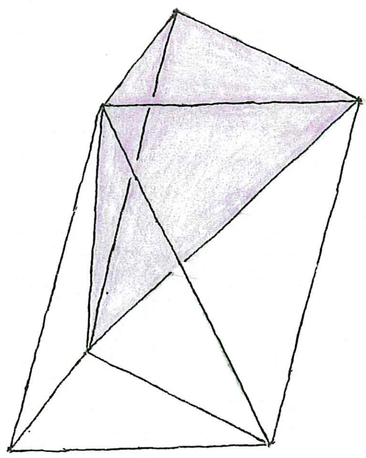


fig.022.2

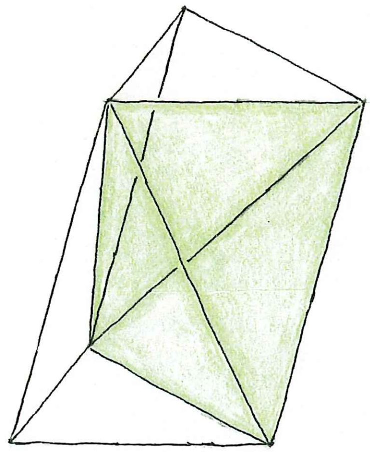


fig.022.3

いくつもの分割の仕方が有る。上図はその1例に過ぎない。6通りの分割の仕方については済に見出している。下図にそれを示す。もっと他にも存在するかもしれない。その可能性を考察する際に役立つと思われる。

【PQ19】6月21日(日) n次元単体の呈示(続き)

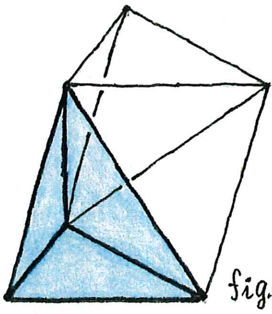


fig.023.1

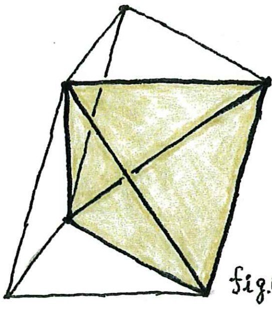


fig.023.2

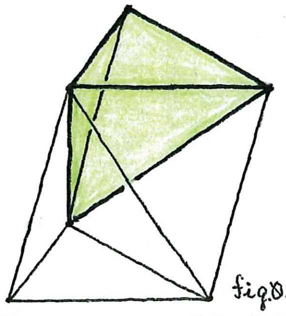


fig.023.3

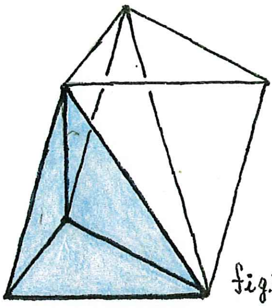


fig.024.1

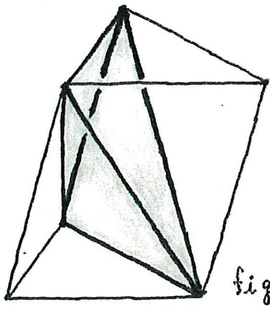


fig.024.2

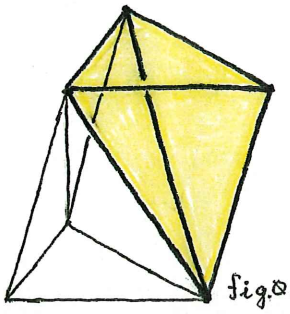


fig.024.3

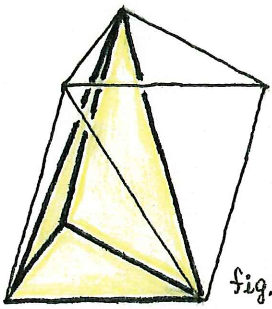


fig.025.1

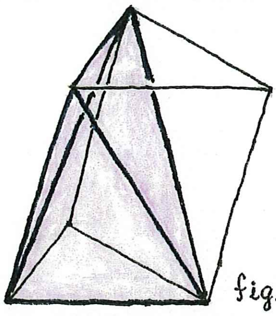


fig.025.2

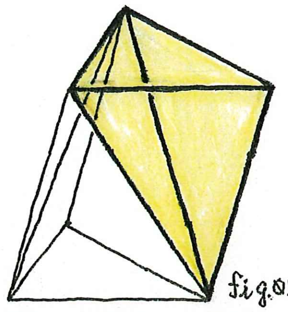


fig.025.3

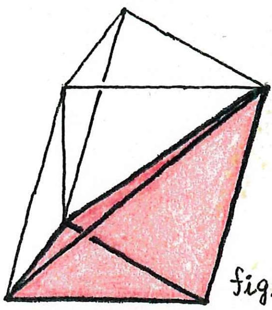


fig.026.1

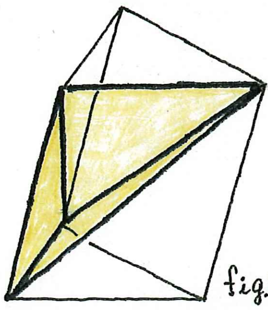


fig.026.2

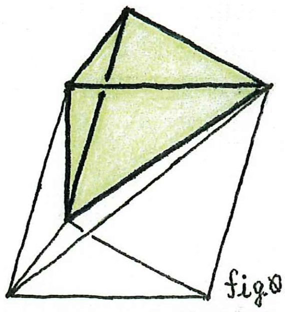


fig.026.3

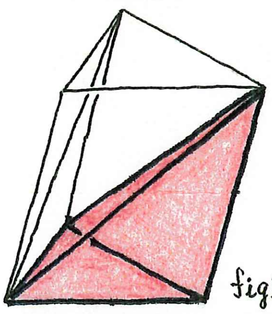


fig.027.1

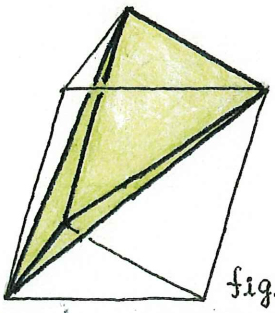


fig.027.2

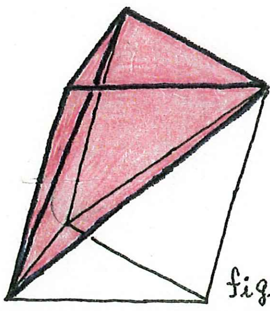


fig.027.3

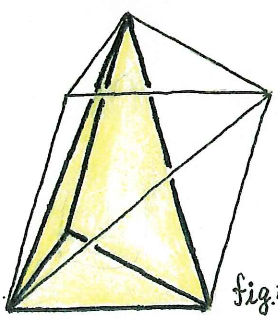


fig.028.1

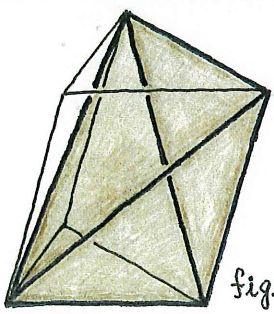


fig.028.2

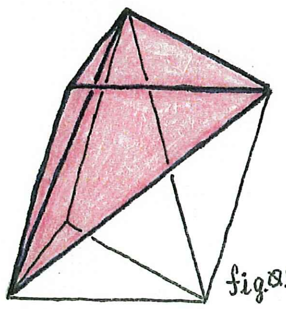


fig.028.3

上記の6通りの分割の仕方しか存在しない。(図を良く観察すれば明らかであろう。)

単体の各頂点(Apex)に関して、円錐(Cone)を考えることが出来る。(下図)

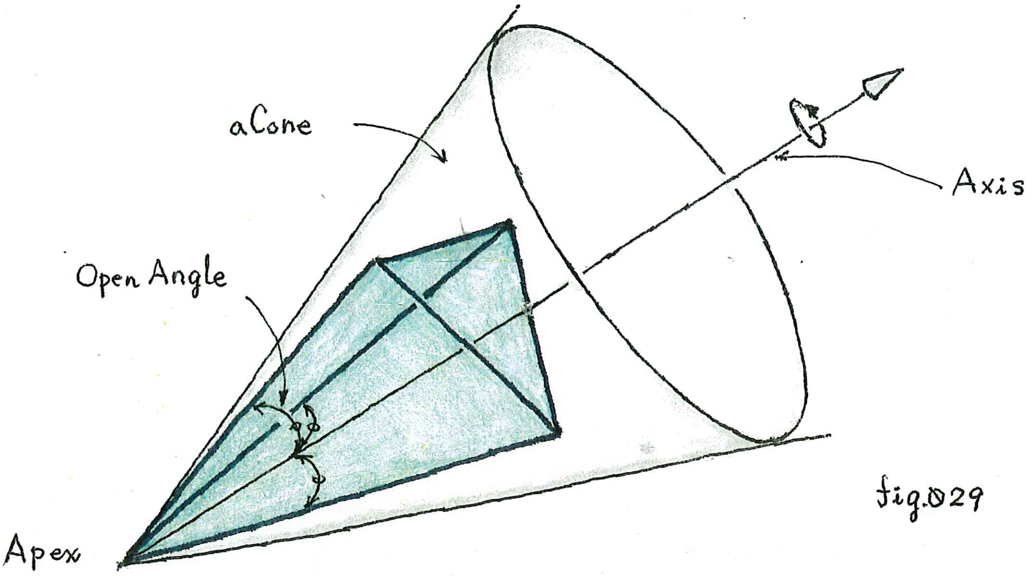


fig.029

これを頂点円錐(Apex Cone)、略してエイコーン(aCone)と呼ぶことにします。aConeは単体の頂点を頂点とする円錐で、頂点を共有する辺のすべてがその上に乗っています。aConeには軸(Axis)が1本存在します。これをaConeの軸(Axis of aCone)と呼ぶことにします。aConeはその軸のまわりの回転に対して不変です。軸はaConeの回転対称軸です。単体をかってに定めるごとに、その各頂点に一意的にaConeが定まります。しかし、1つの円錐を定めたとしても、それをaConeとするような単体は無数に存在します。(下図)。

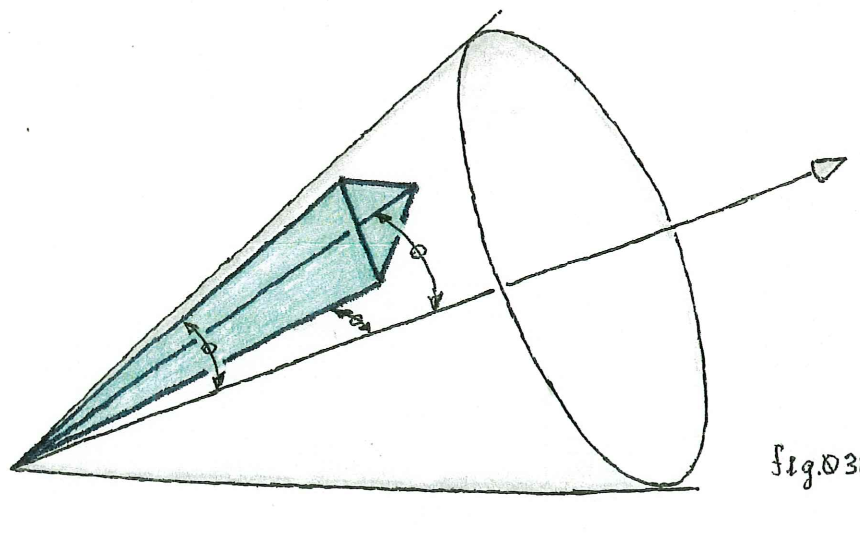
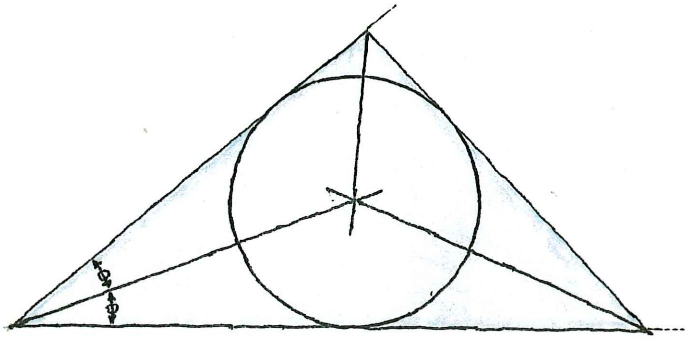


fig.030

aConeの軸と単体の辺の成す角はすべて等しい。回転対称性から明らかですね。この角のことをaConeの開口角(Open Angle)と呼ぶことにします。またaConeには

【P021】n次元単体の呈示（続き）

立体角もあります。開口角と立体角は一つの恒等式で関連づけられます。一般のn次元単体（$n \geq 2$）に対してaConeを考えることができます。$n=2$の場合は何でしょう。fig.006.1を再記します。



再記：fig.006.1

1頂点を共有する2つの辺自身がaConeそのものです。角の2等分線が軸になります。3本の軸は1点で交わります。その点は内接円の中心です。これは$n=2$の特殊性です。$n=2$の場合は内接球と満腹球は一致します。一般の単体ではそうではありません。aConeの軸が交わるのは満腹球の中心であると予想されます。このことはfig.030からも分かるでしょう。aConeの軸は単体の外部にはみ出しています。内接球は単体からはみ出すことは有りません。その中心も単体からはみ出しません。満腹球の中心は$n \geq 3$では、単体からはみ出す場合も有ります。

下図は$n=3$の場合のaConeを描いた（つもり）です。単体自身と満腹球と4つのaConeをすべて描いてみました。

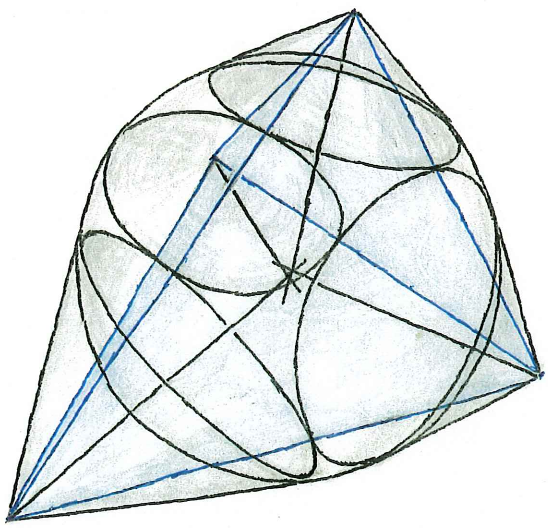


fig.031

あまり良く描けませんでした。どこか間違っているような気がします。貴方はどう思いますか？接球的単体だったらもっとそれらしく描けたかも知れません。でも、気にしないことにしましょう。aConeと満腹球の関係を証明する際には、上図を用いることはないでしょう。

 6月23日(火) n次元単体の呈示(続き)

fig.006.3 (P007)を見よ。互いに接し合う3個の円が描かれている。この3個の円に囲まれた領域内に、これら3個の円すべてと接する円が存在する。それを想像することはたやすいでしょう。満腹球の呈示(P014)の際に用いた球体状の宇宙生物と同じような例え話ができる。2次元の円状の宇宙生物を、3つの円で囲まれた閉領域に入れてペットとして飼うものとします。ペットは次第に太り始め、まず1つの円に接します。さらに太ると才2の円にも接します。最後に才3の円にも接して、それ以上太らなくなるでしょう。これが、与えられた互いに外接し合う3個の円すべてと外接する才4の円です。 もう1つの場合も想像することができます。ちょっと残酷(Cruel)な話になります。与えられた互いに接し合う3個の円を、2次元の円状の宇宙生物に食べさせます。そして何も餌を与えずにそのまま放置するとします。宇宙生物は次第に痩せ(Thin)始め、まず才1の円と内接します。さらに痩せると才2の円にも内接します。最後に才3の円にも内接して、それ以上痩せなくなるでしょう。これが、与えられた互いに外接し合う3個の円すべてと内接する才4の円です。下図に互いに外接し合う4個の円と、それらのうち1つを除く3個の円すべてと内接する円を同時に描いてみました。

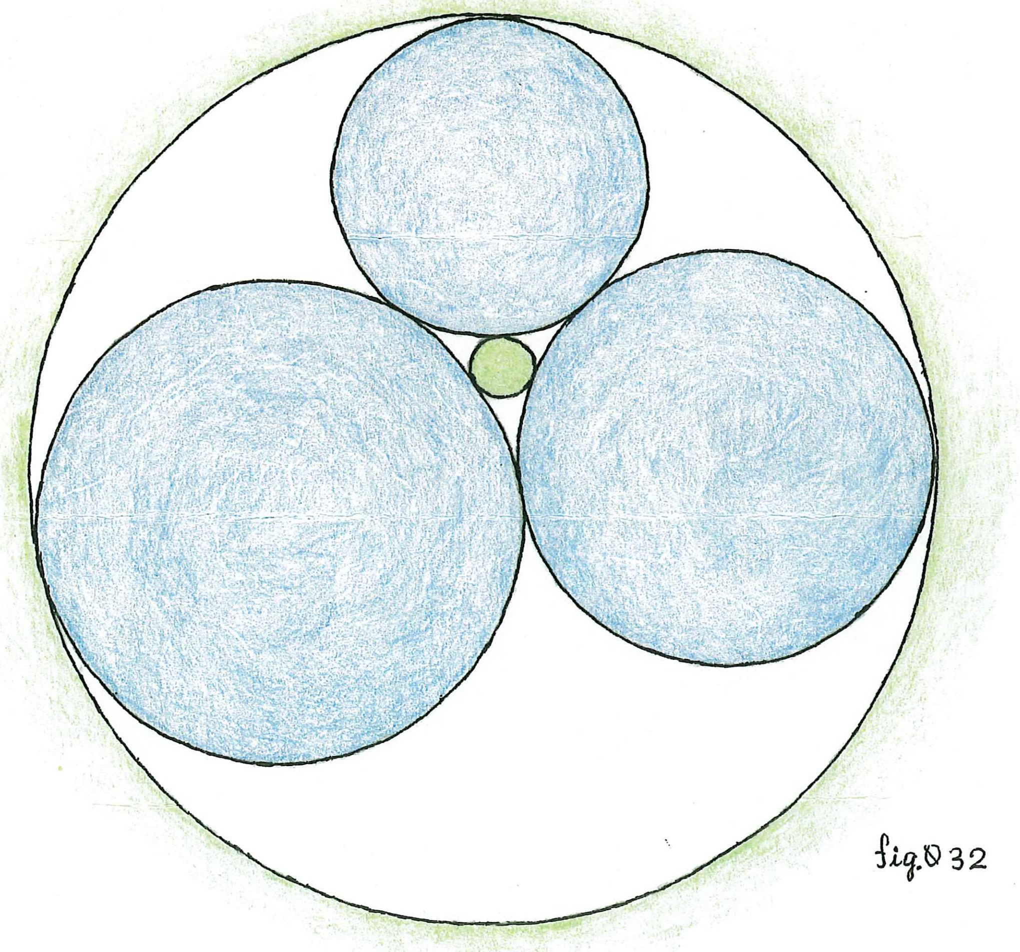


fig.032

どうやって作図したか貴方に解りますか。

【P023】6月24日(水) n次元単体の呈示(続き)

互いに外接し合う4個の円のうち2個を固定(Fix)し、残りの2個を、接し合うという関係(Relation)を維持し(Maintain)ながら、自由に、連続的に変化させるものとします。このとき、半径の逆数が0を通過し負になる円が有ります。そして、互いに外接し合う円たちは、半径が負の円に内接することになります。このことは、互いに接し合う4個の円の半径の間に成り立つ恒等式は、半径の逆数たちの関係式で表わされることを示唆し(Hint)していると思われます。(下図)。

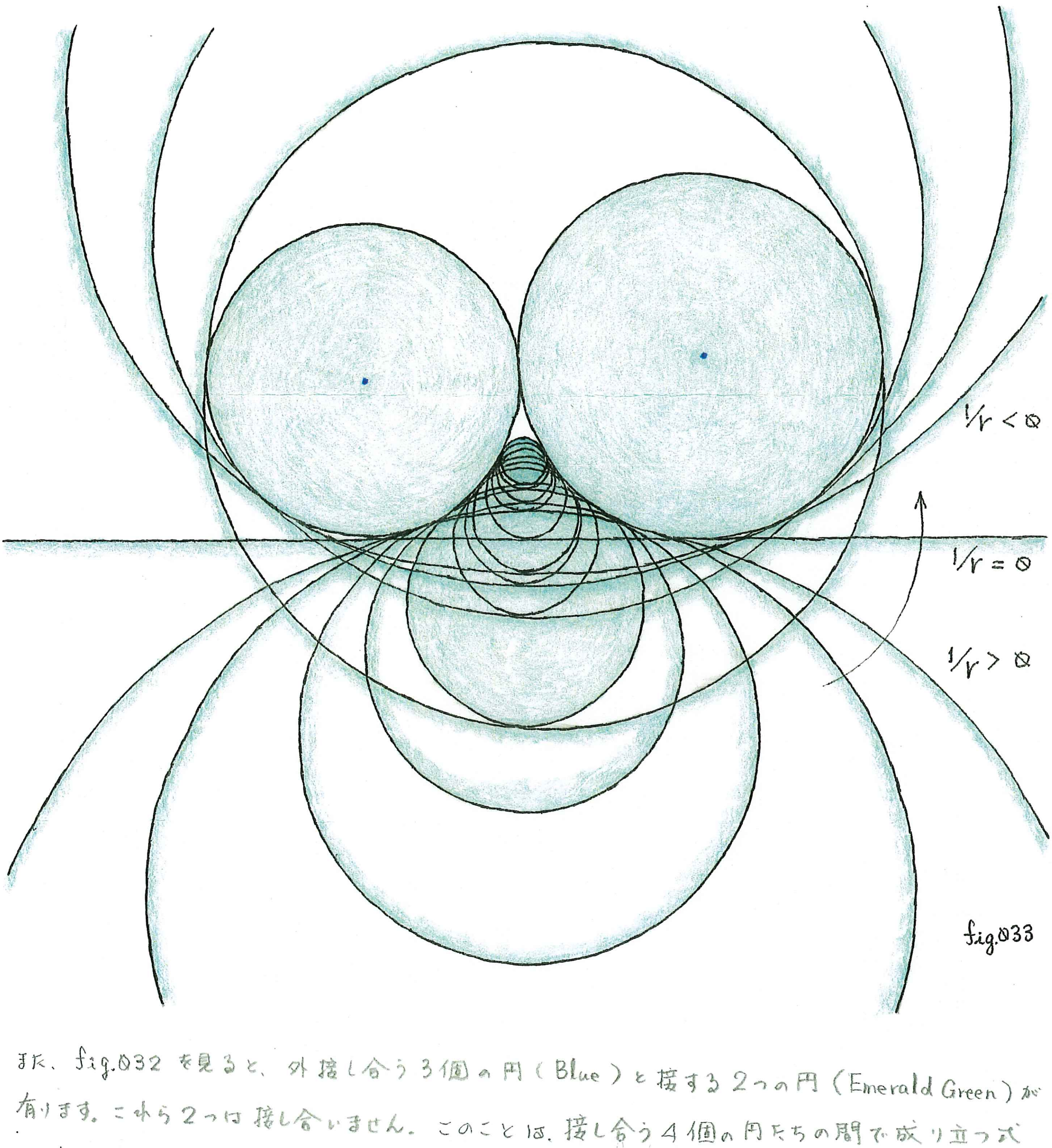


fig.033

また、fig.032を見ると、外接し合う3個の円(Blue)と接する2つの円(Emerald Green)が有ります。これら2つは接し合いません。このことは、接し合う4個の円たちの間で成り立つ式は、1つの半径に注目した場合、半径の逆数の2次式となることを示唆していると思われる。

【P024】6月25日(木) n次元単体の呈示(続き)

その2次式を $1/r$ に関する2次方程式として解くと、fig.032の2個のEmerald Greenの円に対応する解が得られる。(だろう)。でも解の1つが負になることが保証されるのでしょうか？ 後々これらについて議論するつもりです。
接し合う4個の円の半径の間に関して成り立つ式は接球的n次元単体のn次元体積 ${}_{t}V_n$ を求めることによって得られます。縮退した3次元単体の体積は、${}_{t}V_3 = 0$ です。左添字 t は touching の t です。このとき縮退した3次元単体のすべての頂点は同一平面上に乗ります。従って、各頂点に中心をもつ4個の球体たちの接点もこの平面上に乗っています。つまり、この平面によって切断された球の切断面(これは円です)も互いに接し合います。${}_{t}V_3 = 0$ がこれらの円の半径たちに関して成り立つ式です。

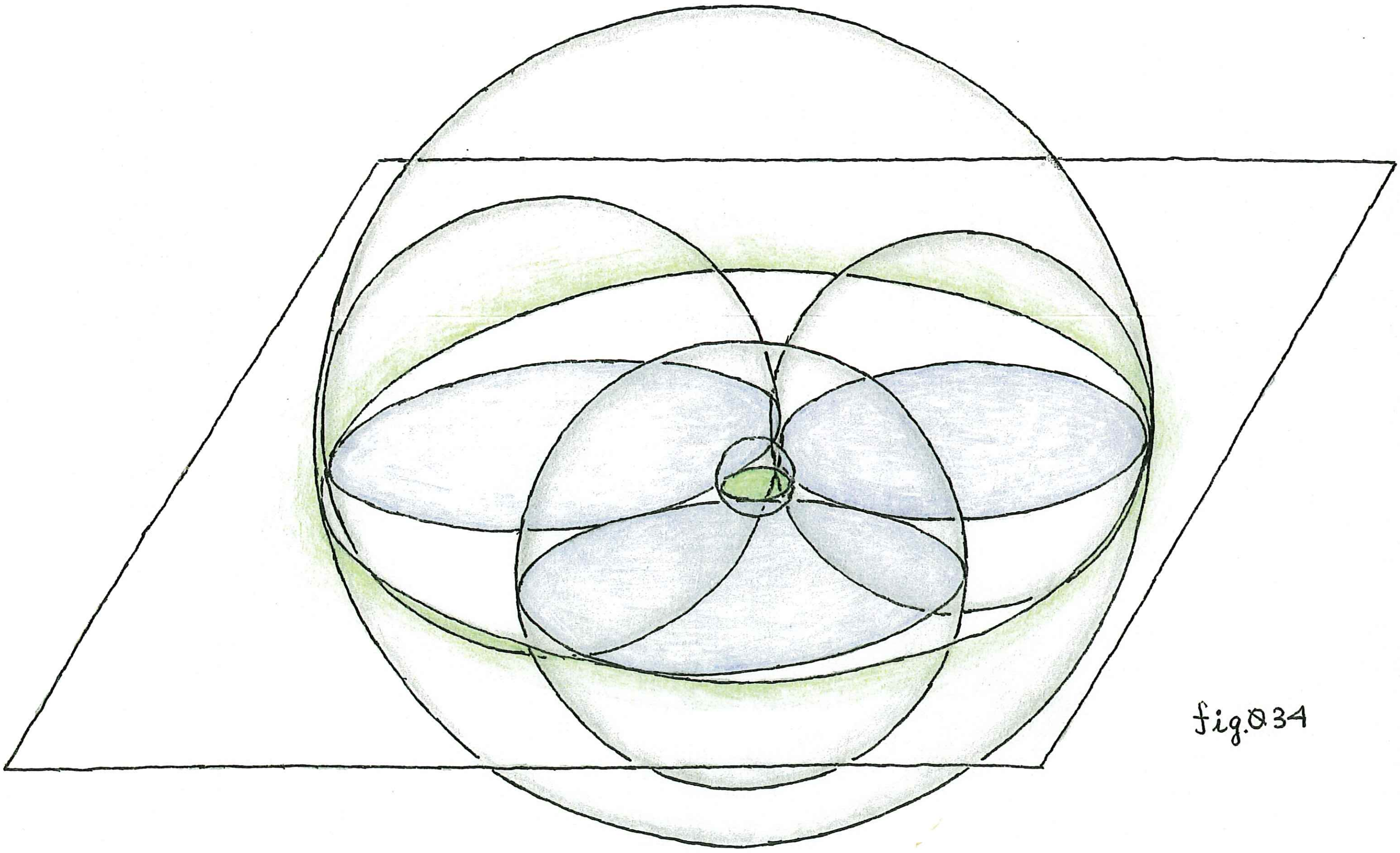


fig.034

Parityの話(P005)の所でも話しましたが、これも邪道だと思いませんか？ 2次元空間内の幾何学的実体の性質は、それが含まれている2次元空間内に限って議論されるべきだとも云える。勿論、僕はそういう議論を行って、${}_{t}V_3 = 0$ と同じ式を導出するつもりです。でもどちらの議論にしても、結局同じ代数的演算を行っていることになるのかも知れない。唯、幾何学的解釈が異なるだけなのかも知れません。${}_{t}V_n = 0$ は、より高次の次元における、互いに接し合うn次元球体たちの半径の関係を求める際にも有用です。

【P025】 n次元単体の呈示（続き）

当文書では、下図のような図形についても考察します。

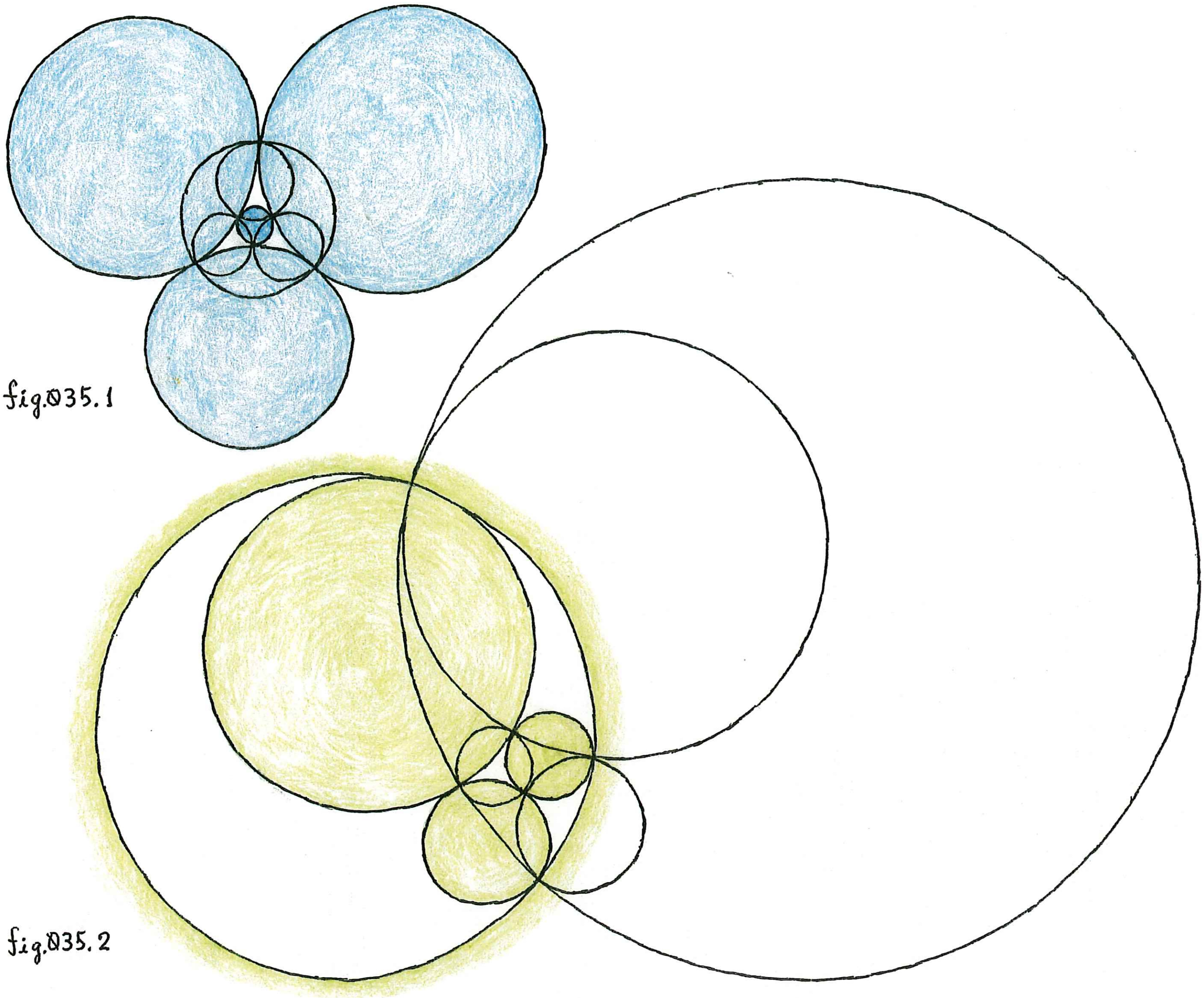


fig.035.1

fig.035.2

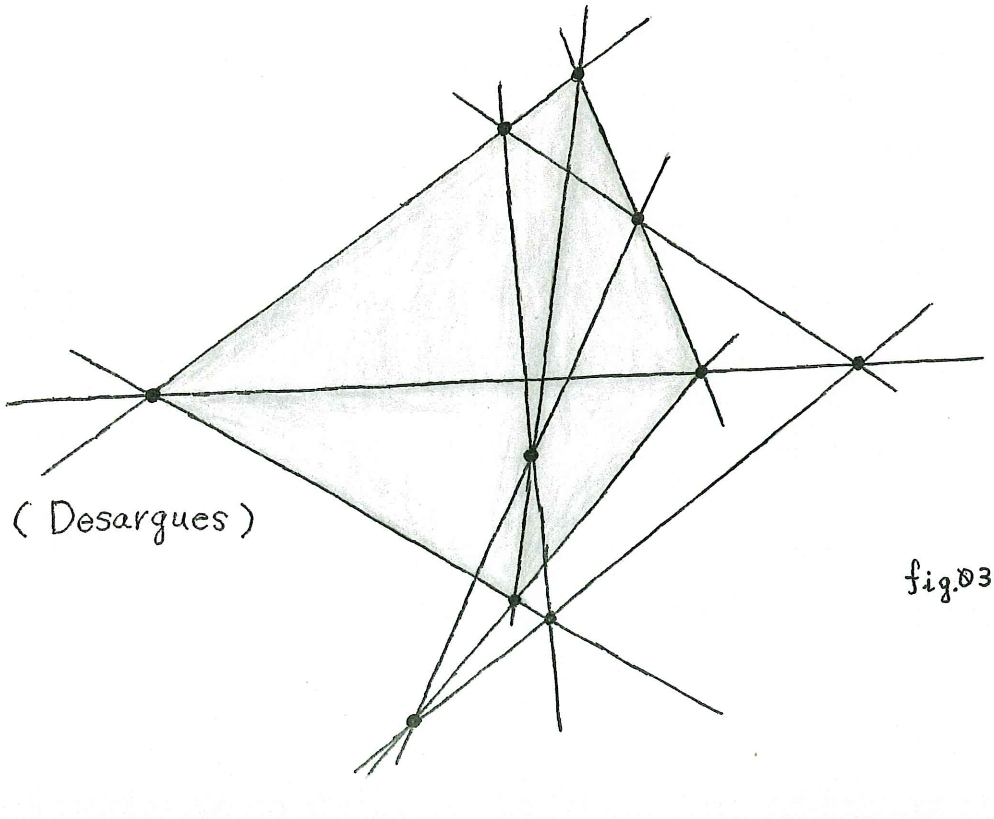


fig.036

【P026】6月26日(金) n次元単体の呈示(続き)

n次元単体はn次元空間上の幾何学的実体である。最初に述べたように、その正確な定義は後回し(Postpone)とします。

n次元単体は(n+1)個の頂点を持つ。これらは0次元単体である。n次元単体は$\frac{1}{2}n(n+1)$個の辺を持つ。辺は2つの頂点を結ぶ線分であり1次元単体である。n次元単体は、頂点の数と同じ(n+1)個の面をもつ。面は(n−1)次元単体である。n次元単体は(n+1)個の面に囲まれた閉集合である。つまり、その内点もn次元単体に含まれる。従って、そのn次元体積V_nを有する。平行移動,回転,鏡像変換によって不変に保たれる、n次元単体の諸性質を考察の対象とする。下図にいくつかのnについて、n次元単体を2次元平面(つまりこの紙面)に射影した図形を描いた。但し、n次元単体は透明で(Transparent)、辺だけが見えるものとした。また、すべての頂点が識別できる(内点に埋もれていない)ような方向から射影したものとした。また、辺の重なりぐあい(前後関係)は考慮しないで描いた。

fig037.00　n=0

fig037.01　n=1

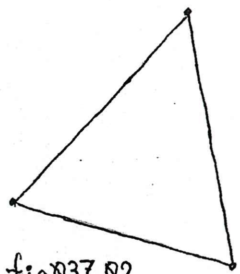


fig037.02　n=2

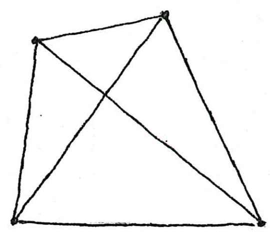


fig037.03　n=3

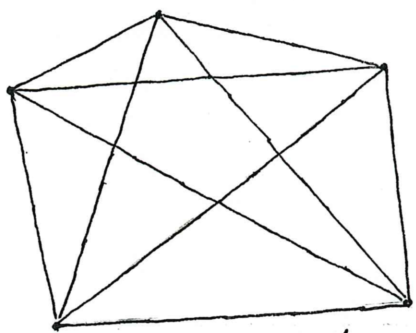


fig037.04　n=4

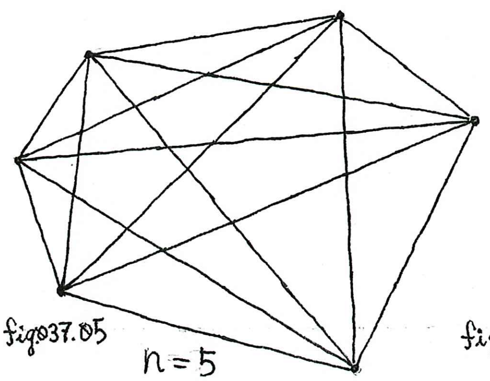


fig037.05　n=5

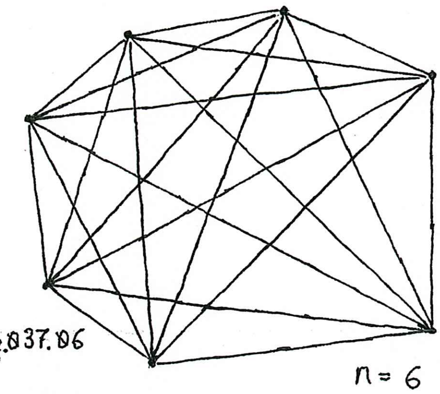


fig037.06　n=6

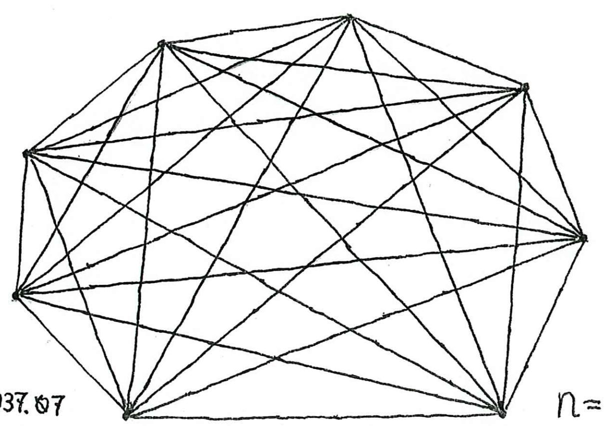


fig037.07　n=7

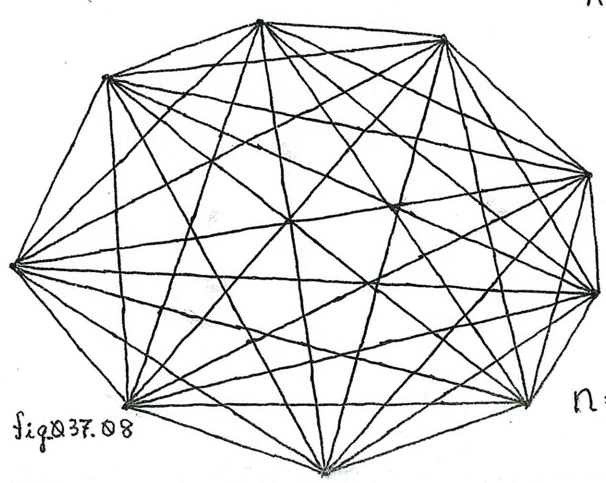


fig037.08　n=8

【P027】n次元単体の呈示（続き）

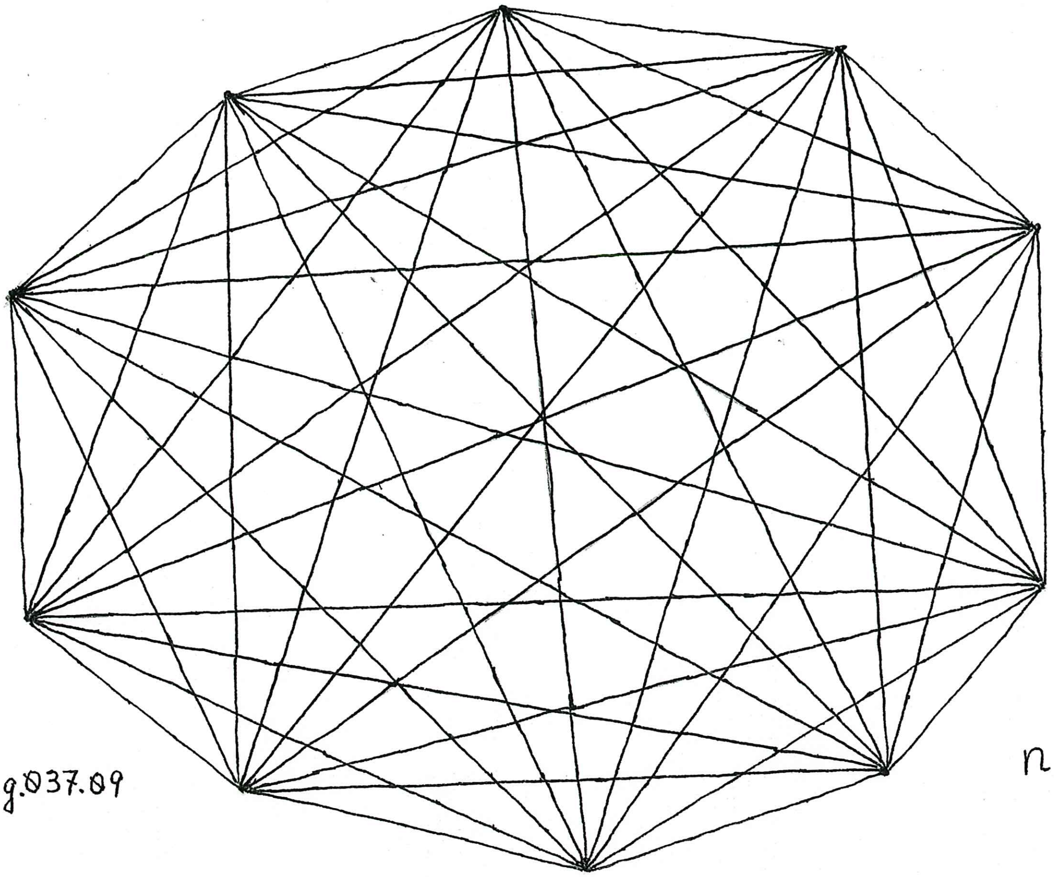


fig.037.09

$n = 9$

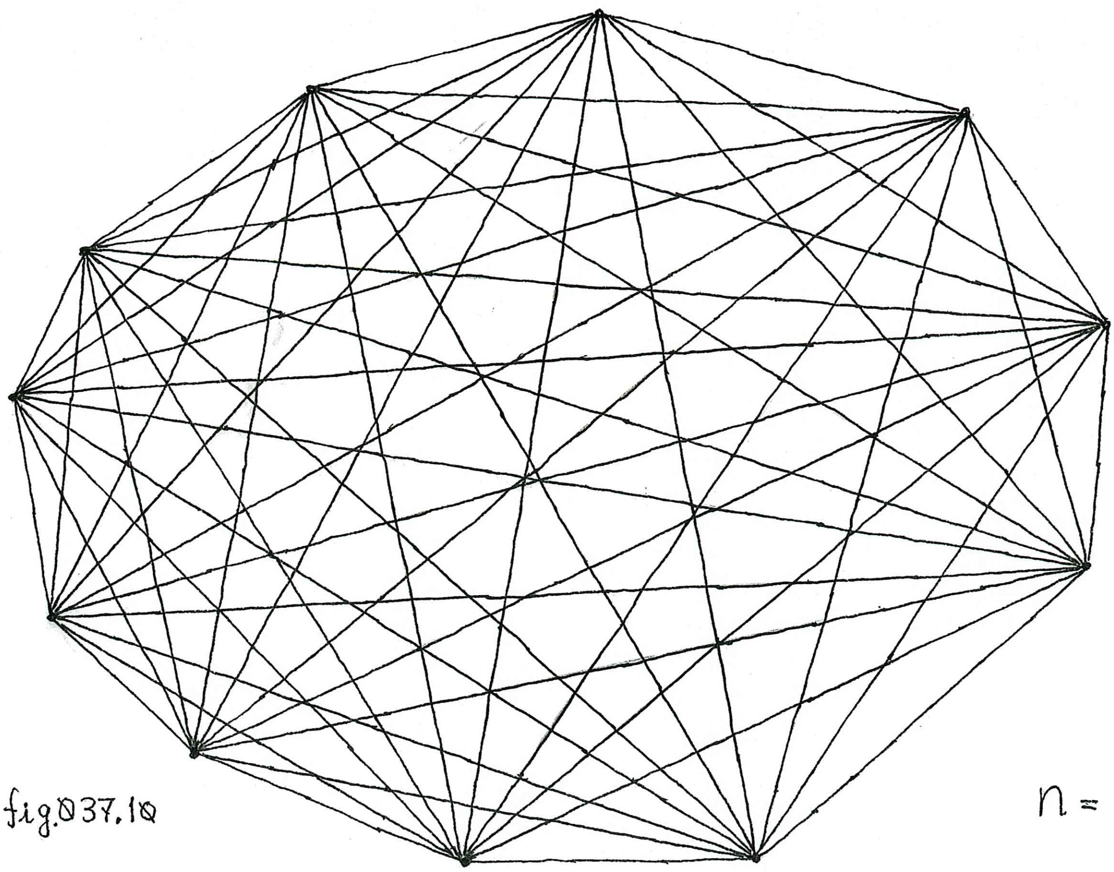


fig.037.10

$n = 10$

⋮

 6月27日(土) n次元単体の呈示(続き)

fig.013(P013)で3次元単体の重心を作図しましたが、奥の辺と補助線がほとんど重なっているような視点から描いてしまいました。そこで、『n次元単体の呈示』を終えるにあたって、4次元単体の重心の作図に挑戦(Challenge)します。

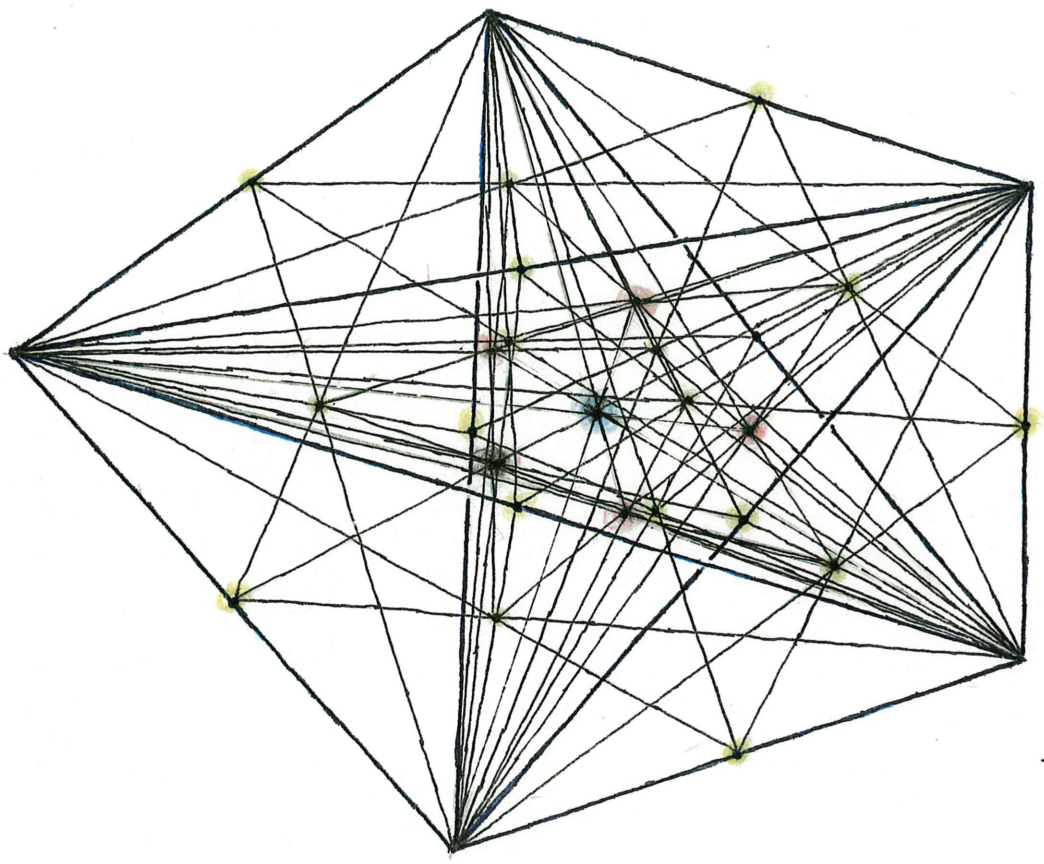


fig.038

青色で強調し(Emphasize)た点が与えられた4次元単体の重心です。赤色の5点は5個の面つまり3次元単体の重心です。銀色(灰色)の点は各3次元単体の面、つまり2次元単体の重心です。黄色(わかりにくいですが)の点は2次元単体、つまり辺の重心、つまり中点です。今述べたのと逆の順序で作図しました。それにしても重心とは不思議ですね。ある方法で線分を引くと、(3本以上の)それらが1点で交わるのです。ですが重心の定義はまだなされていません。重心とはそういうものだと云ってしまえばそれまでですが、そういう訳にはいきません。上図の重心は、平面上の5角形の重心のようにも見えますが、どう思いますか。

【PQ29】n次放射体の呈示

● n次放射体の呈示

n次放射体（n Degree Radiatix）の呈示をする。放射体もRadiatixも僕の造語です。Radiateを無理やりxで終らせて作ったものです。こういう名前を選んだのは、それを無限に小さくし、無限に広い視野で見たとしたら、平行線は一本の直線に重なり、すべての交点も1点に縮小し、下図のように放射状の2次元上の図形になるからです。

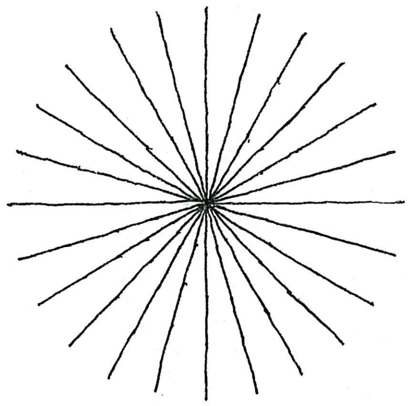


fig.Q39

n次元放射体を思い付いたのは、fig.Q37の図を描いている時にだと思われるかも知れませんが、そうでは有りません。2次元平面上の凸集合を分割するパターンを位相幾何学的に分類する問題を考えていた時に自然に表われた図形です。この分類問題については主題を変えて後述するかもしれません。表紙のfig.Q00は17次放射体（の一部）を描いたものです。対称性が崩れているのが良く分ります。放射体は作図誤差にとても敏感な（Sensitive）図形です。放射体には、直線だけではなく、包絡線（Envelope）としての同心円がいくつも存在します。fig.Q00では、その一部の円しか描きませんでした。それは円が多過ぎるからだけではなく、作図誤差により回転対称性が崩れているからです。n次放射体の全てを作図するだけではなく、ある観点から、その一部分だけを描いて考察する場合もあります。その図形も、混乱（Confusion）が生じない限りにおいてn次放射体と呼ぶことにします。

n次放射体の定義を、その作図方法を示すことによって、行うことにします。n次放射体は2次元平面上の図形です。まず1つの円が与えられたとします。この円を開始円（または基礎円）と呼ぶことにします。この基礎円の円周をn等分する点n個を円周上に定め（Plot）ます。この点たちのことを開始点（または基礎点）と

呼ぶことにします。このn個の基礎点の2個の点を通るすべての直線を引き（Draw）ます。これらは$\frac{1}{2}n(n-1)$本あります。次に、各基礎点における基礎円の接線を引きます。これらはn本です。全部で$\frac{1}{2}n(n+1)$本の直線を引いたことになります。これらの直線たちの中には互いに平行なものや、3本以上の直線が1点で交わるものも有ります。基礎点はn重交点です。最後に、基礎円と同じ中心を持つ包絡円をすべて描きます。包絡円とは、その上に1個以上の、直線の交点が乗っている円のことです。どの交点も何らかの包絡円に乗っていることになります。こうして出来上がっ（Complete）たのがn次放射体です。

fig000を見ても分るように、n次放射体はとても複雑（Complicated）な図形です。複雑と云うより寧ろ（Rather...than）込み入っていると言うべきかも知れません。でも、僕の持っている辞書には、複雑も込み入るにもComplicatedの訳が載って（Appear）いました。こういう訳で、n次放射体の全てではなく一部分だけを描いて考察する場合が多くなると思われます。$n=0$, $n=1$, $n=2$の時は何も面白く（Interesting）ないので、n次放射体は$n \geq 3$に対して定義されるとします。

n次放射体はその次数nによってかなり（Pretty）異なった振舞い（Behave）をします。特に偶数と奇数とではその違いが際立っ（Conspicuous）ています。また素数と合成数（幾つかの素数の積）とでも違いを見い出すことが出来ます。合成数の場合は、その因子（Factor）つまり約数（Measure）に関連した対称性が見出されます。

n次放射体には、包絡円だけではなく、特種な包絡曲線群が存在します。しかも、そのような包絡曲線群は2種類存在します。これらの曲線群もn次放射体の一部に含めるべきかも知れませんが込み入り過ぎて、何が何だか解らなくなってしまいます。表紙絵（fig.000）をいくら良く観察し（Observe）ても、その特種な包絡曲線群を見出すことは困難です。それらがどのような包絡曲線群であるかを知っている僕にとっても、fig.000にそれらを見出すことは出来そうにありません。17次放射体が込み入り過ぎているからであり、作図誤差が大き過ぎるからかも知れません。これらの特殊な包絡線群については、主題を改めて後述したいと思います。n次元（Dimension）とn次（Degree）とは異なります。n次元単体はn次元の幾何学的実体です。$n \geq 4$の単体を考察するのはかなり難しいです。それは、単体が複雑だからではなく、我々が3次元の宇宙に住ん（Inhabit）で

いるからでしょうか? そうではないと思います。我々の脳細胞(Brain Cell)たちは、シナプス(Synapse)を通じて(Pass)、所謂、神経細胞網(Neural Network)を構成しています。このNetworkは次元の制約(Limitation)を受けません。そのことは直感的には明らかです。いくらでも複雑なNetworkを張ることが可能だと思われます。にもかかわらず4次元以上の幾何学的実体を想像するのが難しいのは、進化論的にその必要が無かったからだと思われます。つまり慣の問題です。十分な(Enough)訓練を積め(Acquire)ば、4次元以上の幾何学的実体を取扱う(Deal with)ことが出来るはずです。n次元単体とは異なり、n次放射体は高々2次元の幾何学的実体です。ですから、いくら複雑だとしても、紙面に描くことによって、いくらでも、そのもの自体を観察する(Observe)ことが出来ます。複雑過ぎる場合には、その一部分のみを描いてみれば良いのです。

いくつかのn次放射体を描いて見ます。基礎円と基礎点を青色で強調しましょう。

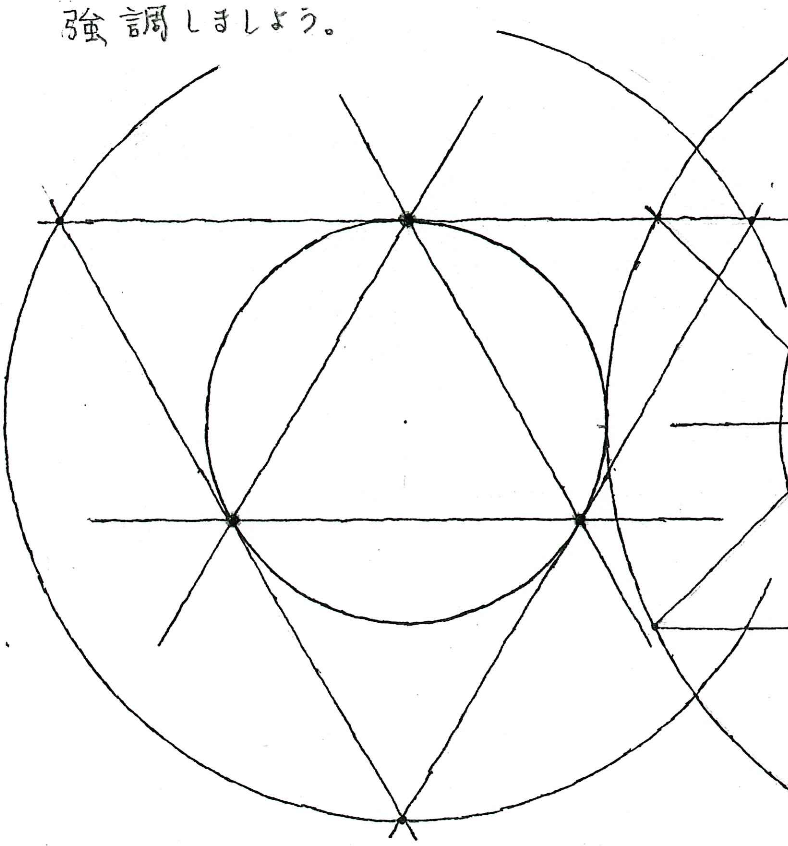
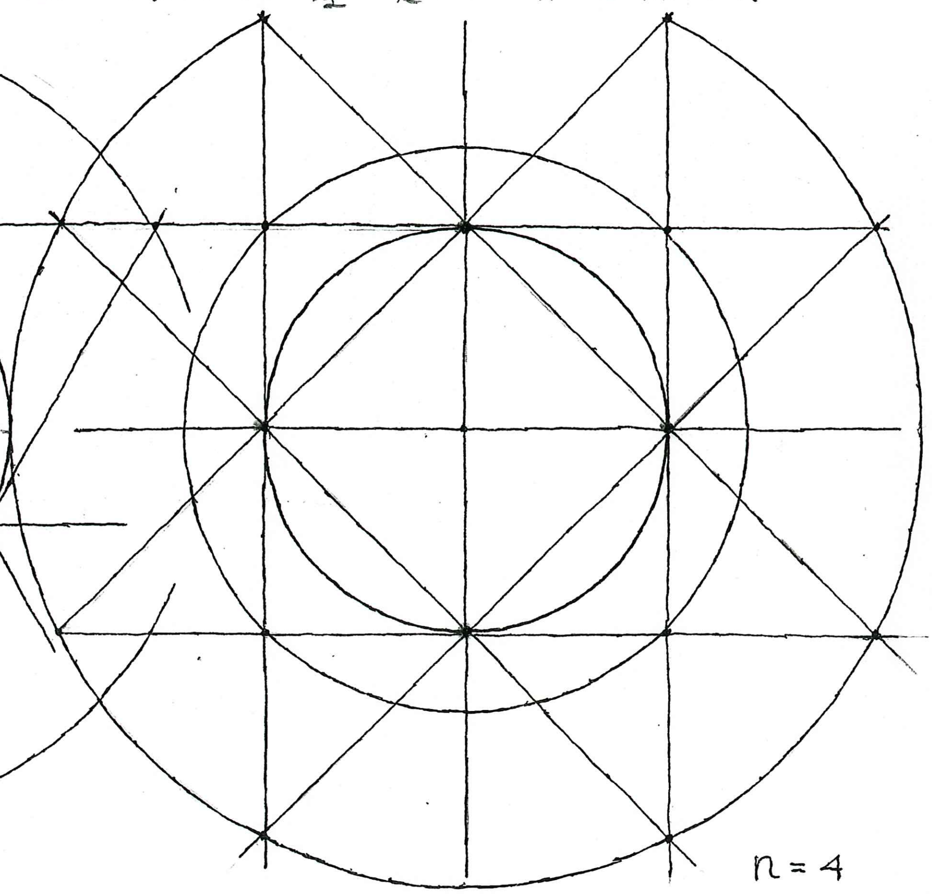


fig.040.03 n = 3



n = 4

fig.040.04

失敗してしまいました。接線のことを失念し(Forget)てしまいました。自分で定義しておきながらなんてこった。放射体は思ったより複雑ですね。今度は気を付けよう。

【PQ32】 6月29日(月) n次放射体の呈示(続き)

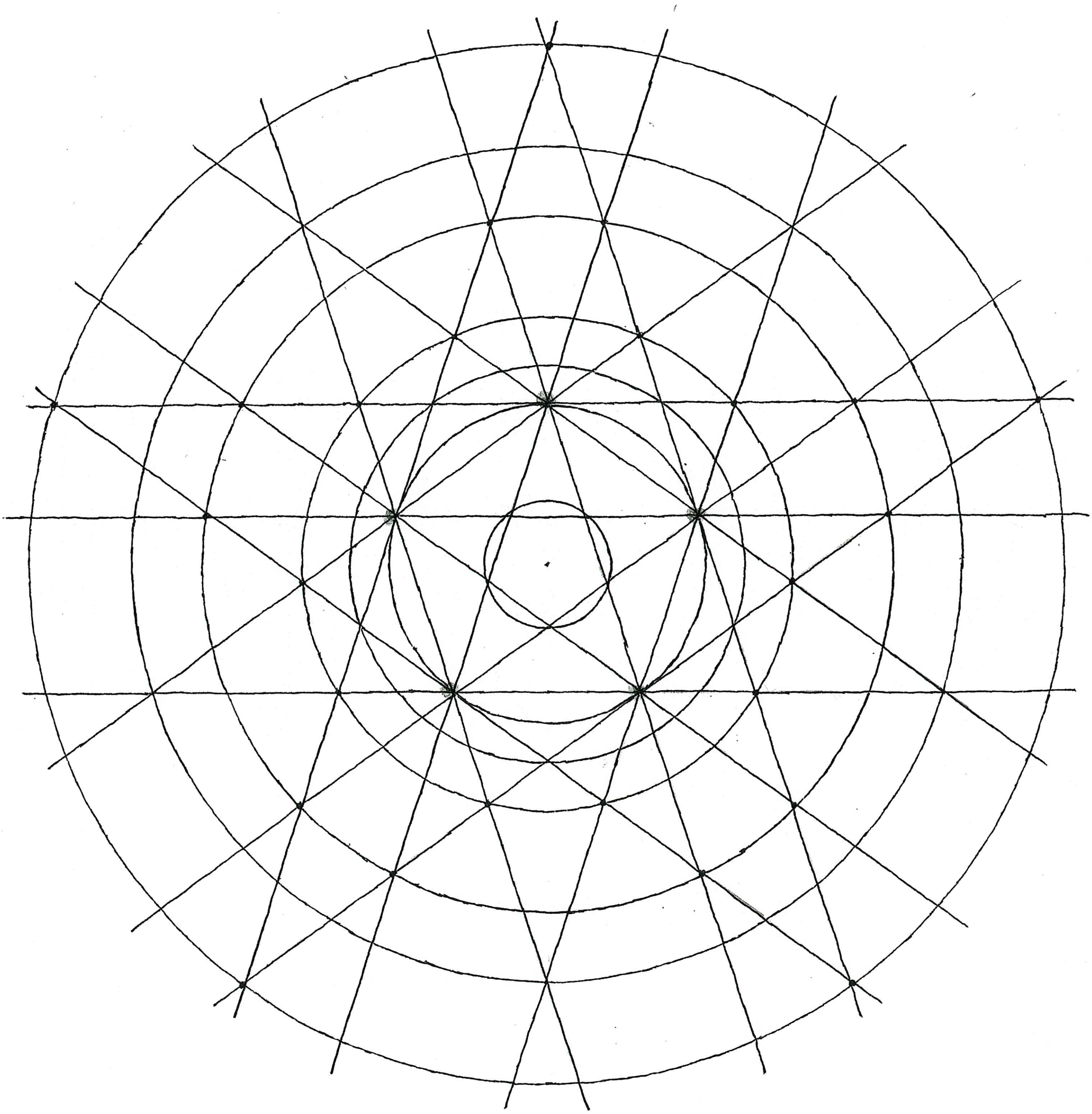


fig.Q40.05

$n = 5$

初めて、基礎円の内側に包絡円が出現しました。

【PQ33】 n次放射体の呈示（続き）

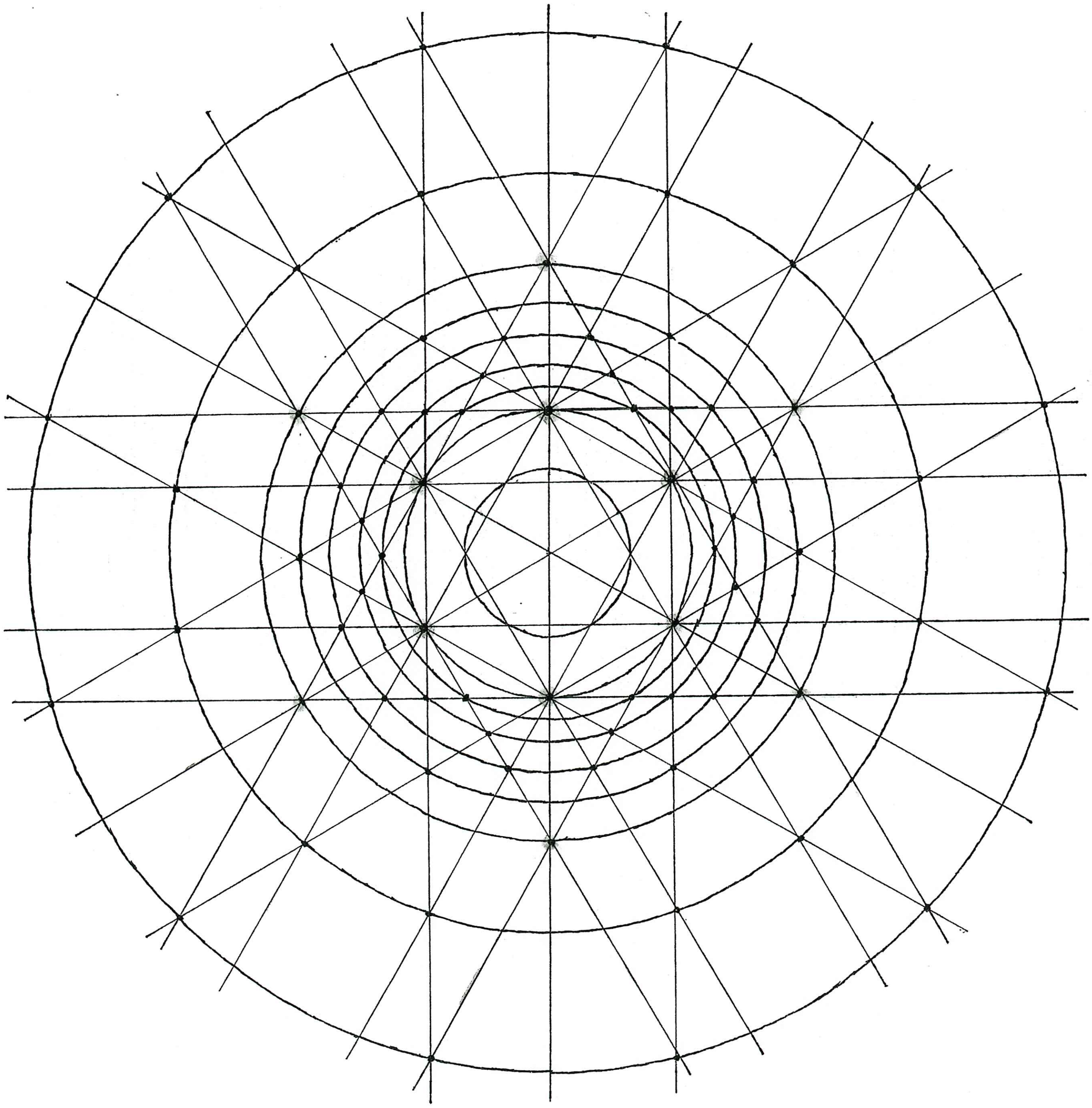


fig.040.06　　　　　　　　　　n = 6

初めて、基礎点以外の多重点が出現しました。銀色で強調しました。また平行線の組に注目すると、3本の平行線3組と、4本の平行線3組に分かれました。6 = 2×3 と関係有るのかしら？

【P034】n次放射体の呈示（続き）

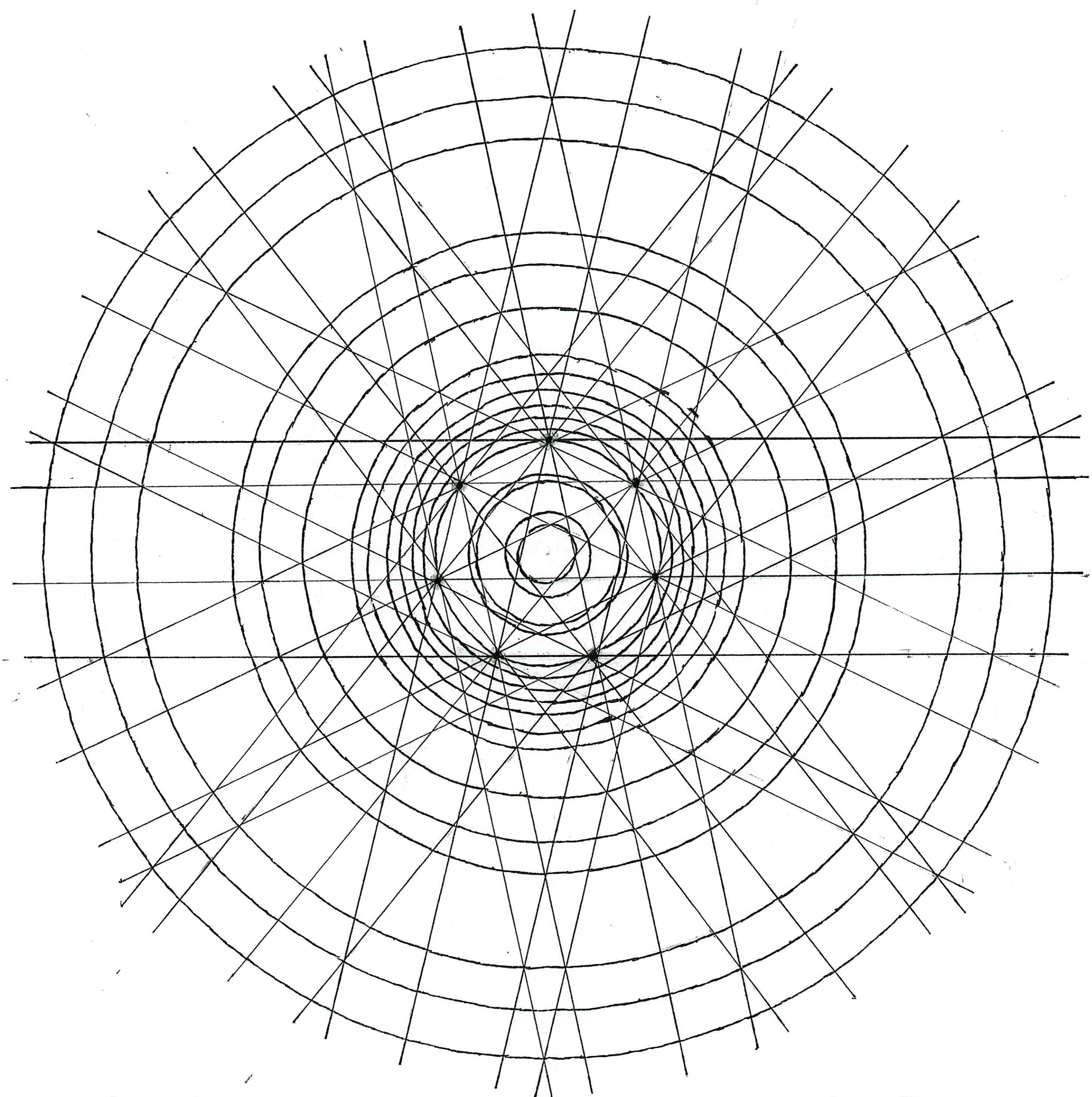


fig. 040. 07　　　　n = 7

基礎円の内部の包絡円が増えてきました。これからは、基礎円の内部に注目し外部の包絡円は一部だけ描くことにします。

【P035】6月30日(火) n次放射体の呈示(続き)

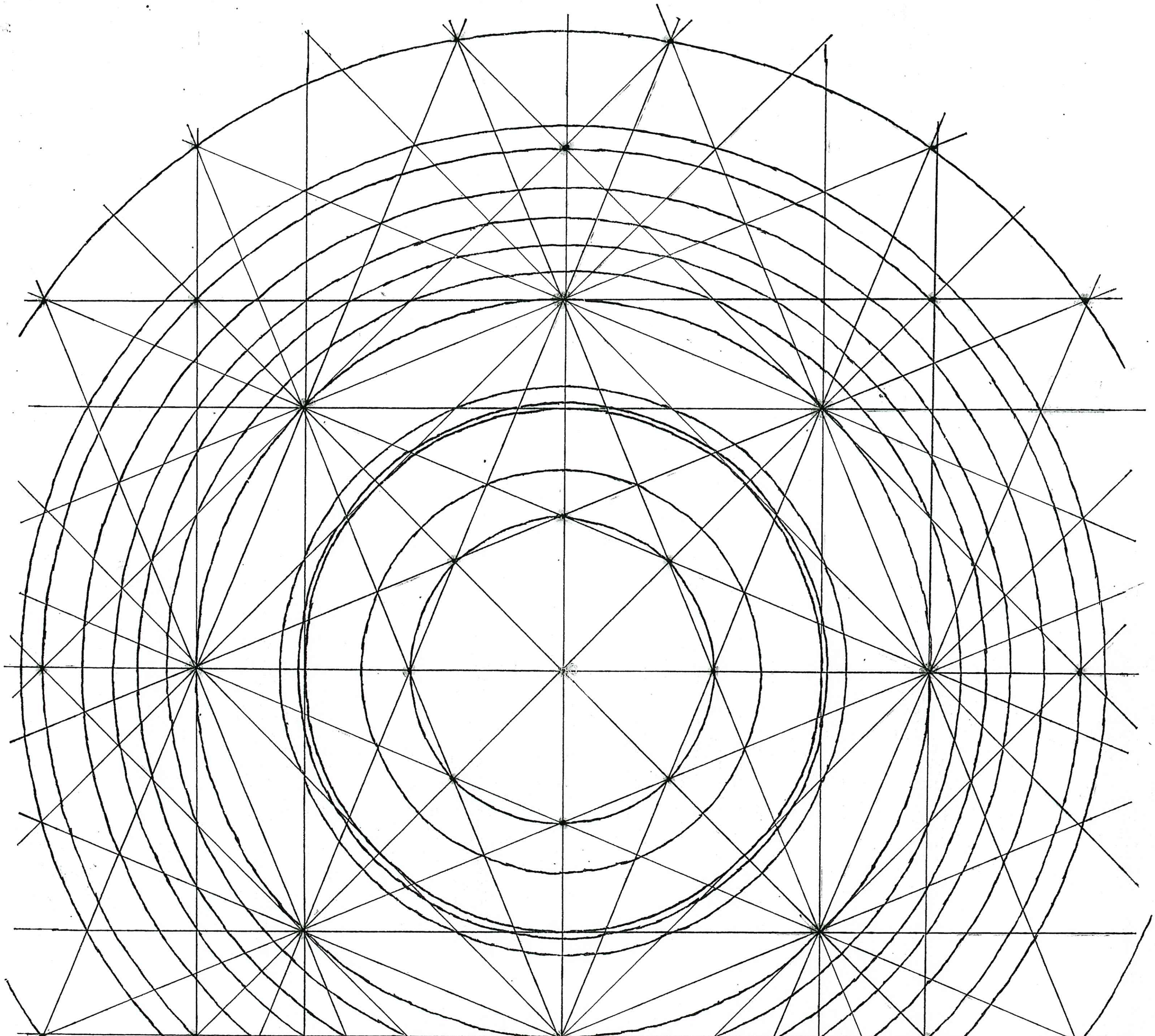


fig.040.08

n = 8

基礎円の内部に初めて多重点が出現しました。平行線に注目すると、4本の平行線が4組と、5本の平行線が4組に分かれました。

【P036】7月1日(水) n次放射体の呈示(続き)

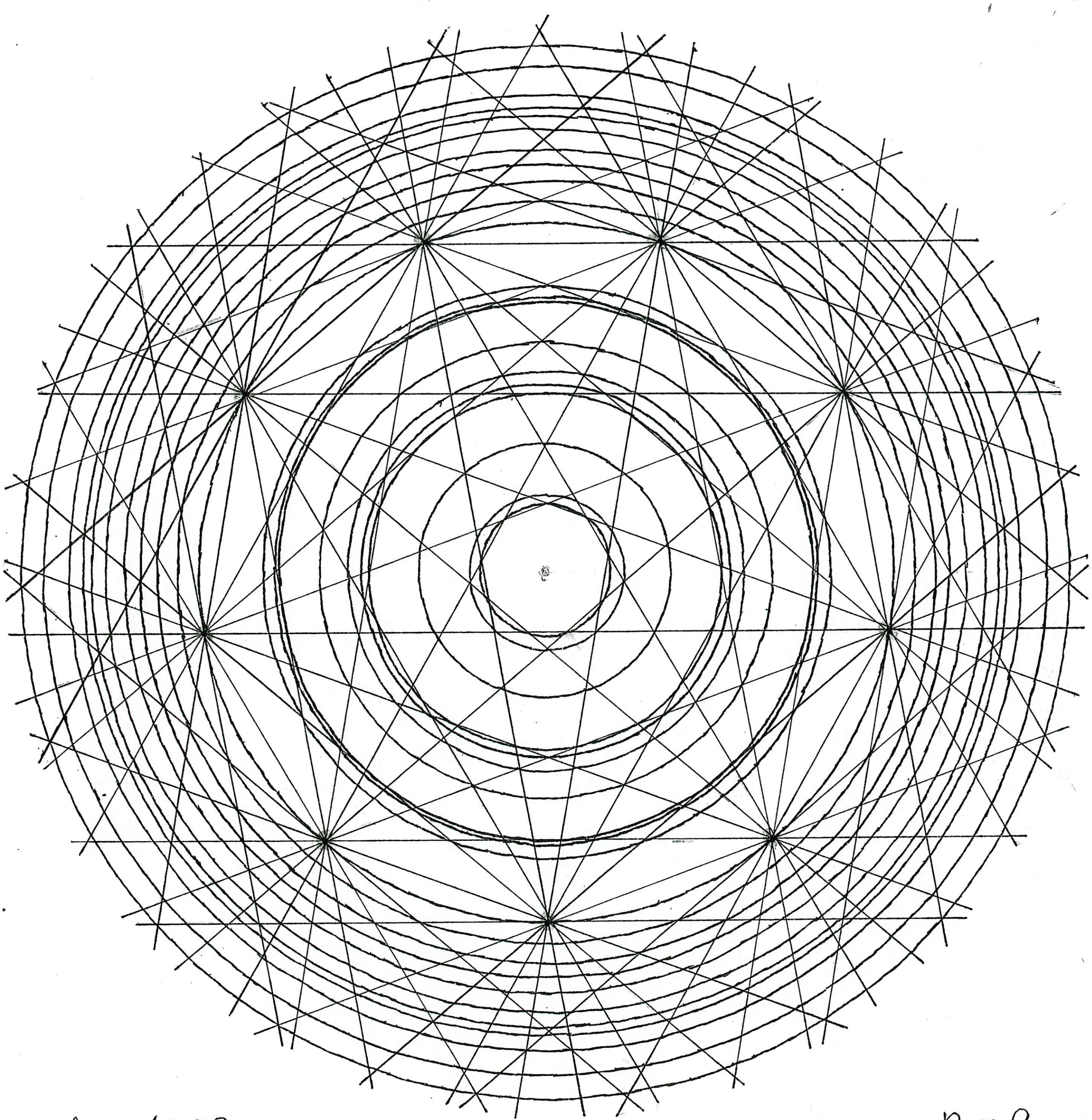


fig.040.09　　　　n = 9

多重交点は基礎点以外には有りません。偶数の場合のみ出現するのかも知れません。平行線は、5本の組が9組です。基礎円内部の包絡円の個数やそれらの半径たちのスペクトルに関する規則がまだ見えて来ません。幾つかの系列から成っているのかも知れません。

作図誤差が目立って来ました。

【P037】7月2日(木) n次放射体の呈示(続き)

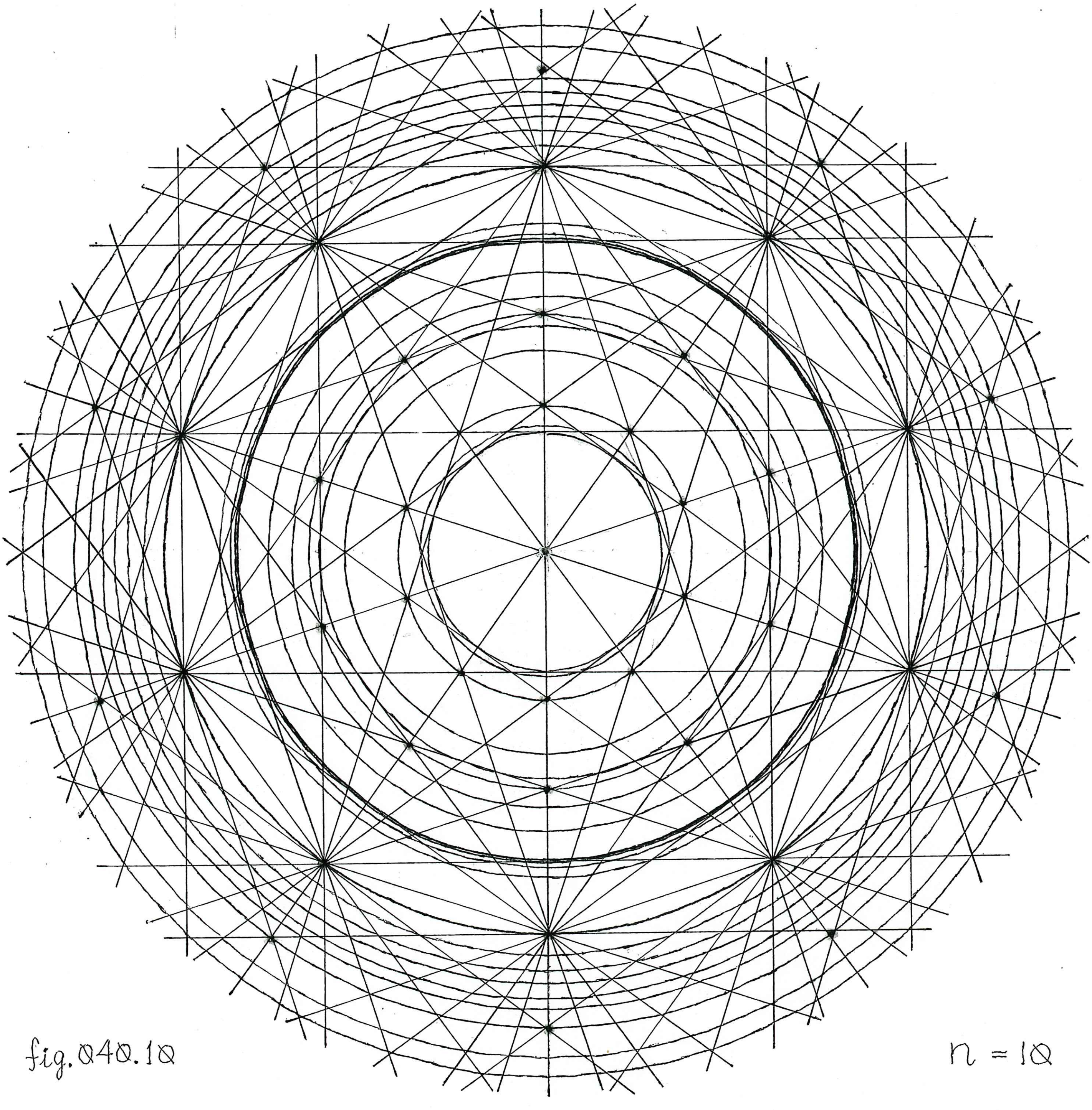


fig.040.10

$n=10$

基礎円の内側に、2つの包絡円に多重点が出現しました。基礎点や、中心点以外の多重点は全て3重点に過ぎないのでしょうか？ 平行線は、6本の平行線の組5組と、5本の平行線の組5組に分かれました。基礎円の内部の包絡円の中には半径が近過ぎて、僕の作図能力では区別しにくいものが現われました。また基礎円の外側の交点に関しては、作図誤差が大き過ぎ、同じ包絡円上の交点なのかそうでないのかが判別しにくくなってきました。そこで、次回からは、基礎円をもっと大きく描き、基礎円の外側の包絡円は1個だけ描くことにします。

【P038】7月3日(金) n次放射体の呈示(続き)

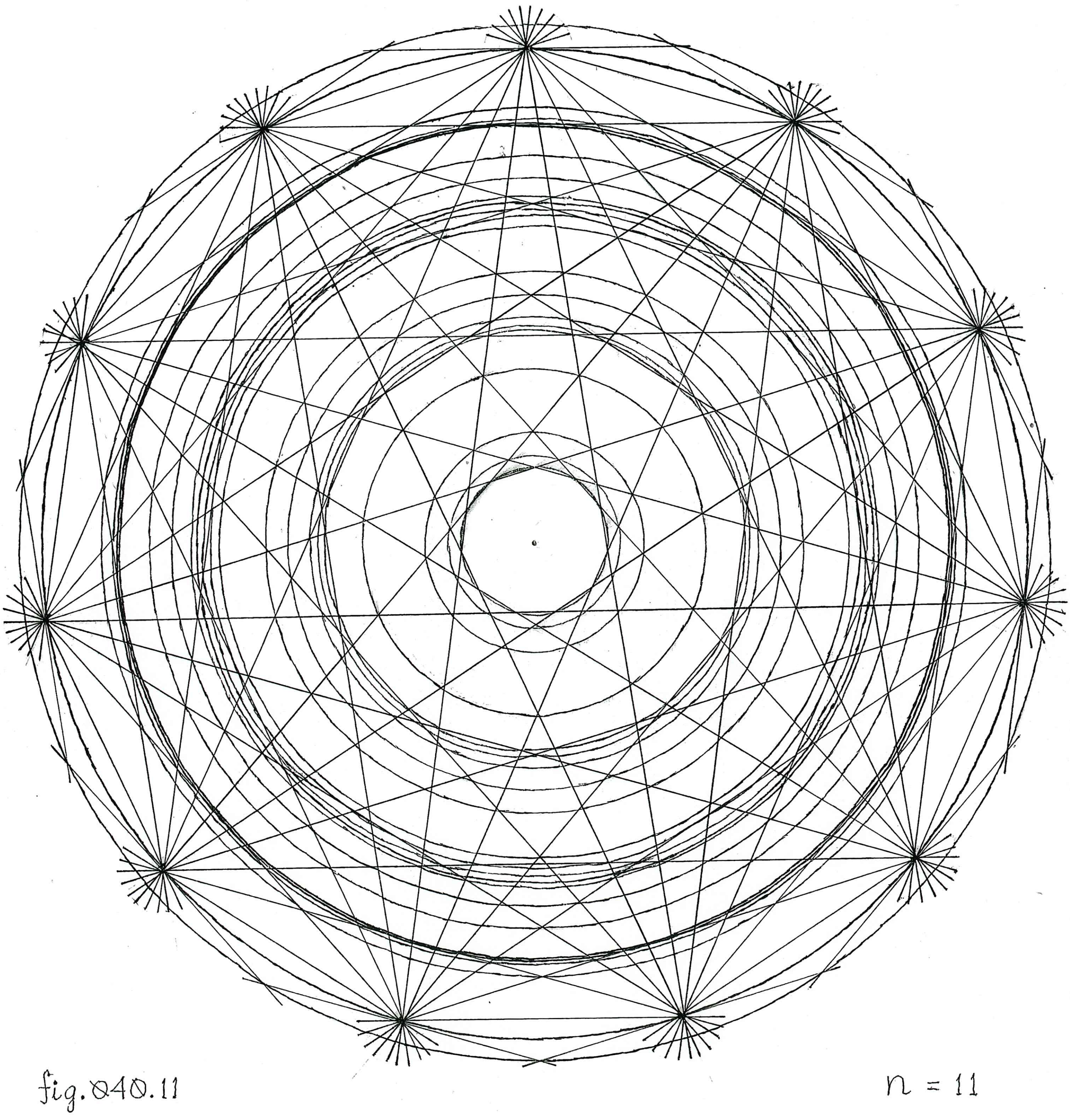


fig.040.11

n = 11

平行線は、6本の組が11組です。基礎円内部の包絡円に注目して、基礎円を大きく描いたにもかかわらず、僕の作図能力では区別出来ない程半径が近い包絡円が現われています。何とかしないと先に進めません。
そこで、直線を大幅に間引く(Thin)ことにします。最小半径の包絡円に関係した直線のみを描くことにします。さらに、奇数次の放射体だけを描くことにしましょう。

【PQ39】7月4日(土) n次放射体の呈示(続き)

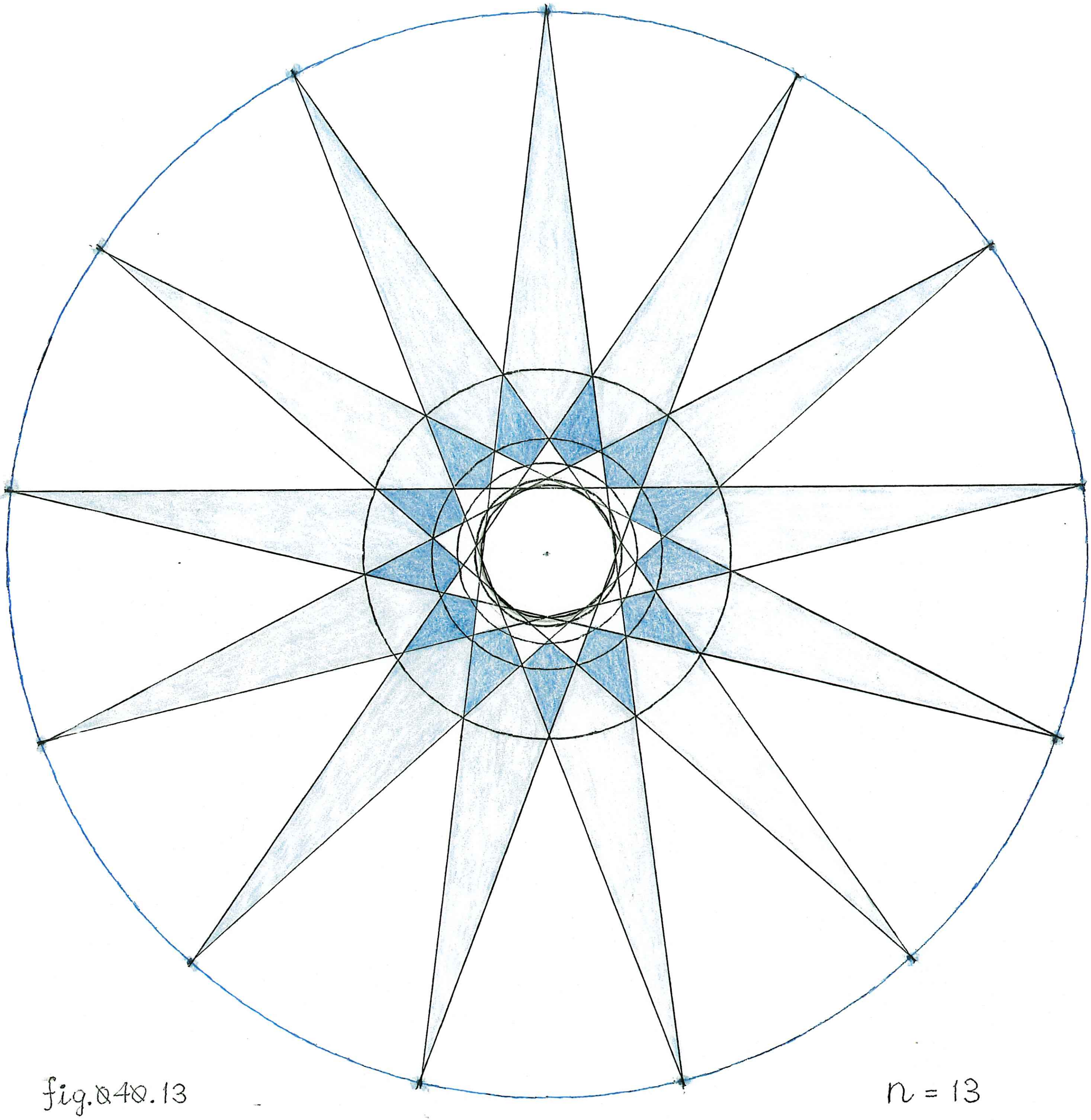


fig.Q40.13 n = 13

基礎円を含めないで、包絡円は5個現われました。

このような、最小の包絡円に関係した線分と、それから現われる包絡円だけを描いた放射体のことを極小放射体と呼ぶことにします。線分に注目しましょう。これらは折れ線になっています。しかも一筆書きできます。n = 13が素数(Prime Number)だからでしょうか? このことを強調するために一色(青色)で色を塗り(Paint)ましょう。

【P040】7月5日(日) n次放射体の呈示(続き)

15次の極小放射体を描きました。これも一筆書きできます。素数には関係ないようですね。

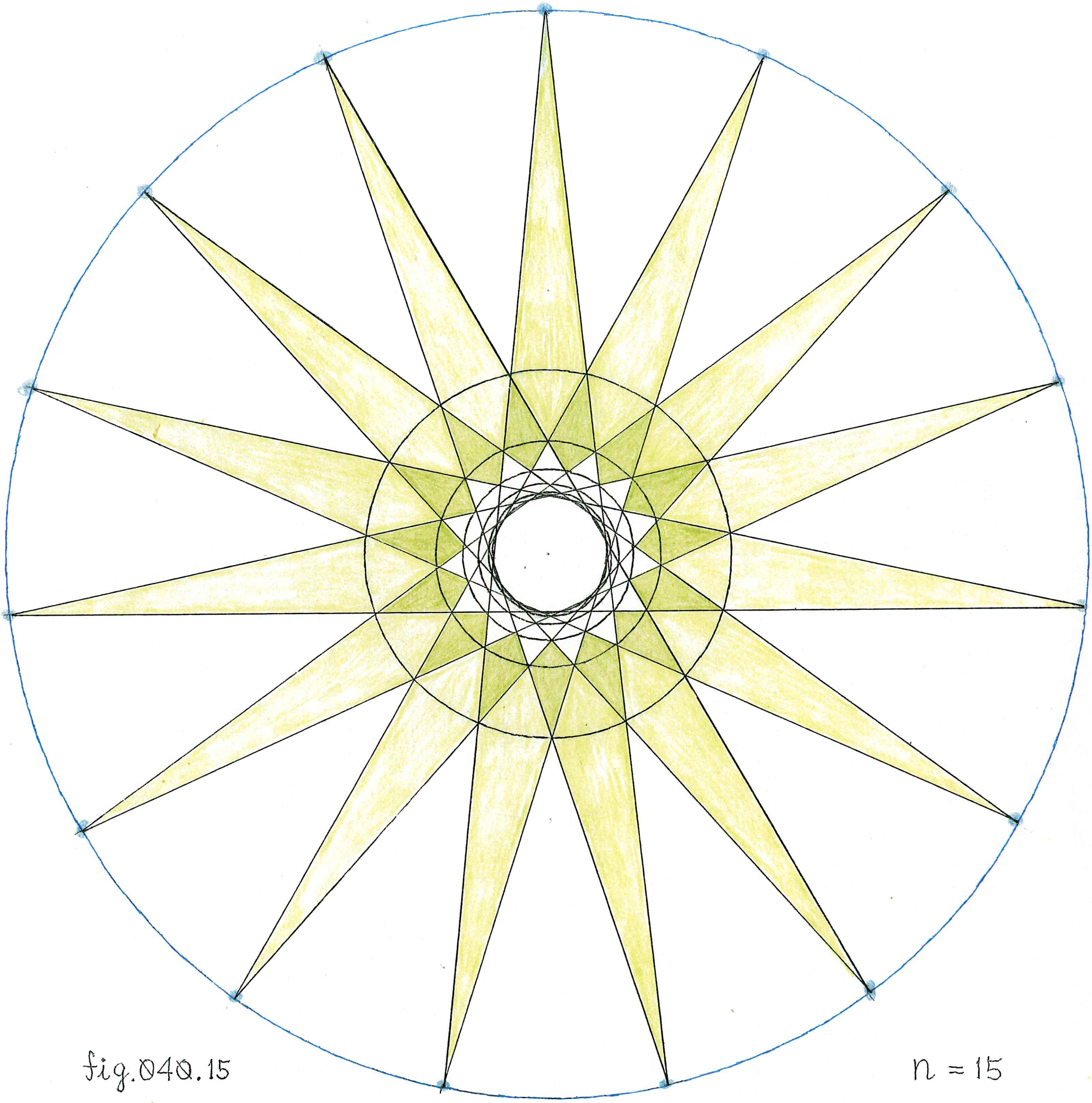


fig.040.15

n = 15

基礎円以外の包絡円は6個現われました。『n次放射体の呈示』はこれ位にしましょう。包絡円たちの個数や、それらの半径の基礎円の半径に対する比などが問題として呈示されました。最後に、P030で触れた特殊な包絡曲線群に関して、1例を作図して呈示しましょう。

【PQ41】n次放射体の呈示(続き)

23次放射体の基礎円と基礎点を描きます。さらに、2個の基礎点をかってに選びます。一番上の頂点と、一番下の右側の頂点を選ぶことにします。この2頂点のそれぞれを通るすべての直線(線分)を描きます。包絡円は描きません。

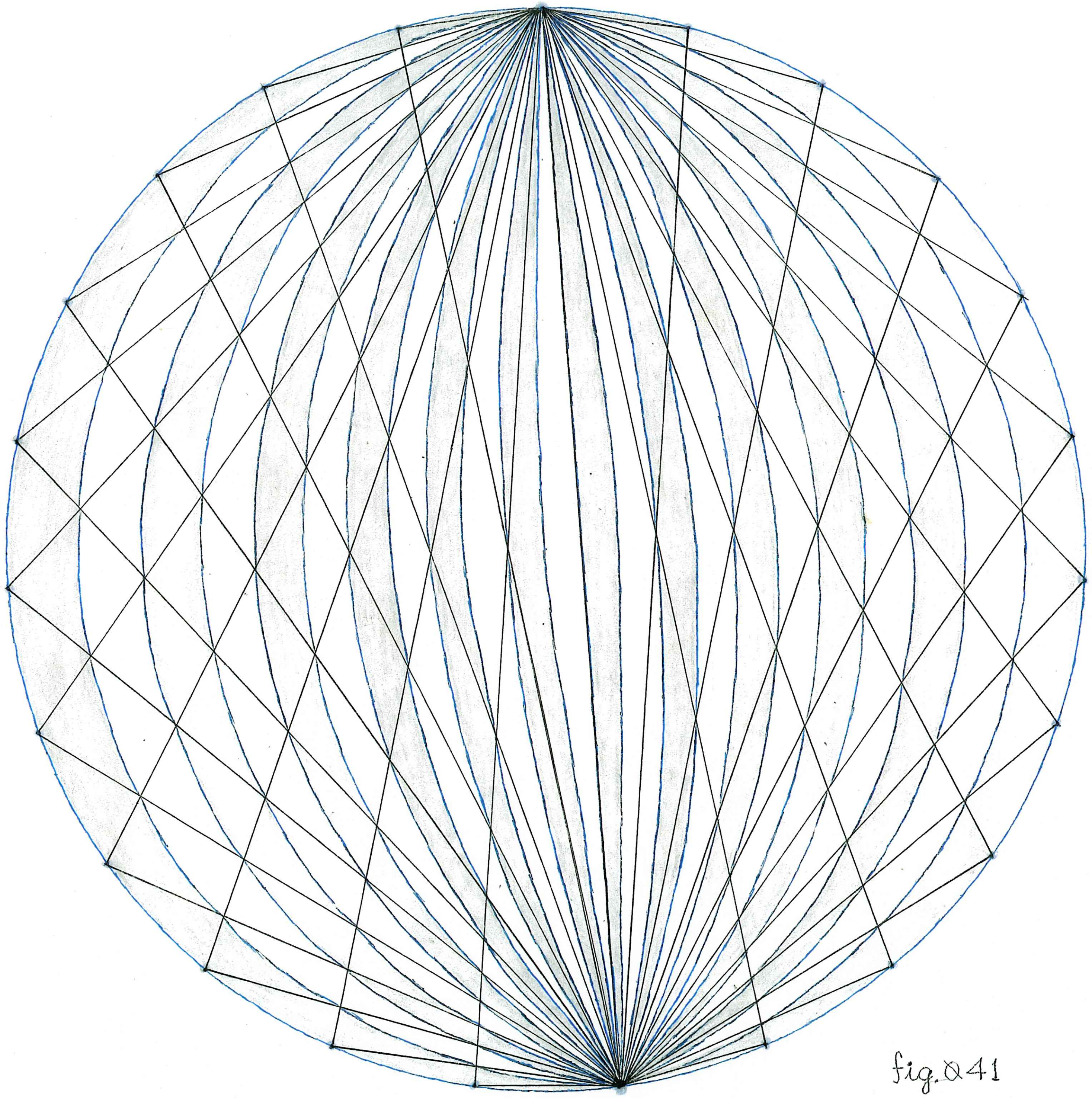


fig.Q41

どうやって描いたかは図より明らかですね。直線群の交点を通る包絡曲線群ですね。

【P042】7月6日(月) 荷力曲線群の呈示

● 荷力曲線群の呈示

荷力曲線群(Charged Force Curves)の呈示をする。fig.041はその一例です。fig.041は、23次放射体の基礎円と2個の頂点それぞれを通るすべての直線だけを描き、それら直線たちが成す幾つもの4角形に注目し、それぞれの4角形の対頂点を通るように滑らかに(Smooth)に描いて得られる曲線群を表現した絵です。基礎円の内部の曲線しか描きませんでした。2頂点のことを荷力線群の極(Pole)と呼ぶことにします。荷力曲線群と名付けたのは、その形状が磁力線に似ているからです。"磁"ではなく"荷"を選んだのは、磁荷だけではなく、電荷や弱荷，重力荷?なども、同じ様な曲線群を生成するかも知れないと思ったからです。ある種の一般化を図ったつもりです。fig.041の2つの極のそれぞれを通る直線群に注目して下さい。描かれているのは22本の半直線(実は線分)だけですが、描かれている半直線を基礎円の外側に延長し(Extend)て得られる半直線と、接線も勘定に入れると全部で46本の半直線が存在します。これらの半直線群のうち隣り合う2本の半直線が成す角度は全て等しく2π/46です。このことは、作図方法と円周角の定理より明らかです。円周角の定理、及びピタゴラス(Pythagoras)の定理については、当文書を記述するために必須の(Essential)の命題の1つとして証明するつもりです。他にも幾つかの必須の命題が存在します。既にP002やP012で触れた平面3角法や球面3角法なども その1つです。さらに回転を論じる際に必要となる、行列に関して成り立つある恒等式についても呈示・証明する予定です。

荷力線群の極は2個とは限りません。3個以上の極を持つ荷力線群も考えられます。各極ごとに、その点を端点する半直線を等方的に描きます。それらの半直線たちの成す交点のあるやり方での包絡曲線を描きます。それが荷力曲線群です。

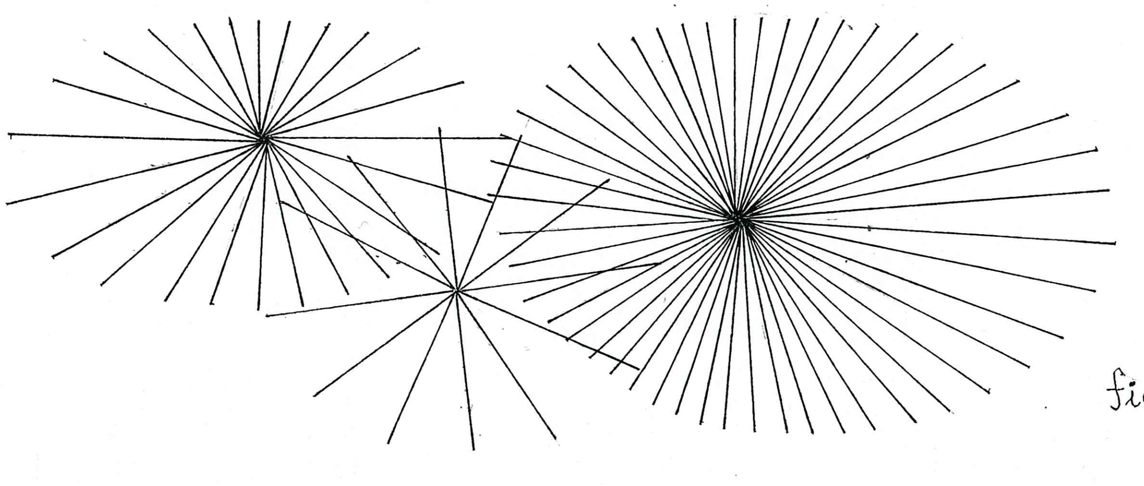


fig.042

【P043】 荷力曲線群の呈示（続き）

荷力曲線群は、何をもってして一意的に定まるのでしょうか？ ここで一意的という意味は、平行移動や回転によって不変な性質のことです。荷力曲線群は平面上の幾何学的実体です。まず極の個数と、それら極の位置（相対的な配置）に依存します。さらに、各極における等方的な半直線の個数にも依存します。この個数のことを極の荷値の絶対値と呼ぶことにします。各極における荷値の絶対値がそれぞれ定まったとしても、各極ごとに、かってに等方向な半直群を回転させれば異なった荷力曲線群が得られると思われます。また、棒磁石やU磁石にN極とS極が有ったり、電荷に正と負が有るのと同様に荷値にも符号が有ります。これは一意的には定まりません。すべての極の荷値を同時に入れ換えても荷力曲線群は変わりません。つまり荷値の符号は相対的です。fig.041の荷力曲線群は異なる符号を持つ2つの極から成る荷力曲線群を描いたものです。このような曲線群のことを引力的な荷力曲線群と呼ぶことにします。同じ符号をもつ極から成る荷力曲線も存在します。このような曲線群のことを斥力的荷力曲線群と呼ぶことにします。同符号と異符号の荷値を持つ極が混在しているような荷力曲線群も存在します。実際に描いてみないとどんな曲線群になるのか想像しにくいですね。

fig.041で描いた曲線群はいわば近似曲線です。フリーハンドで描いたからです。しかし単なる近似曲線ではありません。交点は確定点です。このことは下図より明らかです。

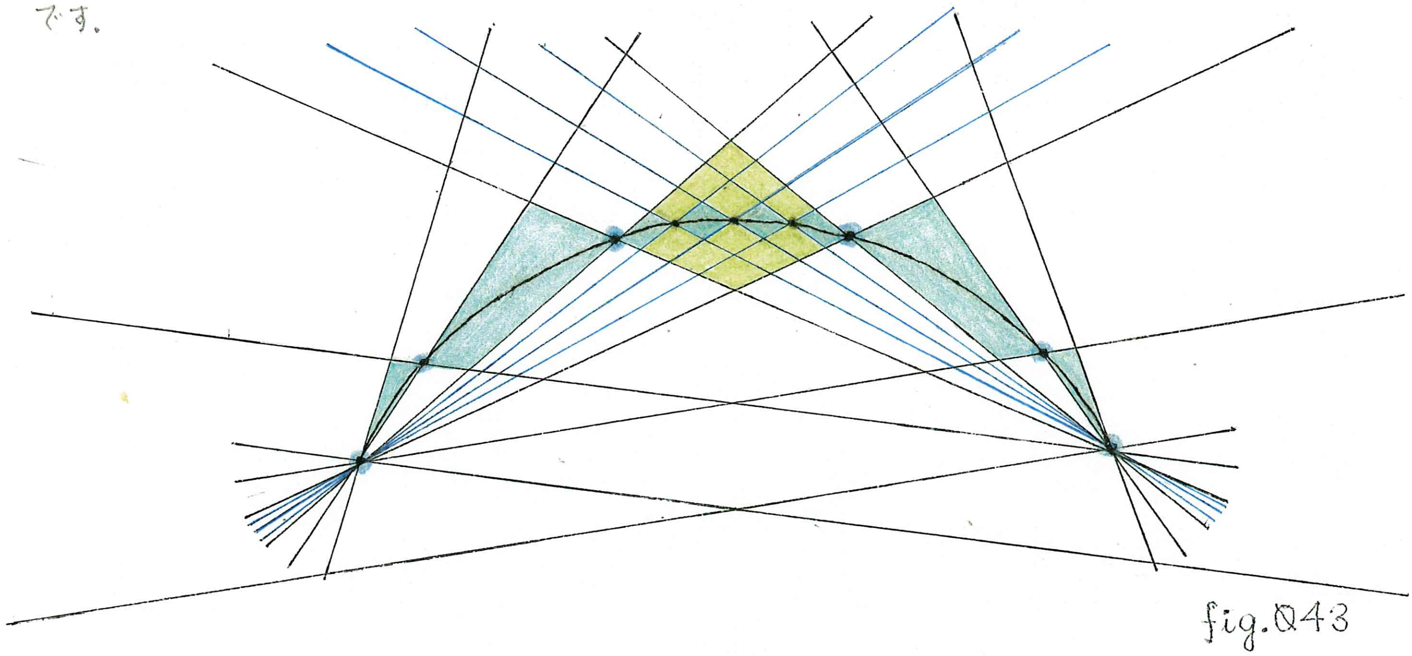


fig.043

上図の中央上部の4角形に注目して下さい。2個の対頂点（青色で強調した2点）は確定点です。この4角形を構成する2つの角を2等分、4等分しても、青色で強調した2点は、同じ曲線上の点であることにかわりはありません。唯、包絡曲線の精度（荷力線としての正確さ）が向上するだけです。実は上図には決定的な誤りが有ります。16度は360度の約数では有りません。でも交点が確定点であることの説明のためには問題ありません。

【P044】7月7日（火）荷力曲線群の呈示（続き）

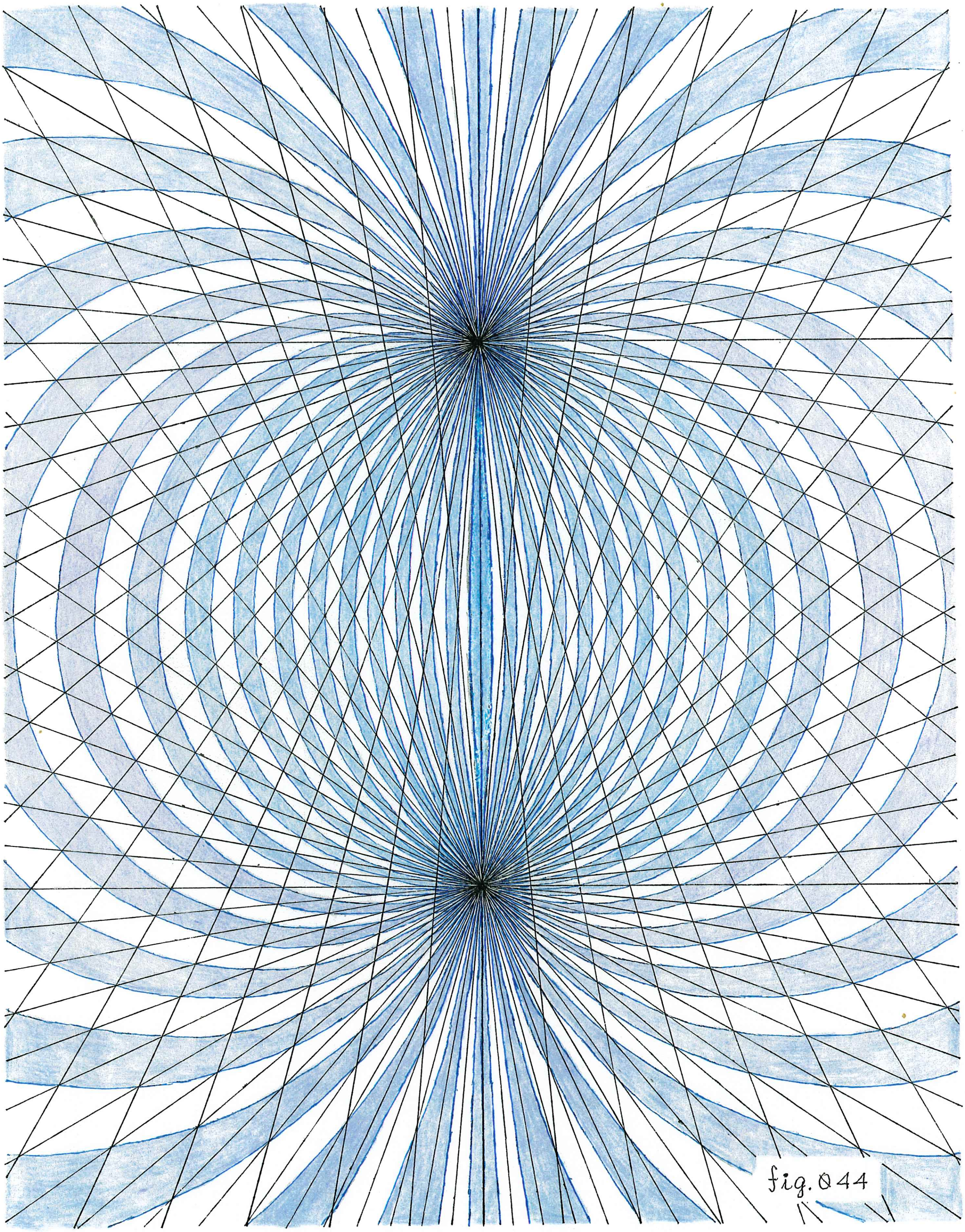


fig.044

荷値が＋72と－72の2つの極から成る引力的荷力曲線を描きました。
荷力曲線の本数も72です。ただし、どの曲線も、2極を端点とする有限長の閉じた曲線です。

【P045】7月8日(水) 荷力曲線群の呈示(続き)

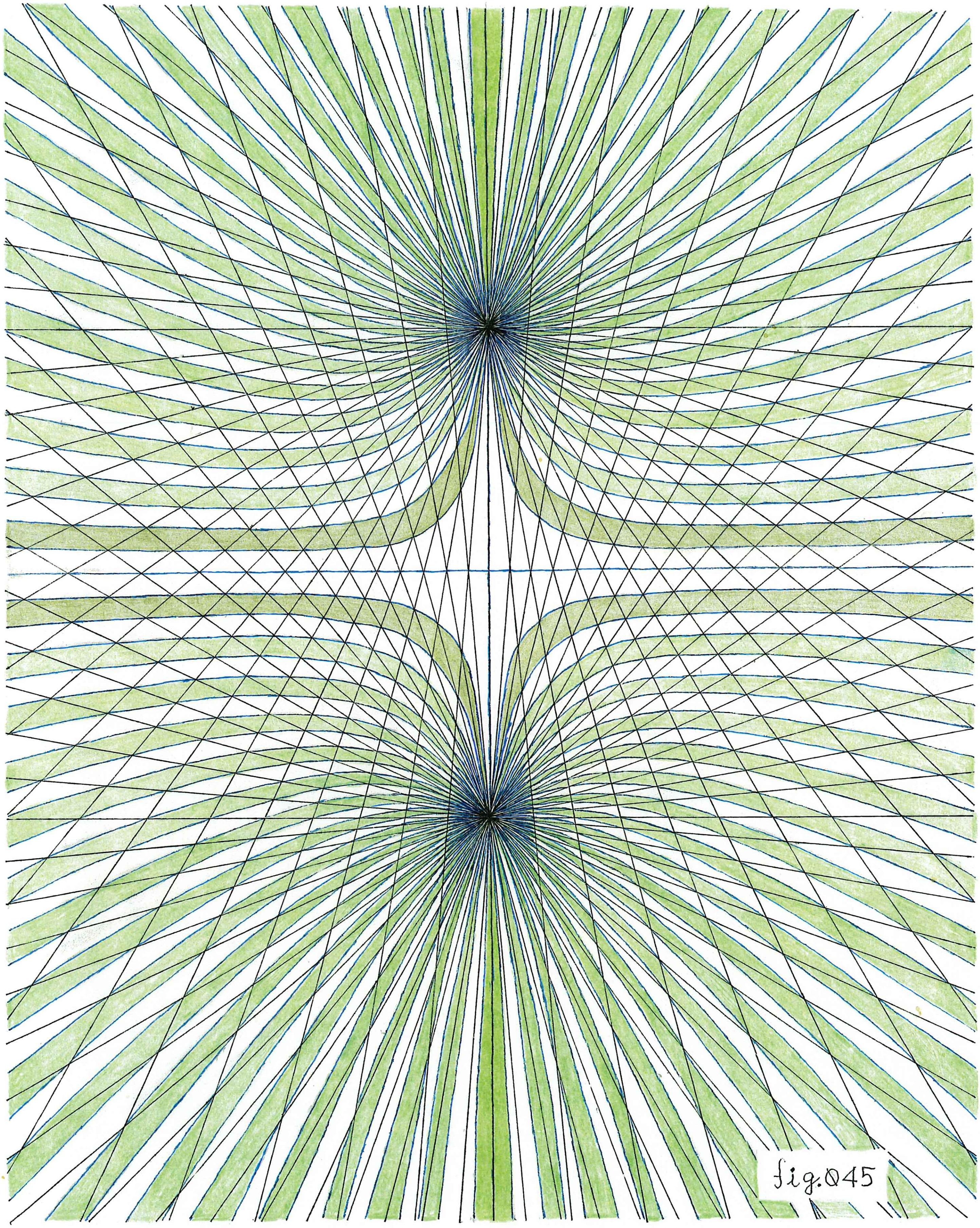


fig.045

荷値が共に72の2極からなる斥力的荷曲線群を描きました。引力的荷曲線群とは異なり、曲線の個数は2倍の144です。どの曲線も無限遠まで延びています。

【P046】荷力曲線群の呈示（続き）

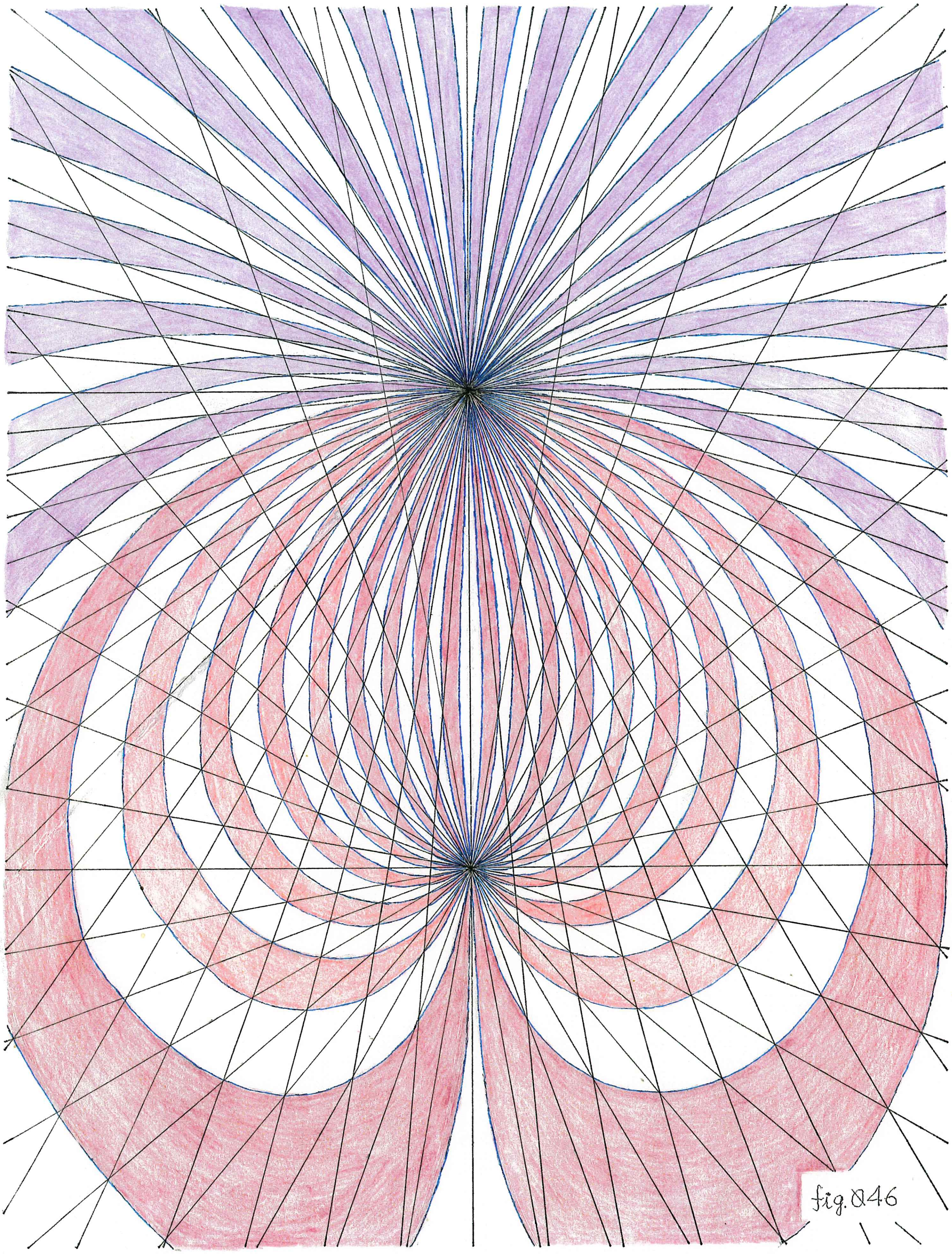


fig.046

−72荷と+36荷の2極から成る引力的荷力曲線群を描きました。

きれいなハート形の（Heart-Shaped）曲線の作図方法が見付かりましたね。

【P047】7月11日(土) 荷力曲線群の呈示(続き)

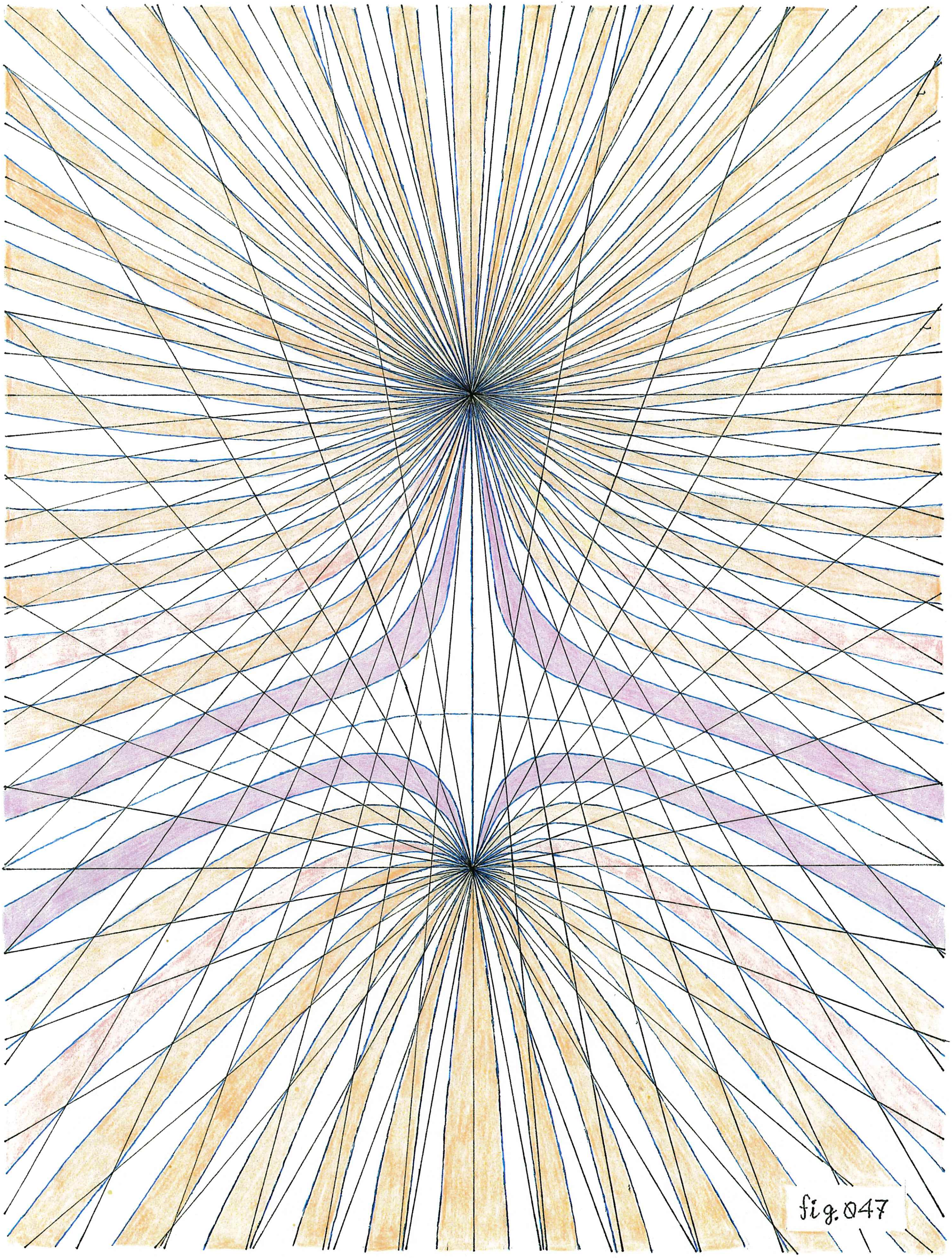


fig.047

−72荷と−36荷の2極から成る斥力的荷力曲線群を描きました。

次は、3極から成る荷力曲線群の作図に挑戦し(Challenge)ましょう。

【P048】 7月12日(日)、荷力曲線群の呈示(続き)

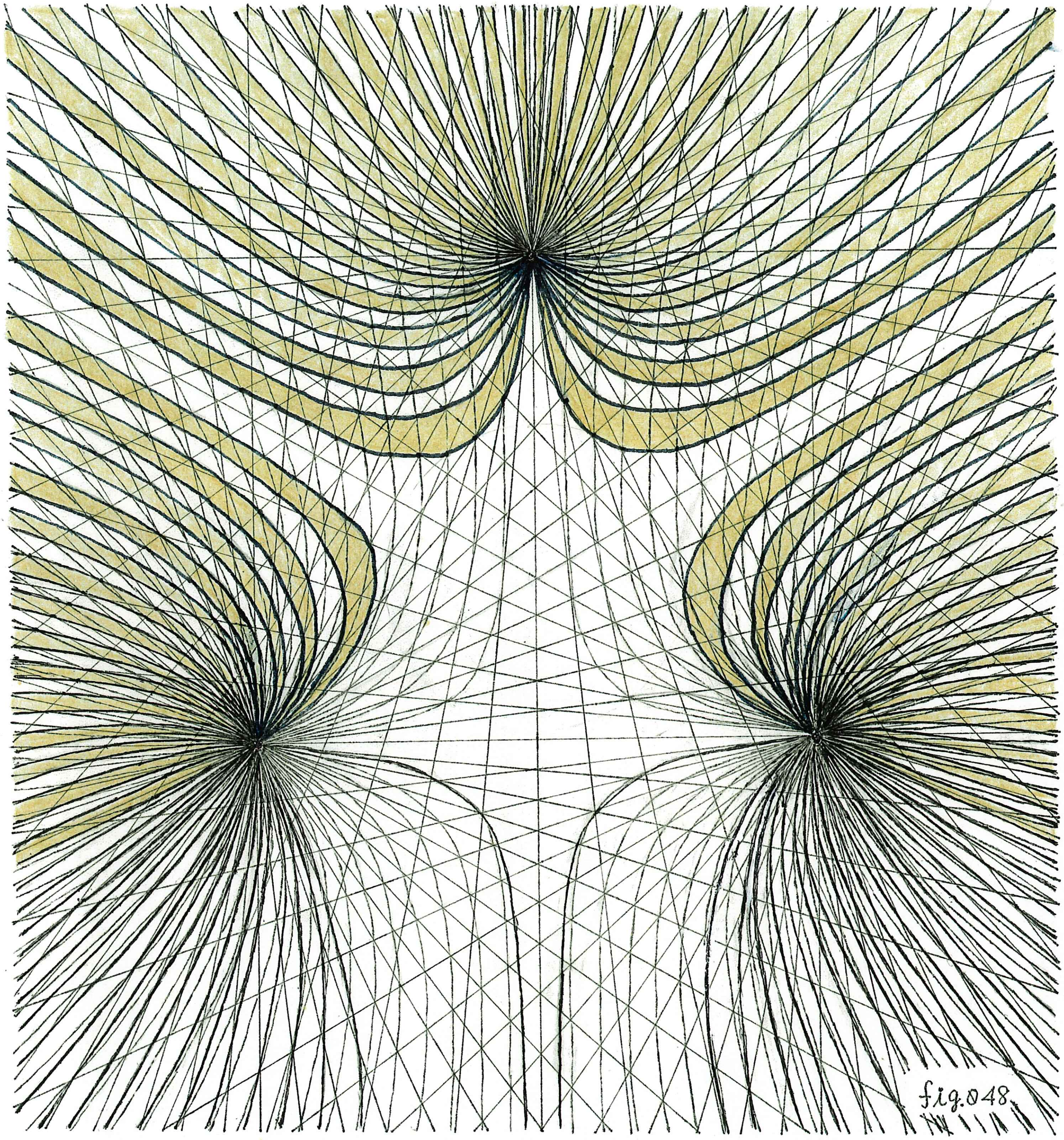


fig.048.

+60荷，+60荷，+60荷の3極から成る斥力的荷力曲線群の一部を描きました。どうやって作図したのか？ まず、下側の2極しか存在しない場合の斥力的荷力曲線群を全て描き、その曲線群と、上側の第3極から等方的に延びた半直線群との交点たちに注目し、それらの斥力的な包絡線群(の一部)を描いた。極の配置は正3角形の頂点とした。その理由は、上述の作図方法が正しいかを確認したかったからです。正しいとすれば、120°の回転対称的な絵が得られるはずです。貴方にはどう見えますか？ それにしても直線群が多過ぎます。何とかしなければなりません。

【P049】 7月14日(火) 荷力曲線群の呈示(続き)

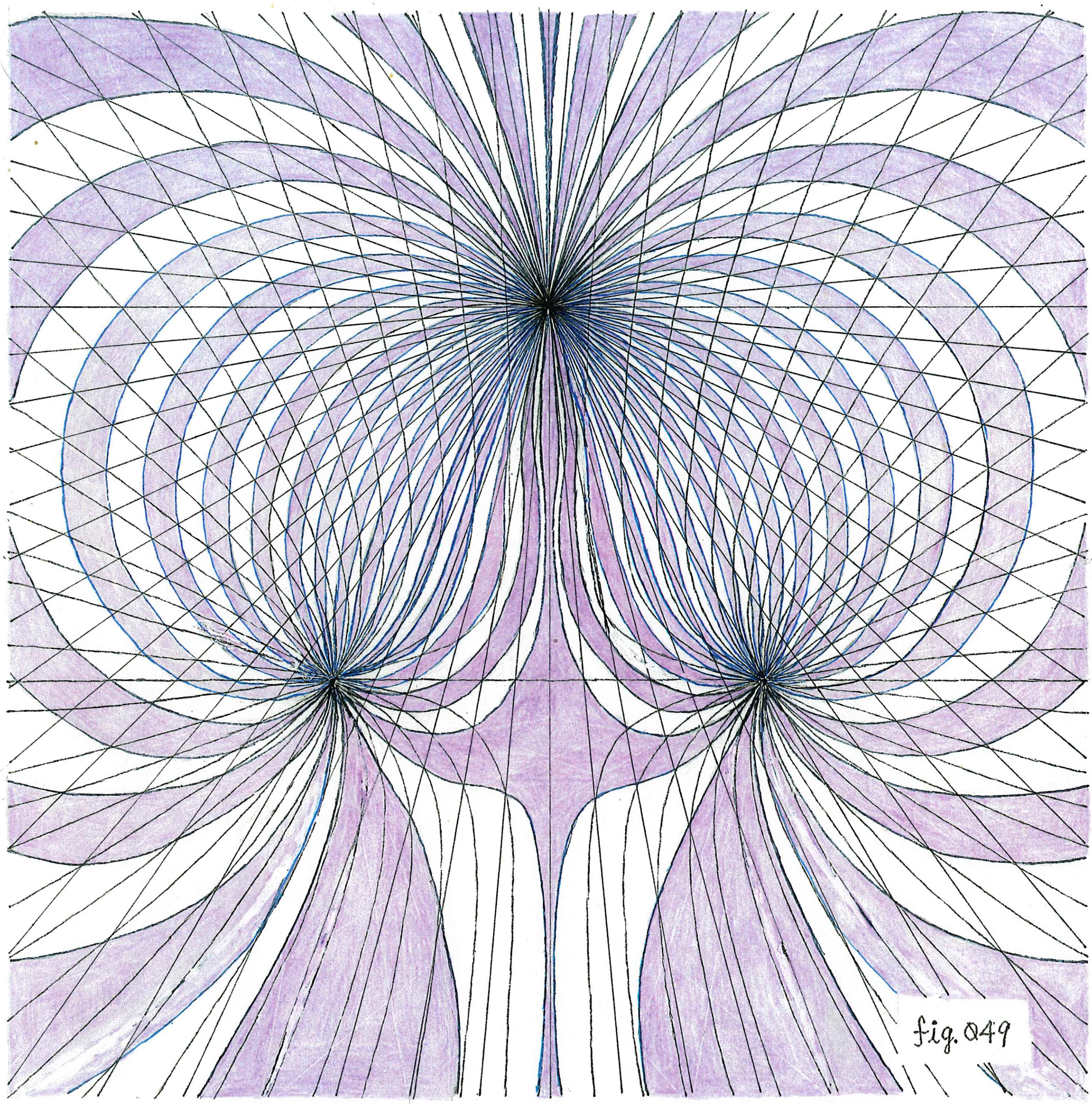


fig. 049

+72荷, −36荷, −36荷の3極から成る荷力曲線群を描きました。 極の位置は正3角の頂点になるように配置しました。荷値の比は、符号も考慮すれば、

$$+72 : -36 : -36 = +\frac{2}{3}e : -\frac{1}{3}e : -\frac{1}{3}e$$

です。−eは電子の電荷と同じ値です。中性子の内部の電荷の様子(State)の2次元の模型(Model)を描いたつもりです。 $+2/3 - 1/3 - 1/3 = 0$ です。中性子の電荷は0です。荷値に関しては加法性が成り立ちます。上図も無限遠まで延びる曲線は0本です。面白いですね。荷値の加法性が荷力線群を描くことによって示されることになります。上図の曲線の中には変曲点のある曲線も観察されます。一体、何曲線なのでしょうか?

【P050】7月15日(水) 荷力曲線群の呈示(続き)

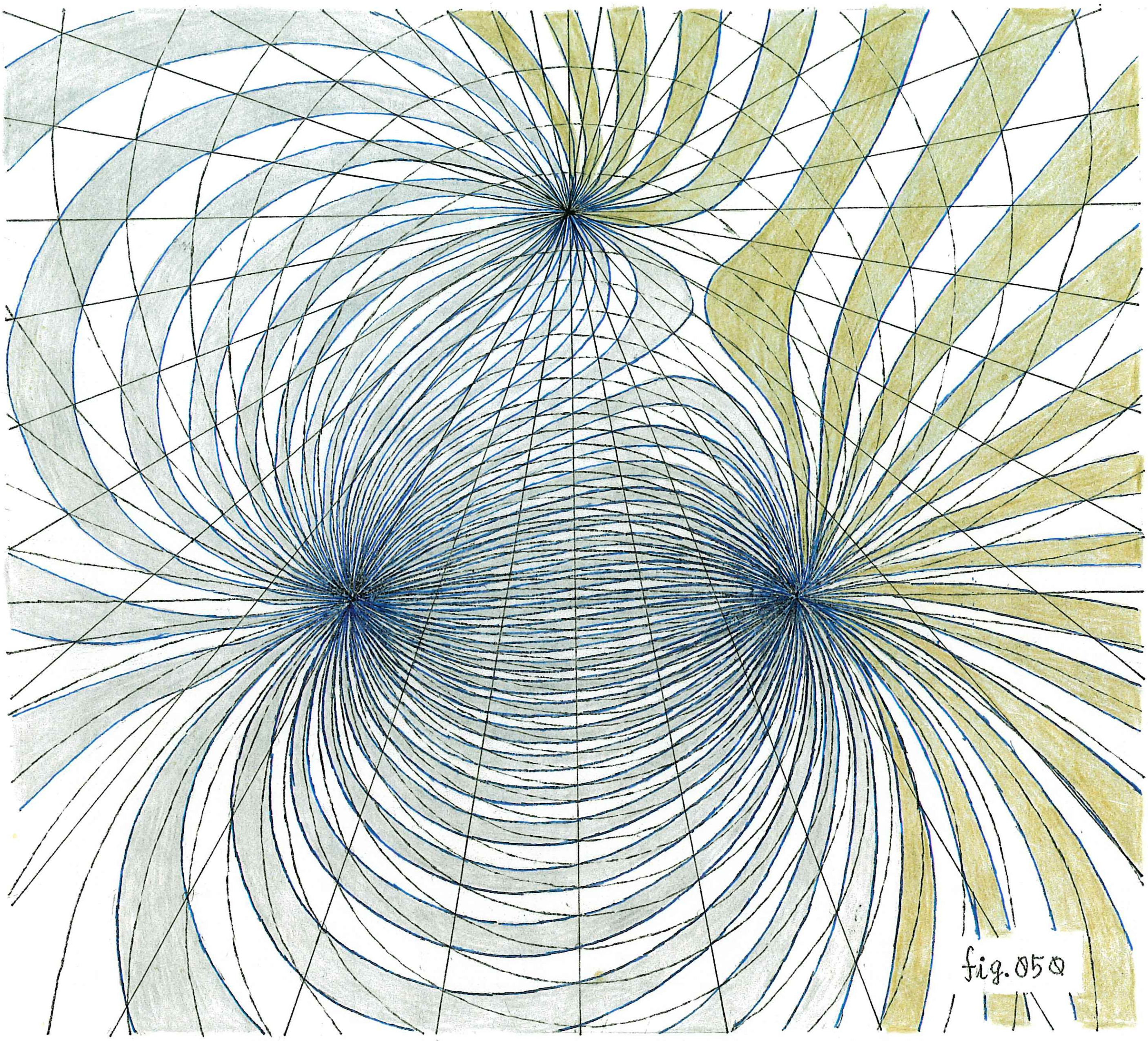


fig.050

+72荷，−72荷，−36荷の3極から成る荷力曲線群を描きました。

荷値の比は、

$$+72 : -72 : -36 = +\frac{2}{3}e : -\frac{2}{3}e : -\frac{1}{3}e$$

です。$+\frac{2}{3}e$の電荷をもつ素粒子はUp Quark，$-\frac{2}{3}e$はAnti Up Quark，$-\frac{1}{3}e$はDown Quarkです。つまり$u\bar{u}d$な3粒子に対応します。その電荷は$-\frac{1}{3}e$です。このような分数電荷を持つ裸の粒子は存在しません。ペンローズ(Roger Penrose)の宇宙検閲仮説を思い出します。これは、「自然は裸の特異点を嫌う」というものです。ブラック・ホール(Black Hole)の話です。自然は裸の分数電荷を嫌うのでしょうか？ それにしても、上図は面白い曲線群ですね。無限遠まで延びる曲線は36本です。

【P051】7月17日(金) 荷力曲線群の呈示(続き)

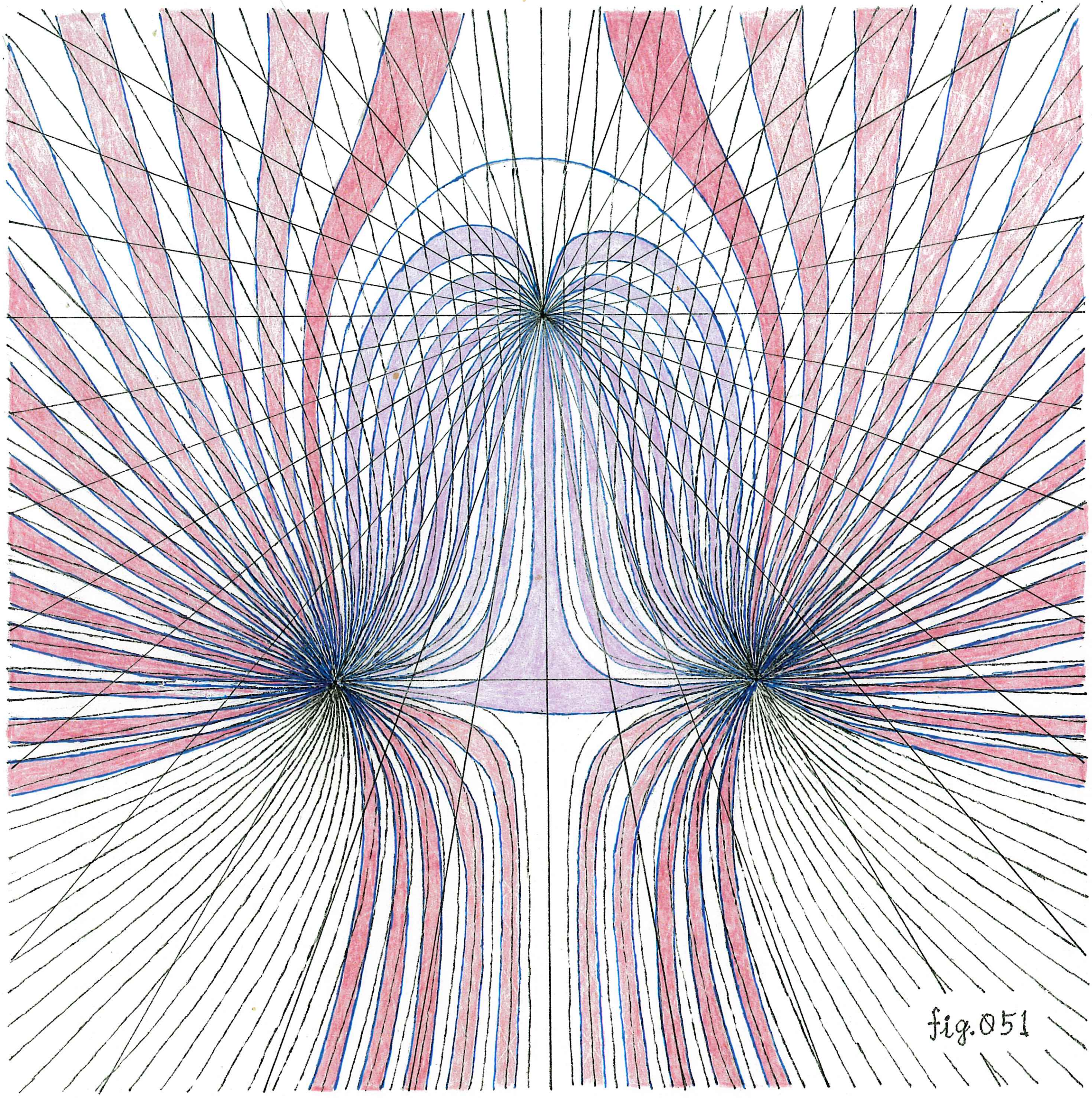


fig.051

+72荷, +72荷, −36荷の3極から成る荷力曲線群の一部を描きました。荷値の比は、

$$+72 : +72 : -36 = +\frac{2}{3}e : +\frac{2}{3}e : -\frac{1}{3}e$$

です。uudのQuark構成の粒子の電荷の様子の2次元の模型を描いたつもりです。

$+2/3e + 2/3e - 1/3e = 1e$ です。陽子の電荷は$+1e$です。

有限の長さの曲線は36本です。無限遠まで延びている曲線は108本だと思われます。左右の同符号の荷値を持つ2つの極を結ぶ曲線が2本出現しました。不自然ですね。僕の作図ミスなのでしょうか!! でもこの2本の存在を認めないとすると、荷値の加法性があやうくなります。どうすべきかというと、どちらの曲線も2本の曲線に作図し直せば、すべてうまくゆくはずです。

【P052】7月20日(月) 荷力曲線群の呈示(続き)

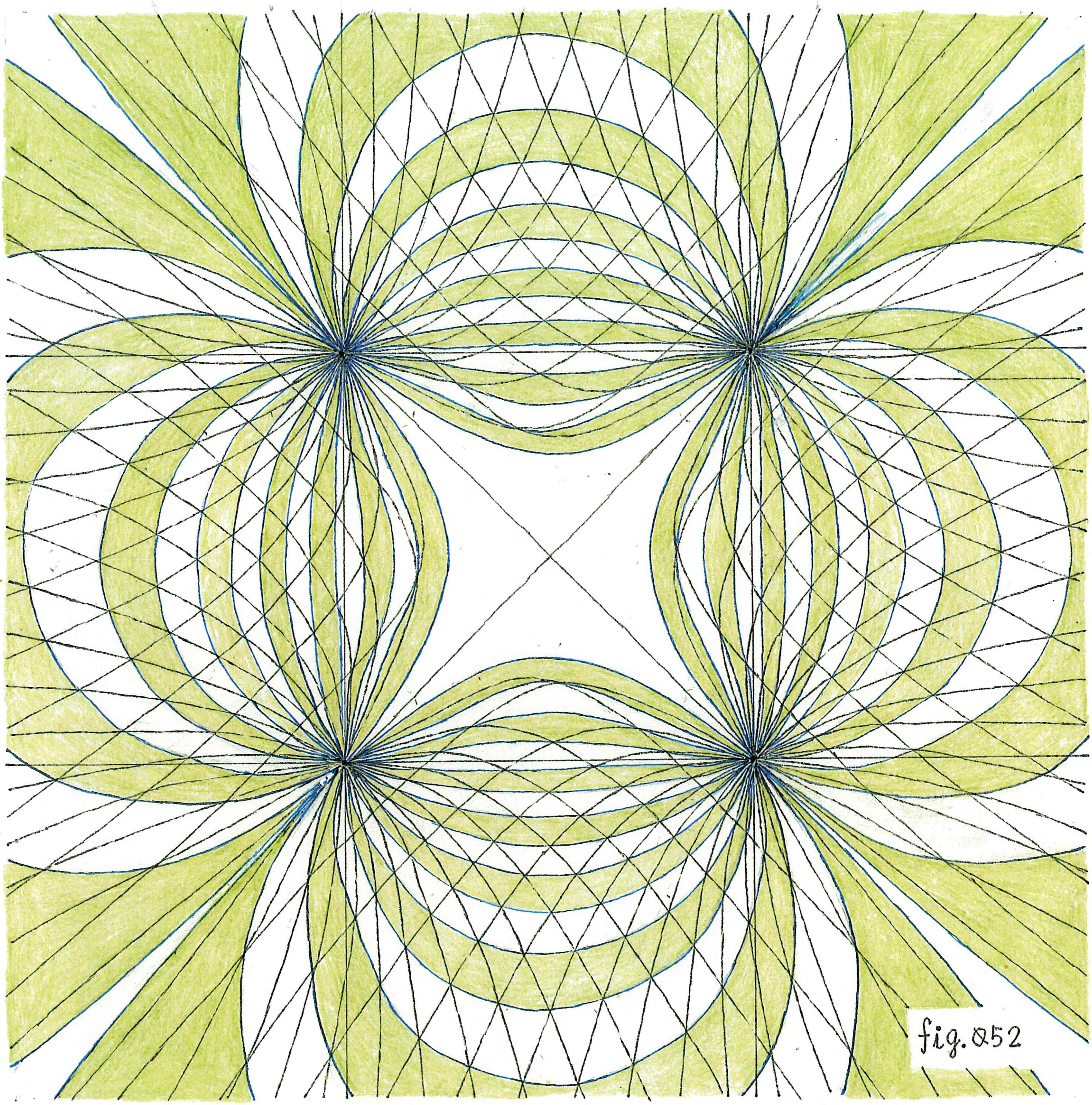


fig.052

右上から時計回りで、+32荷, −32荷, +32荷, −32荷の4極から成る荷力曲線群を描きました。 期待通り、90°の回転対称性が成り立っているのが良く分ります。でもこのことは作図方法から自明です。僕の描いたのは、まず左上と右下の2極だけから成る斥力的荷力曲線群を作図し、同様に、右上と左下の2極だけから成る斥力的荷力曲線を作図しました。さらに、これら2組の荷力曲線群が成す交点たちを通る引力的包絡曲線群を作図したものです。この作図方法が、90°の回転対称性を保証する(Guarantee)のは明らかです。他の作図方法も有ります。

【P053】7月24(金) 荷力曲線群の呈示(続き)

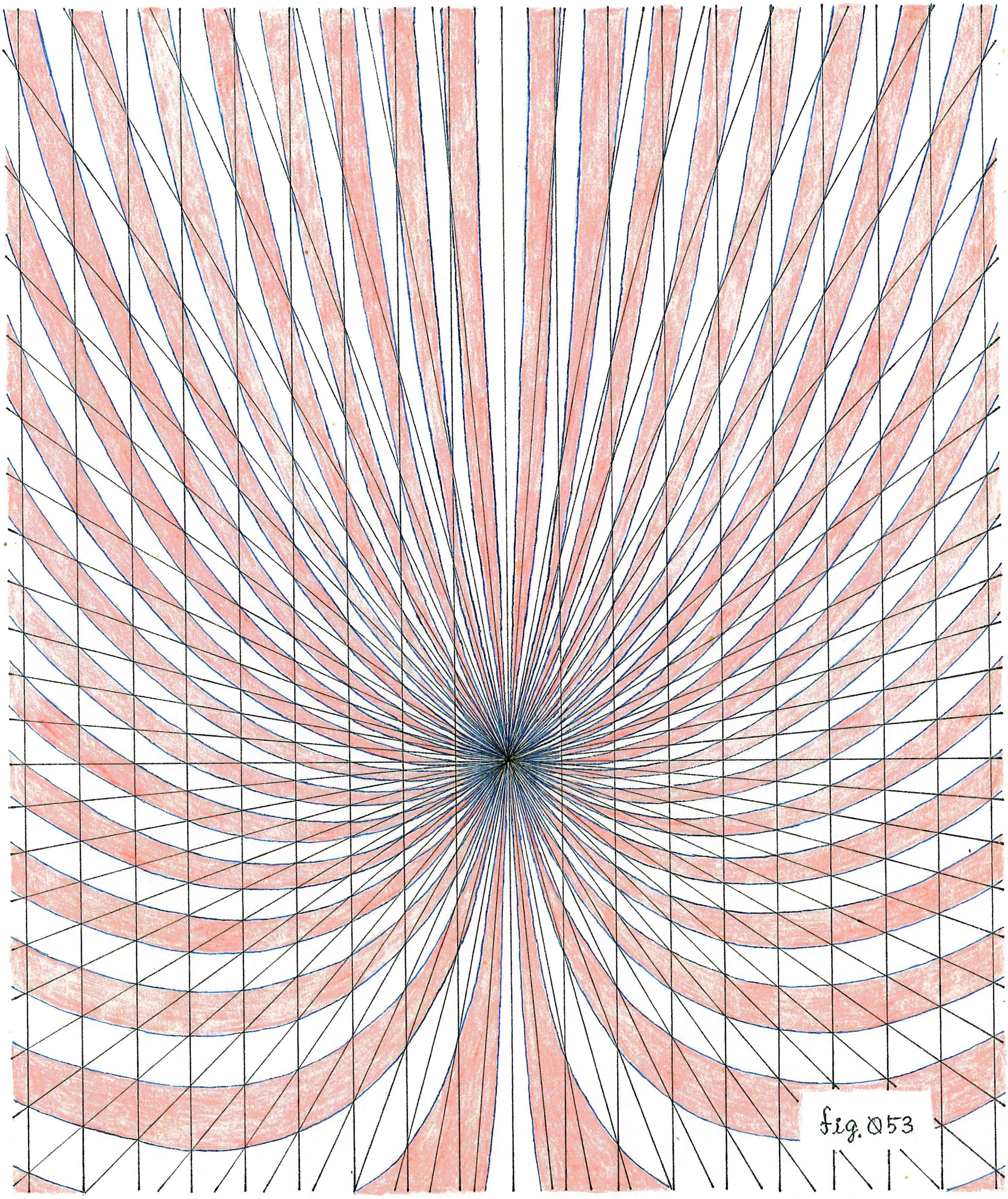


fig.053

これは2極から成る荷力曲線群です。一極しか見えませんね。この極の荷値は+72です。もう1極は紙面の上方のはるか彼方に有ります。その荷値は絶対値がとても大きな負の値を持ちます。従って、その荷力半直線は紙面上では平行線として表われます。この2極から成る荷力曲線群はすべて、限りなく平行な半直線群に近づくと思われます。

【PQ54】 7月26日(日) 荷力曲線群の呈示(続き)

僕は、どの2極も引力的な、3極から成る荷力曲線群を描きませんでした。何故か？ それは、そのような荷力曲線群は存在しないからです。どの2極も異符号になるように、3極に±1を割り当てることは不可能です。可能なのはせいぜい、(+1, +1, +1), (+1, +1, −1), (+1, −1, −1), (−1, −1, −1)の4通りです。それでは、"引力的"とか"斥力的"とかの性質と荷値の符号とはどんな関係が有るのでしょうか？ 僕は、それらの説明無しで使用して来ました。下図のように考えれば良いのです。そもそも、単極子(MonoPole)に、等方的な線分の本数だけではなく、それら半直線に向きが有るとするのです。極から外向きの向きを持つ極の荷値の符号を正とし、内向きの向きを持つ極の荷値の符号を負と約束することにします。

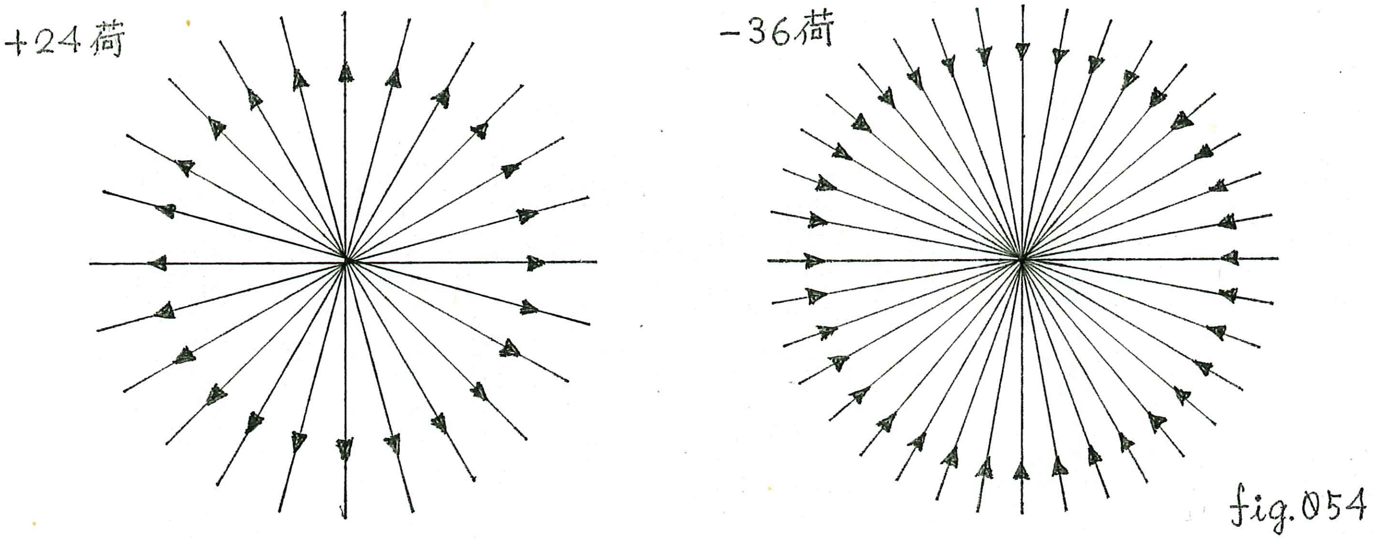


fig.054

これにより、荷力曲線群の各曲線も有向曲線に成ります。下図に、引力的な荷力曲線がどのような向きを持つのかを描きましょう。

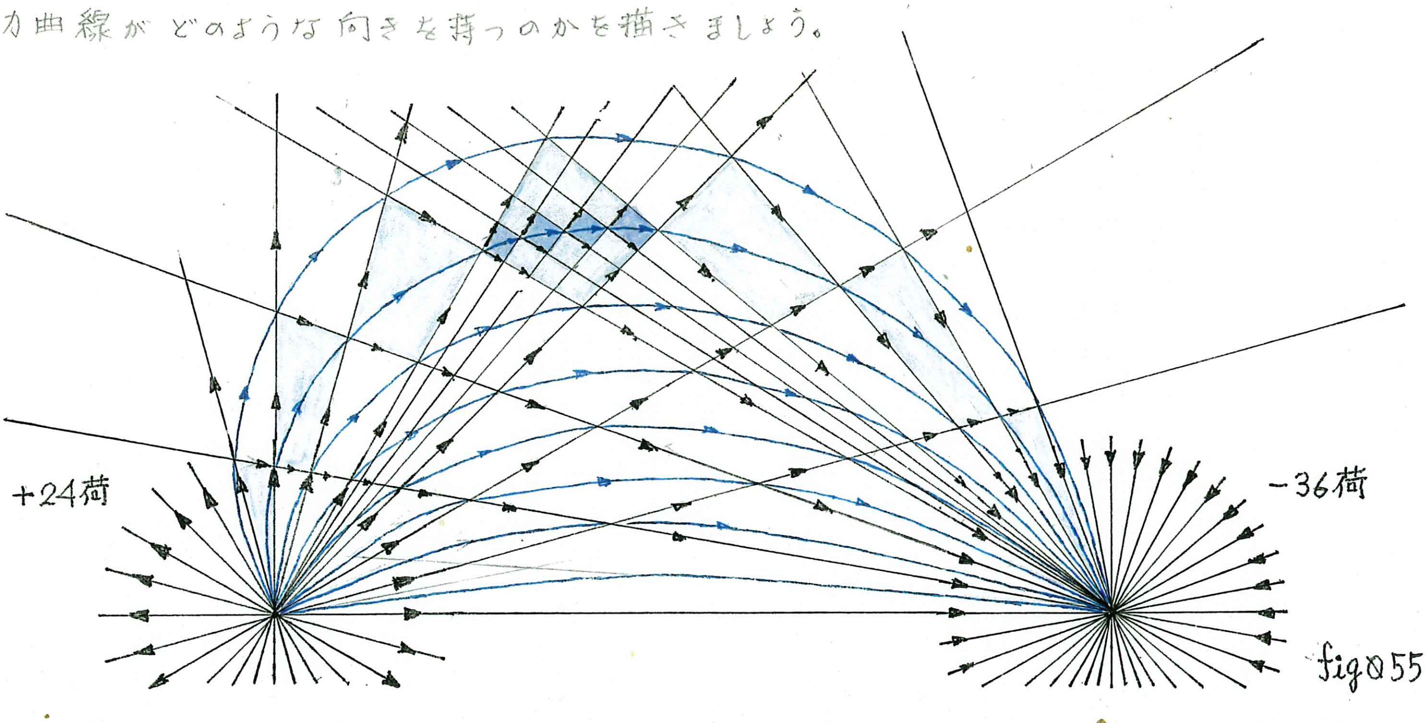


fig.055

【P055】7月28日(火) 荷力曲線群の呈示(続き)

斥力的な荷力曲線がどのような向きを持つのかを描きましょう。

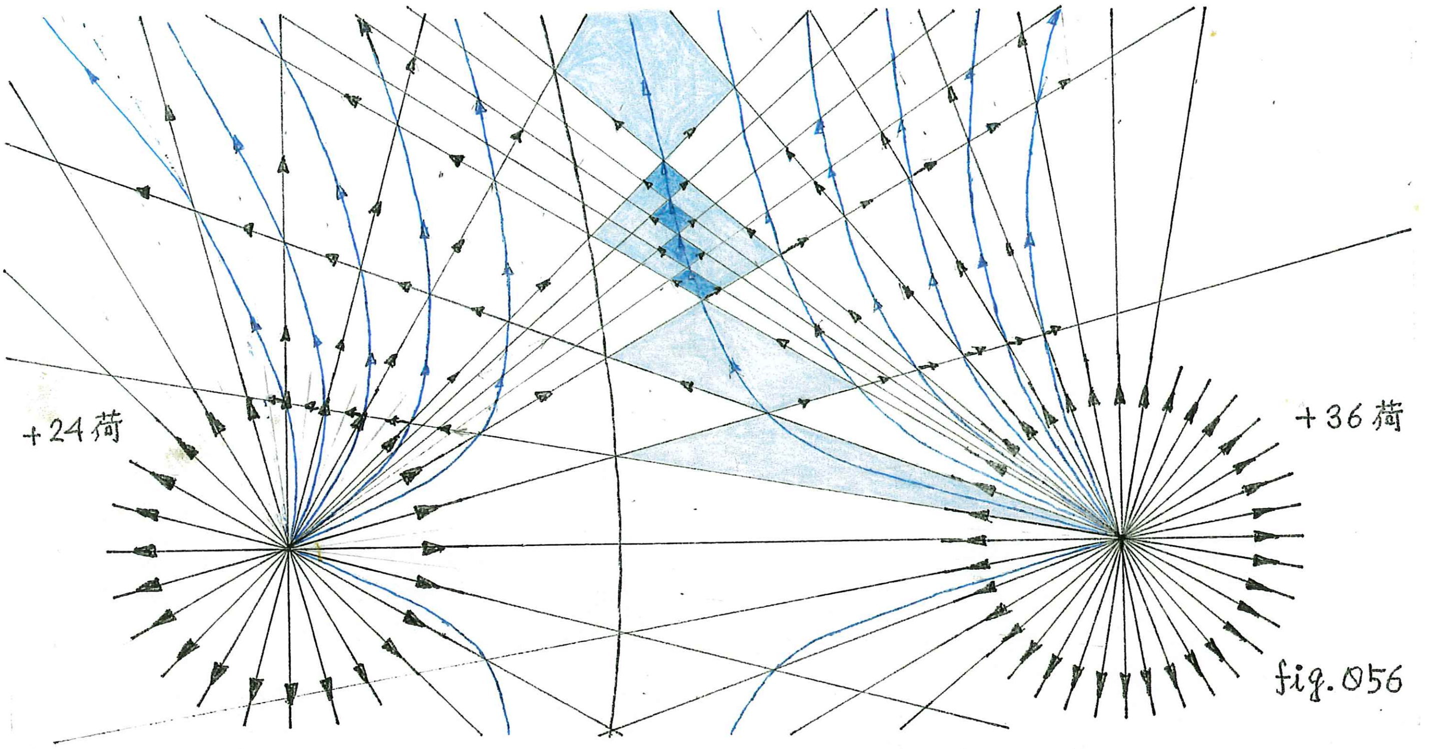


fig.056

fig.055の右上の4角形の部分に注目し、もっと拡大し、さらに2つの角をもっと細分してみよう。

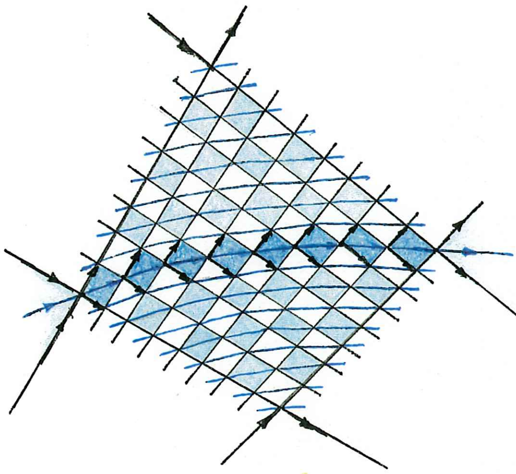


fig057

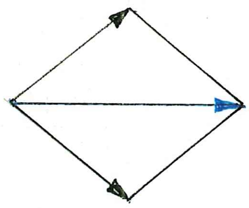


fig.058

2角(15°と10°)を2等分, 4等分, 8等分, …と細分すると、4個, 16個, 64個, …と4角形の個数が増加し(Increase)します。それらの4角形は、2分の1, 4分の1, 8分の1, …と次第に(Gradually)小さく成ります。それだけでは有りません。それら4角形の形も次第に平行4辺形に近づきます。つまり、荷力曲線の方向は、平行4辺形の2つの辺を有向辺、つまり2つのベクトル(Vector)と見做せば、この2つのベクトルの和のベクトルの方向と一致します。さらに、荷力曲線の本数も、角度の分割数に比例して増加します。限り無く分割したとしましょう。この場合、平面は、無限連続個の荷力曲線で埋め尽くされることに成ります。

【P056】7月29日(水) 荷力曲線群の呈示(続き)

従って、平面上の1点をかってに選べば、その点を通る荷力曲線が一意的に定まります。"荷力曲線群"という用語はもはや相応しくないですね。"荷力曲線場"あるいは単に"荷力場"(Charged Force Field)と呼ぶことにしましょう。これはベクトル場であり、しかも重ね合わせの原理が成り立つと思われます。
僕が今まで描いた荷力曲線群の作図方法は、荷力場から、有限個の荷力曲線を選び出す1つのアルゴリズム(Algorism)だと見做すことが出来ます。

P049で、荷値に関する加法性について言及し(Mention)ましたが、それだけではありません。例えばfig.050を見て下さい。(+72)+(−72)+(−36) = −36 ですから、無限遠まで延びる曲線は36本ですが、それらは、無限に縮小し、無限に広い視野で眺めれば、1点から等方的に延びる36本の半直線に見えると思われます。つまり、荷値−36の単極子です。

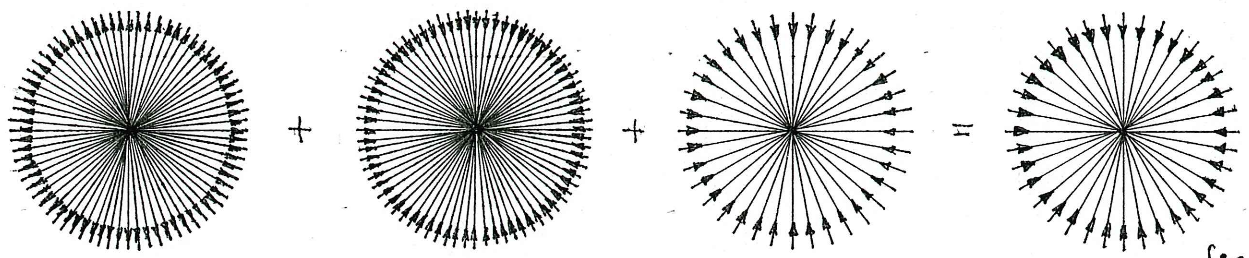


fig.059

同様に、fig.049で描いた中性子の模型の場合は、荷値の和は0ですから、無限に縮小し無限に広い視野で眺めれば、唯1点だけに見えるでしょう。荷値0の単極子です。これは、何も存在しないと考えても良いでしょう。

荷力場を考察するためには、ベクトル解析の諸恒等式が必要になると思われます。ベクトル解析については、当文書の基礎的な命題群の一部として、後でまとめて記述(証明)するつもりです。

fig.053の場合は、荷値に関する加法性は成り立ちません。それは、2極が無限に離れているからです。

【P057】 7月31日(金) さざなみ曲線群の呈示

● さざなみ曲線群の呈示

さざなみ曲線群(Wavelet Curves)の呈示をします。"さざなみ"を和英,英和辞書で引いたら、Ripplesや Waveletがでてました。Ripplesの方が一般的なようですが、僕には Waveletに思い出が有ります。ウェイブレット変換が流行った時期があり、僕も、それを主題(Theme)にした有料講習会に出席したことが有ります。そういう訳で、思い出もこめて、Waveletを選びました。但し、さざなみ曲線群とウェイブレット変換とは全く無関係です。僕がさざなみ曲線群を思い付いたのは、荷力曲線群を作図していた時のことです。荷力曲線の基本は、1点から等方的に伸びている半直線群です。直線でなく円だったら? と思い付いた訳です。どのような曲線群に成るのかは、直ちに想像できました。但し、"波源"が1個,2個の場合に限ってのことです。3個以上の波源の場合にはどういう曲線群になるのかは頭の中だけでは想像で(Imagine)きませんでした。やって見なければ分りません。波源(Origin)は、荷力曲線群の場合の極(Pole)に相当する点です。波源が1個だけの場合の、曲線群を単源子と呼ぶことにします。下図に単源子を示します。

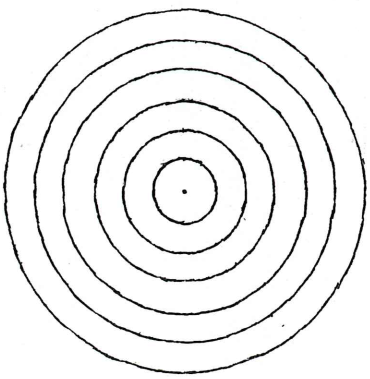


fig.060

単源子は、同心円たちから成ります。僕は6個の円しか描きませんでしたが、無限個の円が中心から外側に向って存在します。僕の描いた円は、その半径が、4mm, 8mm, 12mm, 16mm, 20mm, 24mmの同心円たちです。つまり、4mm毎にその半径が大きくなる円群です。単源子は、その半径の増加の単位長さを持ちます。上図の単位長さは4mmです。この単位長さのことを源値あるいは波長と呼ぶことにしましょう。これはちょっと困りますね。長さは、拡大コピーや縮小コピーをした場合には変化してしまいます。原紙を見てくれるならば問題ないのですが、貴方がコピーを見ているとしたら、長さそのものは信用できなくなります。意味を持つのは長さの比だけです。荷力曲線群の場合には、半直線たちと、それらの角度量が基本となりますが、これらは拡大,縮小しても変わりません。さざ波曲線群と荷力曲線群とは多くの似た性質

が有ります。波源や源値が極や荷値に対応することは既に述べましたね。さらに荷値と同様に源値も符号を持っています。負の波長の意味は理解できません。だからこそ、"波長"だけではなく"源値という用語も与えたつもりです。源値の符号の幾何学的解釈については、当主題『さざなみ曲線群の呈示』の総括の際に述べる(定義する)つもりです。単源子だけから成るさざなみ曲線群については fig.060で終わりです。それ以上何も語る必要が有りません。考察する(Study)意味が有り、興味の対像となるのは複数個の波源から成るさざなみ曲線群です。

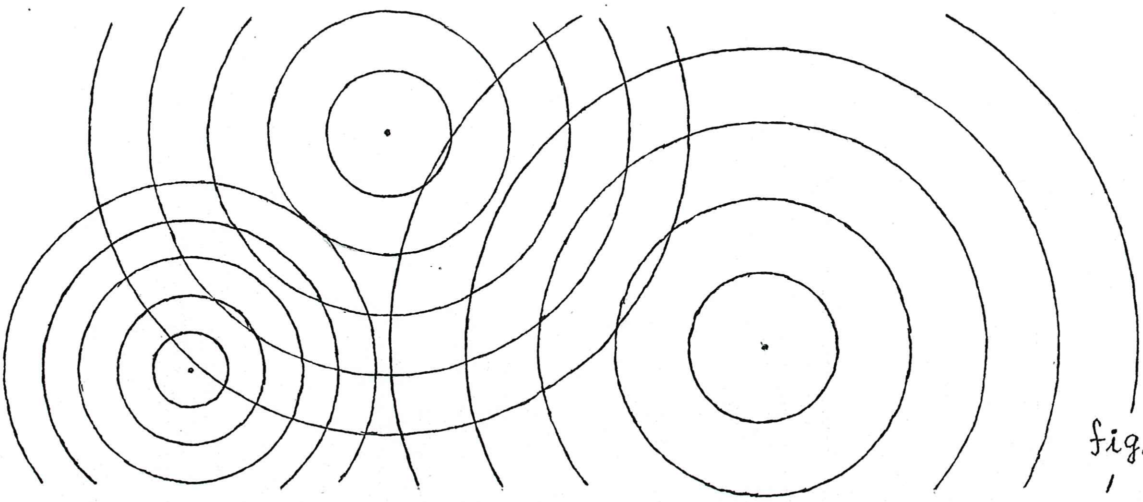


fig.061

上図のように、幾つかの同心円群を作図し、それらの円たちが成す交点たちの、あるやり方での包絡曲線を描きます。それがさざなみ曲線群です。さざなみ曲線群の元となる波源のかってな2源に注目するとします。そのとき、曲線群は、引力的、または斥力的と形容できる曲線群に見えます。これも荷力曲線と似ていますね。唯、荷力線群とは決定的な違いが有ります。荷力線群の場合は、荷値が異符号ならば引力的となり、同符号ならば斥力的となりますが、どういう訳か、さざなみ曲線群の場合は、源値が異符号ならば斥力的となり、同符号ならば引力的になります。重力を想起しますね。唯、負の質量を持つ物質は見付かっていないのですが。

僕が"さざなみ曲線群"と名付けたのは、物理的現象(Phenomenon)のさざなみに、その形状が似ているからです。とても深く、とても広い池の中央に幾つかの小石を同時に投げ入れたとします。同心円のさざなみが石の個数だけ発生します。そして互いに干渉し(Interfere)て、波頭が波紋(Ripple)を作ります。波紋の英訳がRipple(さざ波)なのは面白いですね。さざなみ曲線群がこの波紋に似ているのでさざなみ曲線群と名付けようと思ったのです。それ以上の意味は有りません。僕が考察の対象としようとしているのは、物理的な実体としてのさざ波ではありません。あくまでも、幾何学的実体としてのさざなみ曲線たちです。

【P059】さざなみ曲線群の呈示（続き）

荷力曲線と同様に、僕がこれから描くことになるさざなみ曲線もやはり、近似（Approxmate）曲線です。フリーハンド（Free-Hand）で描くからです。でも単なる近似曲線ではありません。作図の拠所となる交点たちは確定点です。そのことは下図より明らかです。

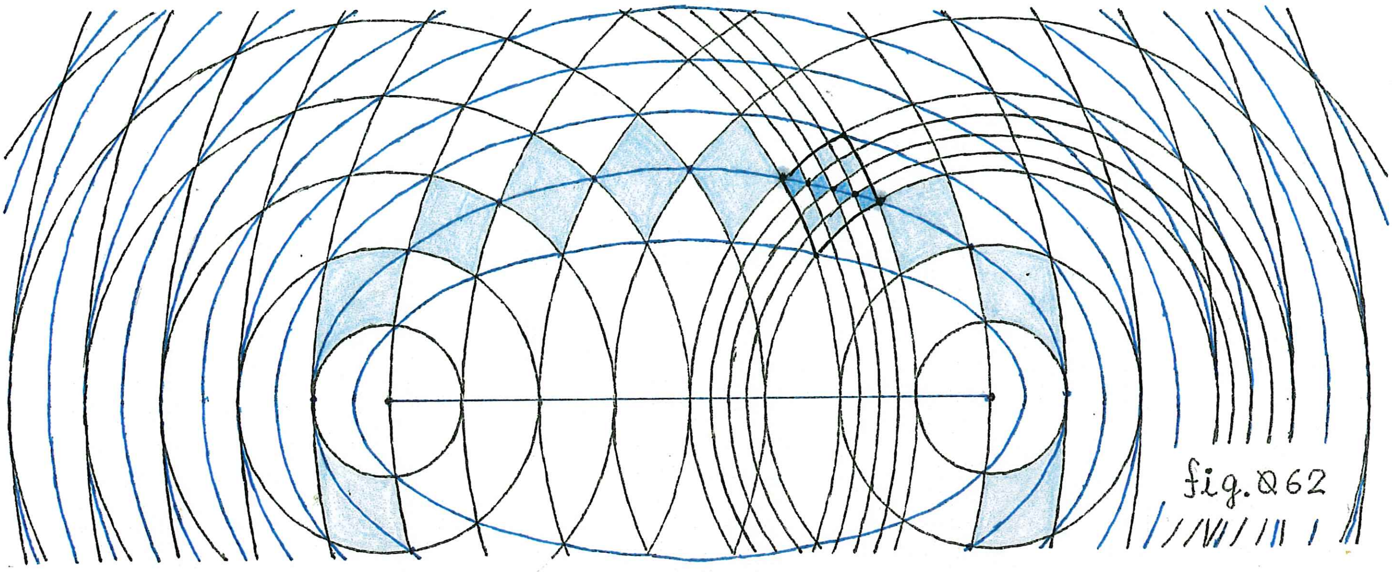


fig.Q62

上図の右側上部の、4つの円弧で囲まれた部分に注目して下さい。青色で強調し（Emphasize）た2交点は確定点です。この図形を構成する2組の円の半径の増分を2等分，4等分，…，しても、この2交点は、同じ曲線上の点であることに変わりはありません。唯、包絡曲線の精度（さざなみ曲線としての正確さ）が向上するだけです。注目した4つの円弧からなる図形をさざなみ4辺形と呼ぶことにします。

何だか変な気分がしませんか？上述は本末転倒だと思う。問題の2交点が確定点であることに変わりは無いのですが、そのことはさざ波曲線の定義の一部だと考えるべきだと思われます。上述の説明、そしてfig.Q62は、この定義が無矛盾で（Consistent）あることを主張していると考えるべきだと思われます。貴方はどう思いますか？ P043のfig.Q43とその説明文も同様です。これも荷力曲線の定義の一部だと考えるべきだと思います。

このように、さざなみ曲線群と荷力曲群とは多くの似た性質が有ります。重ね合わせの原理や、源値に関する加法性についてはどうでしょうか？ やって見なければ分りません。荷力曲線群とさざなみ曲線群は、正に似て非なるものと云えるでしょう。

荷力曲線と比べるとさざなみ曲線の作図は圧倒的に手間と時間が掛かります。しかし避けては通れない事です。素朴実践主義（Naive Practice Principle）が僕のモットー（Motto）です。さぁ、作図に取り掛かりましょう。

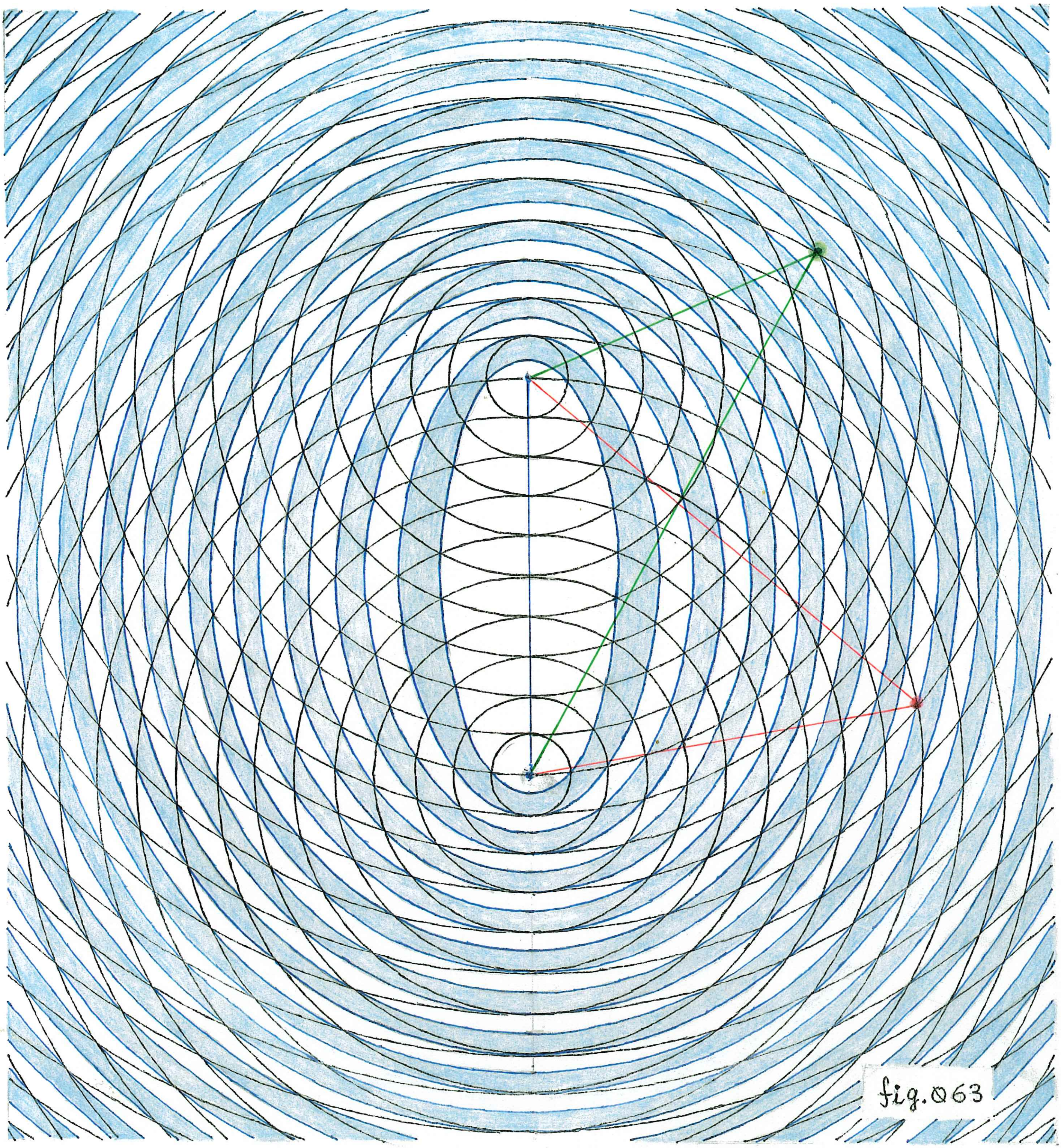


fig.063

源値が共に+7の2波源から成る引力的さざなみ曲線群を描きました。この源値をΔrと置くことにします。同一曲線上のかってな2交点に注目しましょう。それらを緑色と赤色で強調し(Emphasize)しました。緑点と2波源との距離の和は、$8\Delta r + 15\Delta r = 23\Delta r$です。赤点と2波源との距離の和は$13\Delta r + 10\Delta r = 23\Delta r$です。同じ値ですね。つまり、この曲線は惰円(Ellipse)です。どの曲線についても同じことが云えます。上図のさざなみ曲線群は惰円曲線群です。しかも全て同一の焦点(Focuses)を持ちます。それは波源と一致します。この事は源値が等しいからこそです。また、十分に大きい惰円たちの間隔を計ると、約3.5mmです。$1/2\Delta r$ですね。これは源値に関するある種の加法性に関連していると思われます。

【P061】 8月3日（月） さざなみ曲線群の呈示（続き）

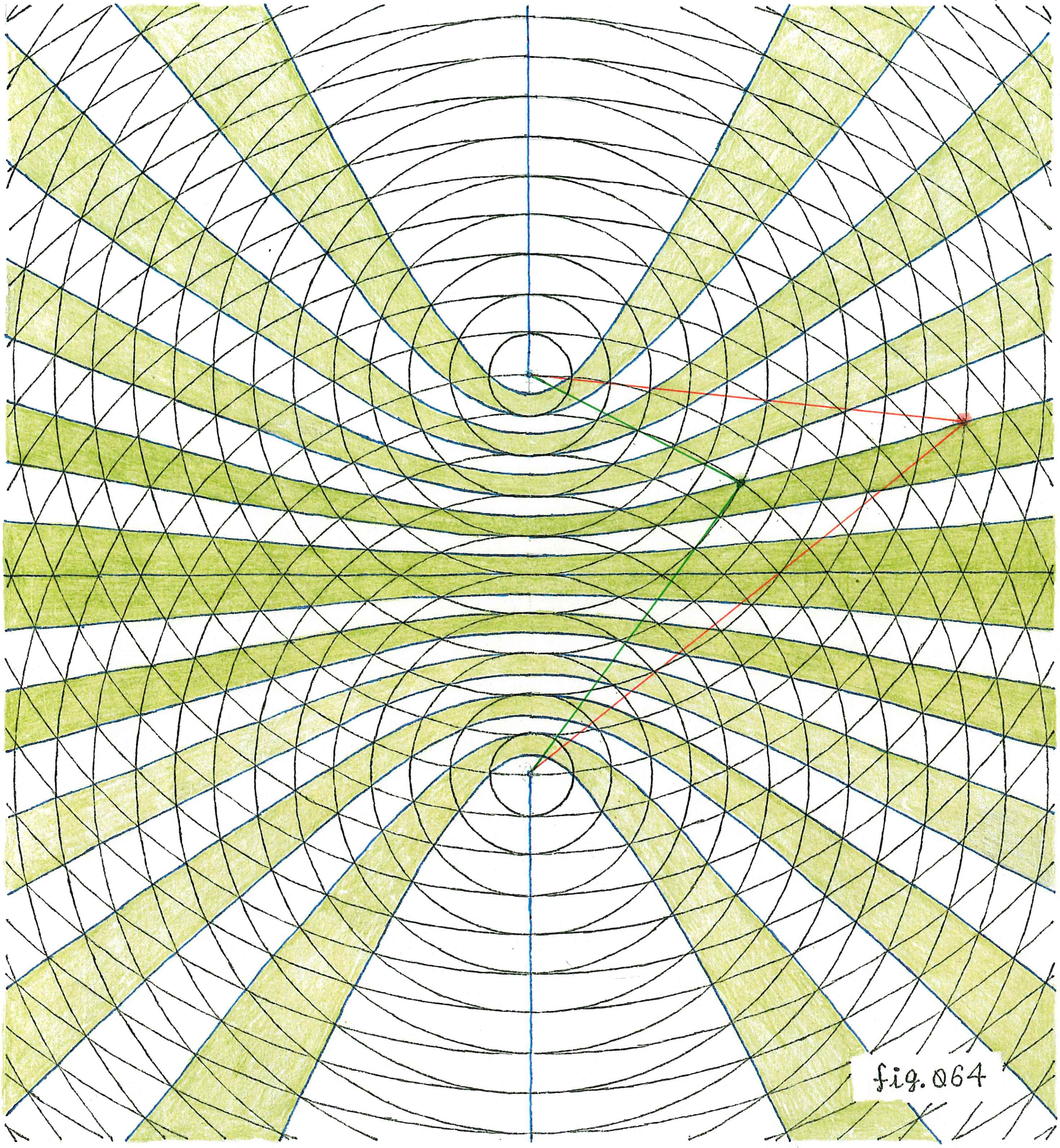


fig.064

源値が$+7$（下側）と-7（上側）の2波源から成るさざなみ曲線群を描きました。これらの源値の絶対値をΔrと置くことにしましょう。同一曲線上のかってな2交点に注目しましょう。それらを緑色と赤色で強調しました。緑点と下側の波源との距離と上側の距離との差は、$(+9\Delta r)+(-6\Delta r)=+3\Delta r$です。赤点の場合は、$(+14\Delta r)+(-11\Delta r)=+3\Delta r$です。同じ値ですね。つまり、かってに選んだこの曲線は双曲線（Hyperbola）です。上図のさざなみ曲線群は双曲線群です。その焦点は共通で波源と一致します。波源から遠ざかると曲線間の間隔はいくらでも大きくなります。つまり、その逆数は限りなく0に近づきます。覚えておきましょう。

8月5日(水) さざなみ曲線群の呈示(続き)

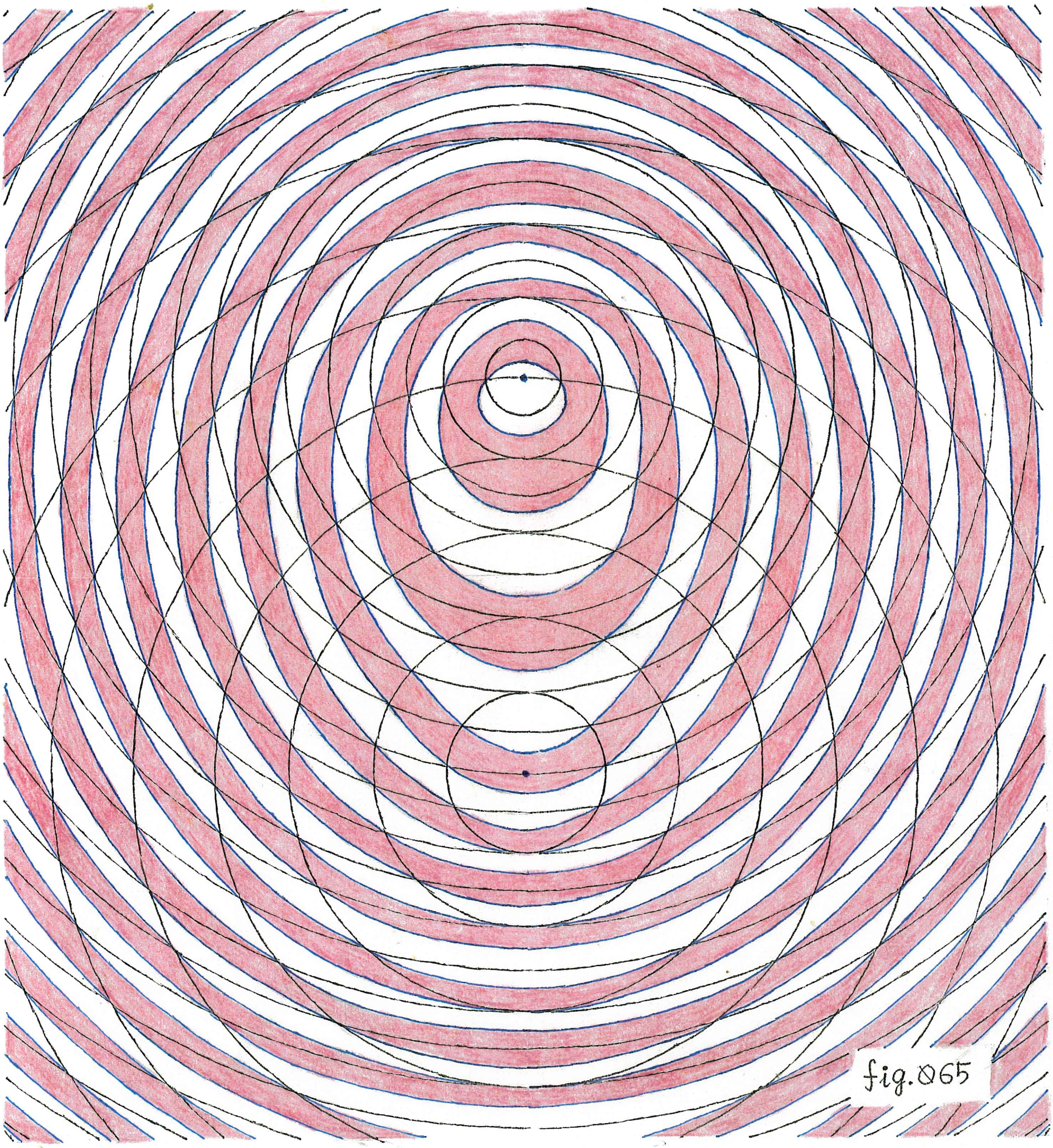


fig.065

源値が+14(下側)と+7(上側)の2波源から成るさざなみ曲線群を描きました。きれいな卵形の(Egg-Shaped)曲線の作図方法が見付かりましたね。以外だったのは、2波源を結ぶ線分の内部にまで侵入している曲線が現われたことです。
波源から十分に離れた所の曲線間の間隔を計ると約5mm弱です。
14/3 = 4.66… です。これは、源値に関するある種の加法性に関係していると思われます。

【P063】8月6日(木) さざなみ曲線群の呈示(続き)

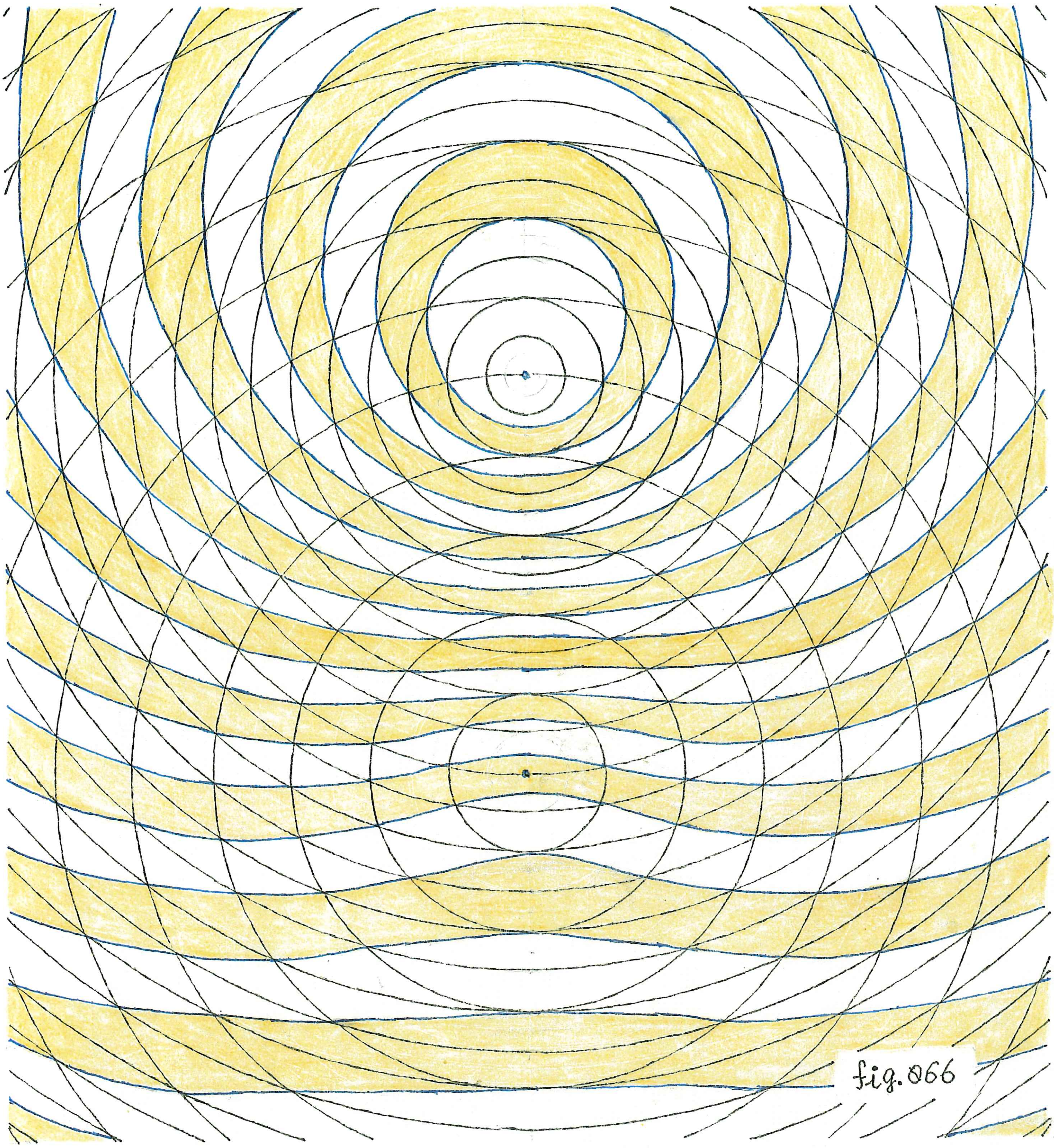


fig.066

源値が－14(下側)と＋7(上側)の2波源から成るさざなみ曲線群を描きました。変曲点の有る曲線が出現しました。僕の想像とは異なります。初めて見る曲線です。波源から十分に離れた所では円に近い曲線群になると思われます。その間隔は、たぶん14mmでしょう。これは波値の加法性に関する僕の予想が正しければの話です。それにしても上図の曲線群は面白いですね。源値の絶対値がもっと近い場合はどんな曲線群になるのでしょうか。

【P064】8月7日(金) さざなみ曲線群の呈示(続き)

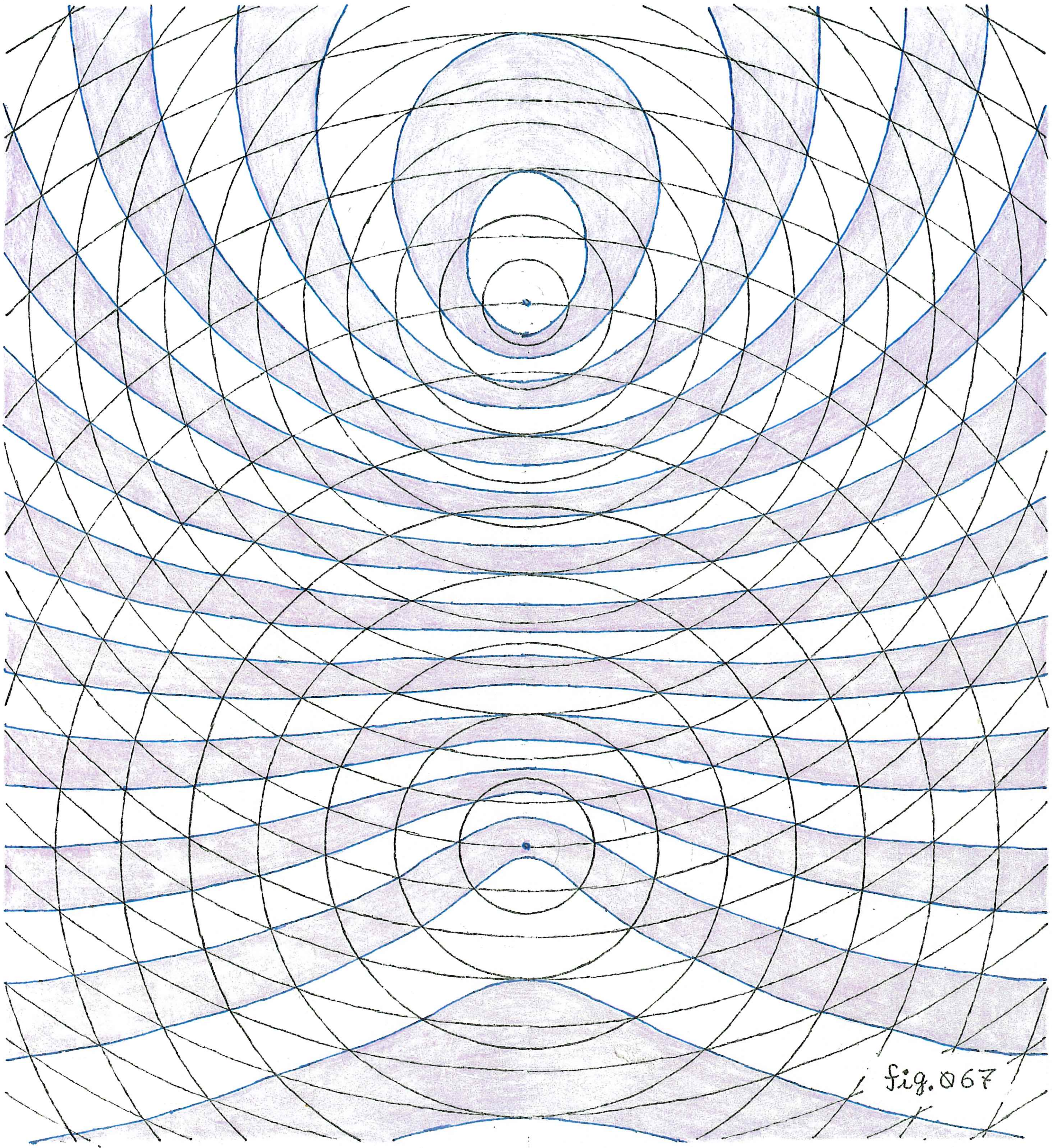


fig.067

源値が−12(下側)と+8(上側)の2波源から成るさざなみ曲線群を描きました。fig.066と比べると、下側の波源の影響力がより強まったように見えます。これは、源値の絶対値がより近くなったためだと思われます。波源から遠ざかれば遠ざかる程さざなみ曲線の形状は限りなく円に近づくのはfig.066と同様です。

波源から十分に離れた所では曲線の間隔は24mmとなると予想されます。次は、3波源から成るさざなみ曲線群の作図に挑戦しましょう。どのような曲線群になるか、貴方に想像できますか?

 8月9日（日）さざなみ曲線群の呈示（続き）

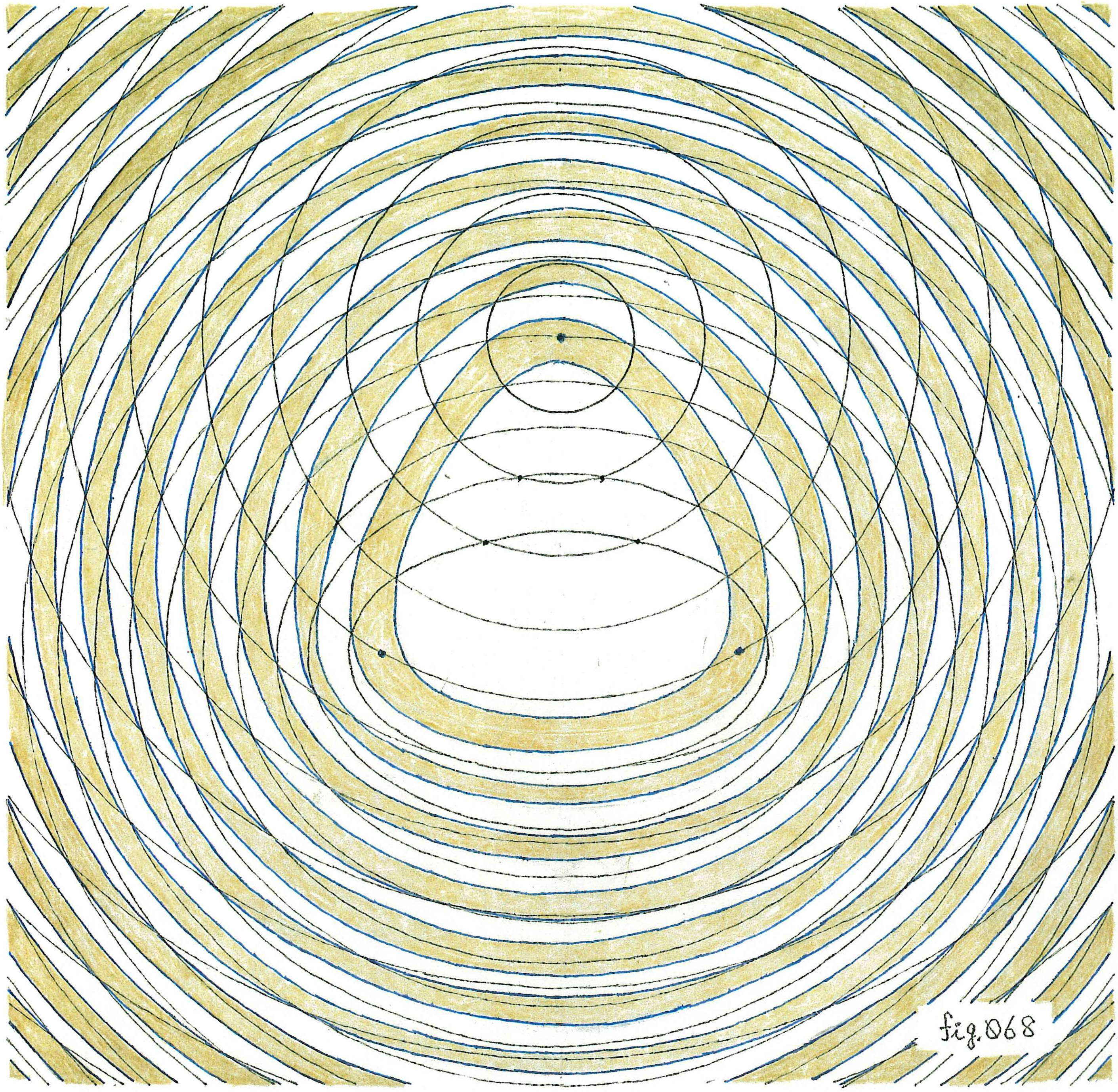


fig.068

源値がどれも＋12の3波源から成るさざなみ曲線群を描きました。波源の位置は、一辺が60mmの正3角形の頂点です。きれいなおむすび形の曲線が得られましたね。これは予想通りです。重ね合わせの原理が成り立つならば、120°の回転対称性が成り立つはずですが、ちょっと歪んでいますね。作図誤差のせいだと思われます。波源から十分離れれば、円になり、その間隔は4mmになると予想されます。

波源の成す正3角形の内側にもう1本曲線が有るのですが、4交点しか無いので描きませんでした。より正3角形に近づくのでしょうか、それとも円に近づくのでしょうか？興味が有りますね。そこで、波源間の距離をもっと大きくし、さらに源値（波長）をもっと小さくしたさざなみ曲線群を作図することにしましょう。

【P066】8月10日(月) さざなみ曲線群の呈示(続き)

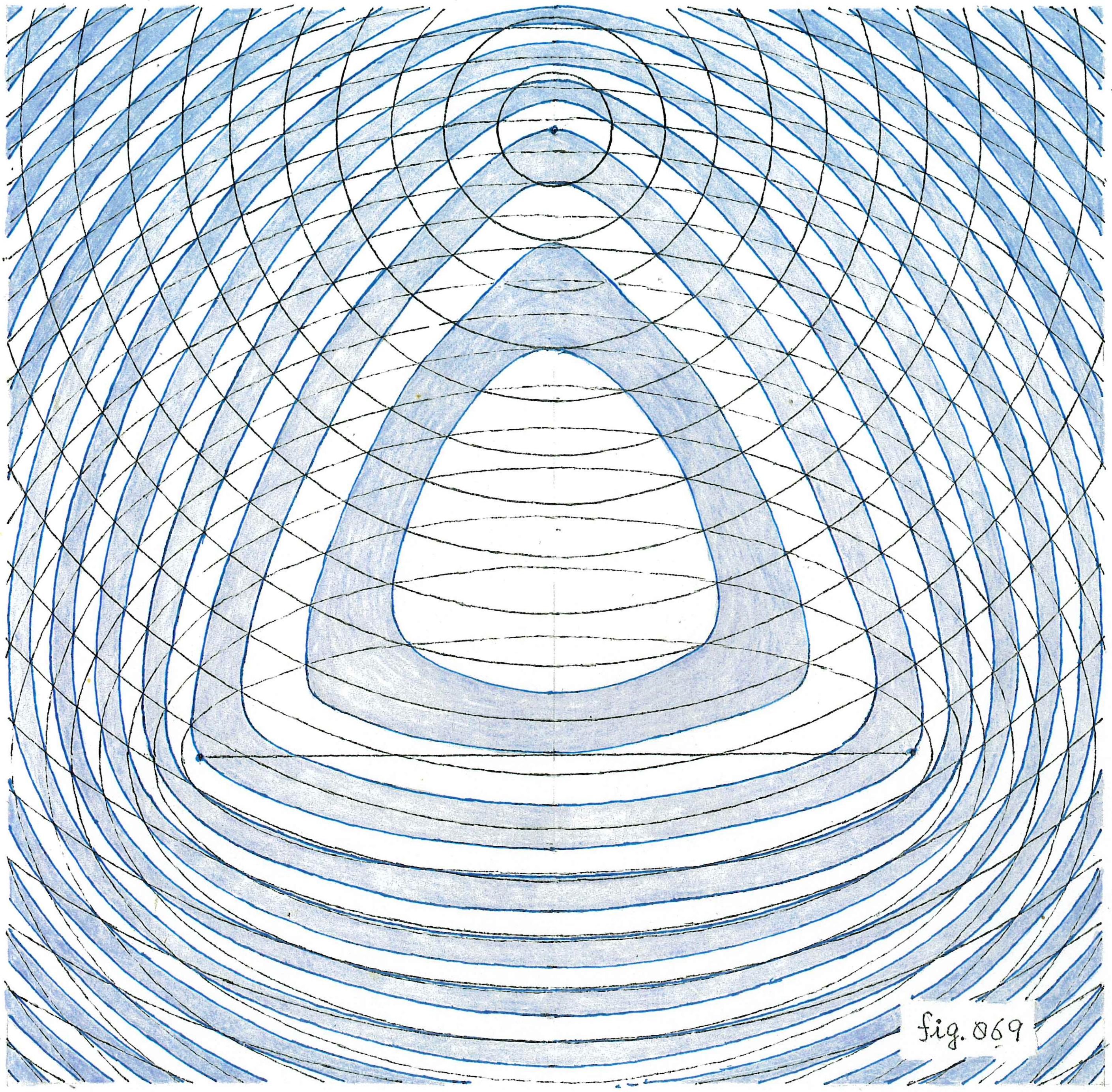


fig. 069

源値がどれも+9の3波源から成るさざなみ曲線群を描きました。波源の位置は、1辺が120mmの正3角形の頂点です。

波源の内部では、重心に近づくほど円に近くなると思われますが、上図だけでは断言(Assert)できませんね。でも心配には及びません。作図中に面白い事に気付いたからです。同一曲線の点はどれも、3波源からの距離(3個の線分の長さ)の和が等しいのです。このことは、気付いてしまえば、あたりまえです。説明する必要は有りません。従って、これらの曲線が満たす等式を求めることは難しく有りません。その等式を調べれば良いのです。上図の曲線たちに名前を付けましょう。**3焦点楕円**と呼ぶことにします。4焦点,5焦点楕円も考えられるでしょうか?

【P067】8月13日（木）さざなみ曲線群の呈示（続き）

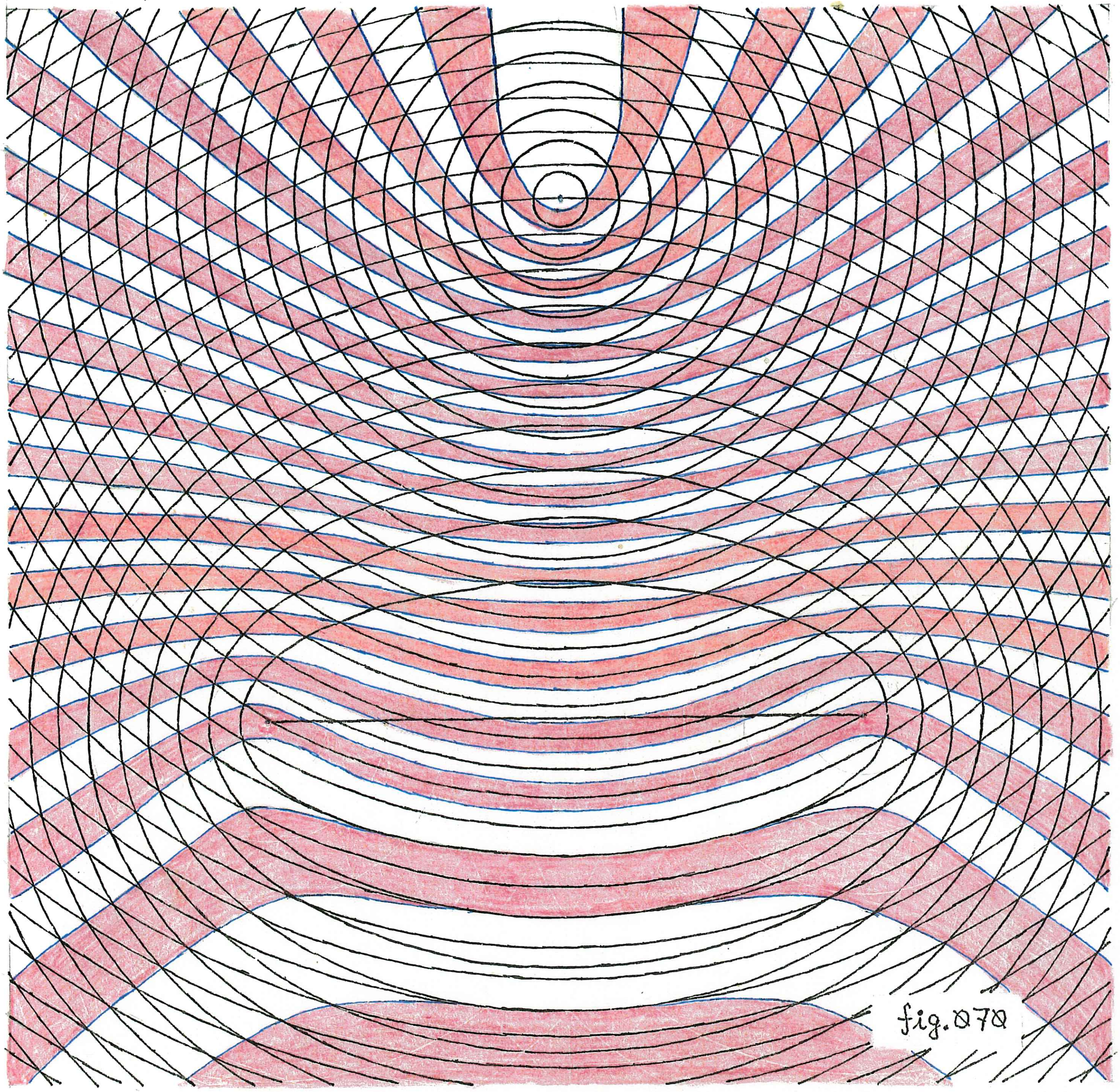


fig.070

源値が、−5（上側），+10（右下），+10（左下）の3波源から成るさざなみ曲線群を描きました。波源の位置は、1辺が100mmの正3角形の頂点です。波源から離れれば離れる程、曲線間の間隔は限りなく大きくなるはずです。その逆数は0に限りなく近づきます。

上図のさざなみ曲線群は、P049のfig.049で描いた荷力曲線群に相当する曲線群です。P049では、中性子の模型だと述べましたね。

上図でも、変曲点があると思われる曲線が現われました。

【P068】8月15日（土）さざなみ曲線群の呈示（続き）

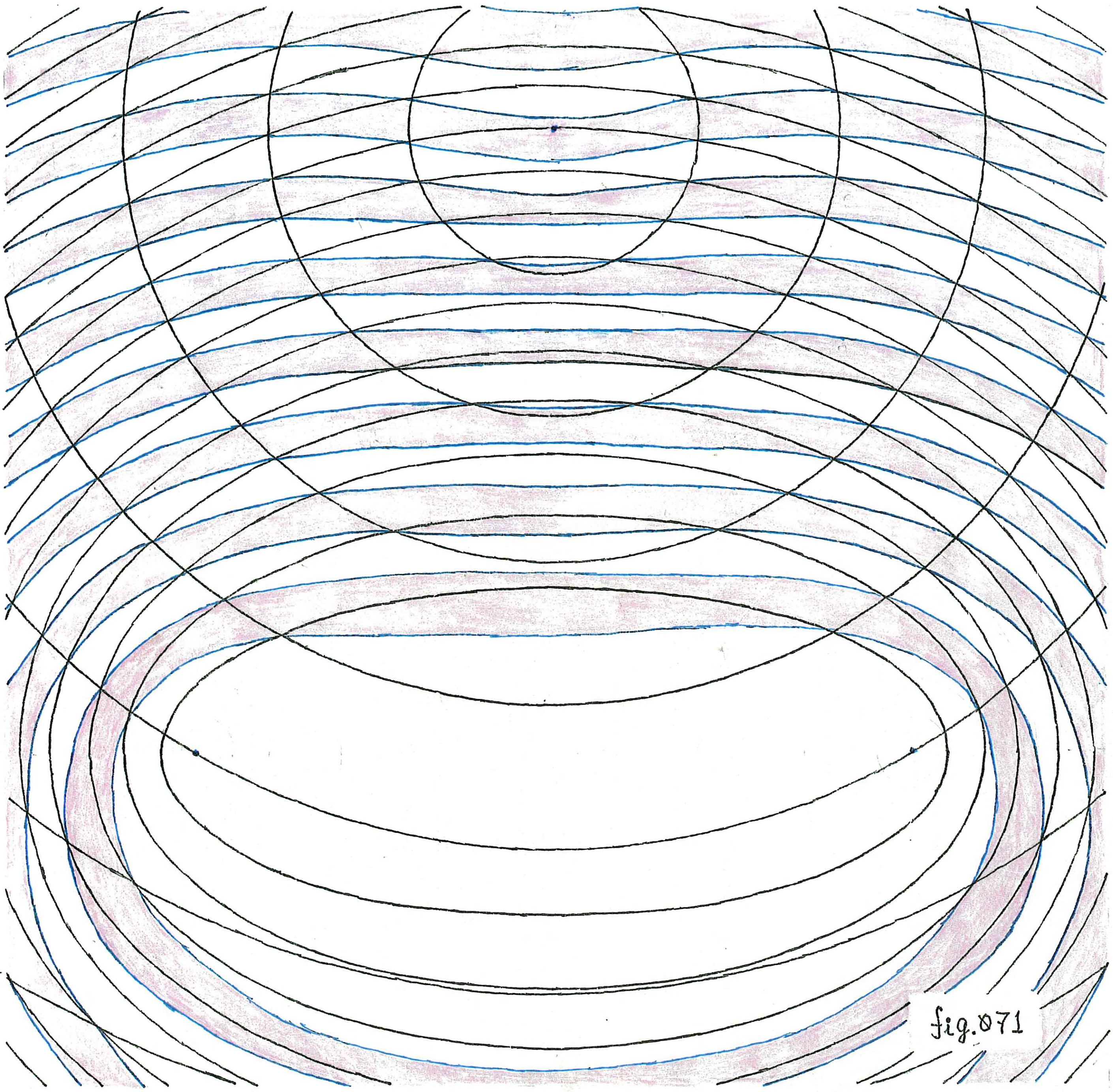


fig.071

源値が、−24（上側），+12（右下），+12（左下）の3波源から成るさざなみ曲線群を描きました。波源の位置は、1辺が120mmの正3角形の頂点です。波源から遠ざかれば遠ざかる程、曲線は円に近くなり、その間隔は限りなく8mmに近くなるはずです。

下側の、歪んだような楕円のように見える大きな曲線の形は面白いですね。大きく開けた口のようです。

上図のさざなみ曲線群は、P051のfig.051で描いた荷力曲線群に相当する曲線群です。P051では、陽子の模型だと述べましたね。

 さざなみ曲線群の呈示(続き)

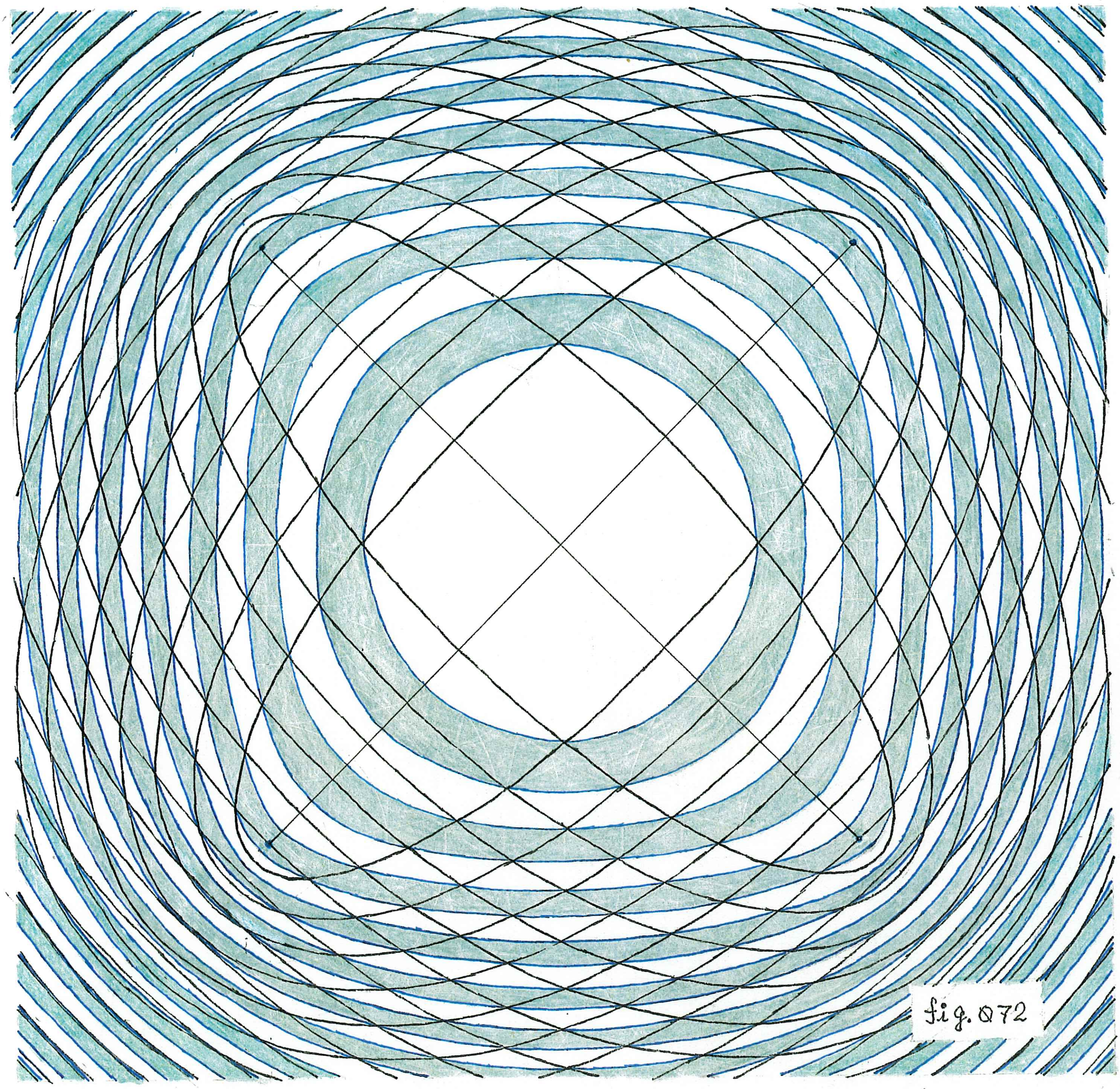


fig.072

源値がどれも+10の4波源から成るさざなみ曲線群を描きました。波源の位置は、1辺が100mmの正方形の頂点です。

波源の内部では、中心に近づくほど円に近くなると思われます。また、波源から遠ざかれば遠ざかるほど円に近くなり、それらの間隔は限りなく2.5mmになるはずです。

4つの源値が、符号も含めてすべて等しいので、これらの曲線群は、4焦点楕円です。つまり、同一曲線上のどの点も、4つの波源(焦点)からの距離の和は一定です。このことは焦点の配置にかかわらずに成り立つはずです。同一直線上のかつてな4点を焦点とする4焦点楕円群も存在します。一般に、源値がすべて等しいn個の波源から成るさざなみ曲線群はn焦点楕円群になるはずです。面白いですね。

【P070】8月19(水) さざなみ曲線群の呈示(続き)

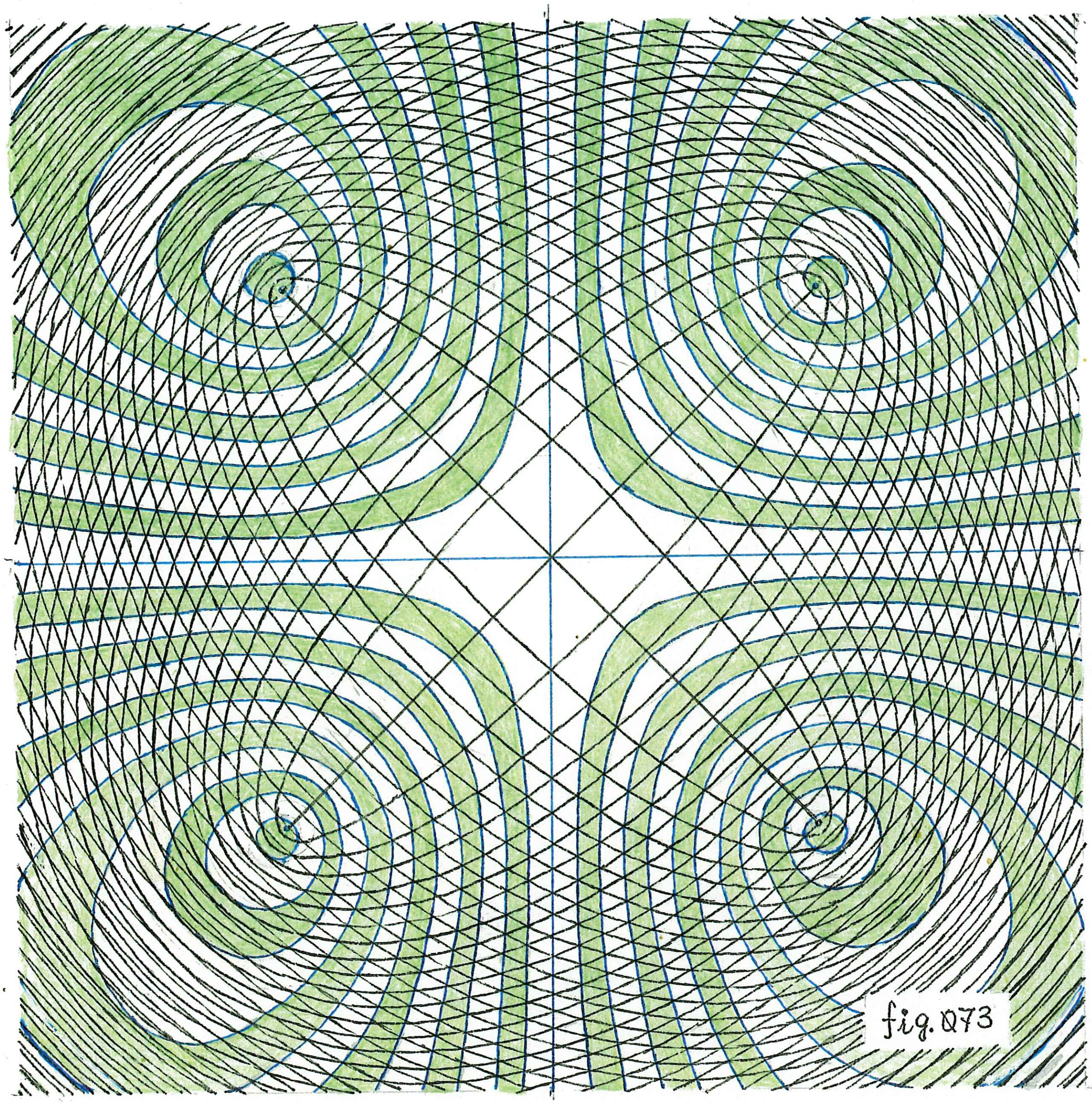


fig. 073

源値が、+4(左上)、−4(右上)、+4(右下)、−4(左下)の4波源から成るさざなみ曲線群を描きました。波源の位置は、1辺が80mmの正方形の頂点です。

閉曲線が現われましたね。中央の直行する十字直線以外はすべて閉曲線だと思われます。それにしても不思議ですね。有限本の曲線しか存在しないように見えます。2組の楕円群の交点が無限にあるにもかかわらずです。どうしてなのでしょうか?

そういえば、P061のfig.064の双曲線群についても、同様のことが言えますね。でも、今回のfig.073は、fig.064とは本質的に異なる点があります。それは、中央の十字直線以外はすべて閉曲線であると思われるからです。もしそうなら、閉曲線の長さは有限ですから、有限個の閉曲線群上の交点(2組の楕円群の交点)も、十字直線上の交点を除けば、有限個ということになります。信じ難い!!

【P071】8月23日（日）さざなみ曲線群の呈示（続き）

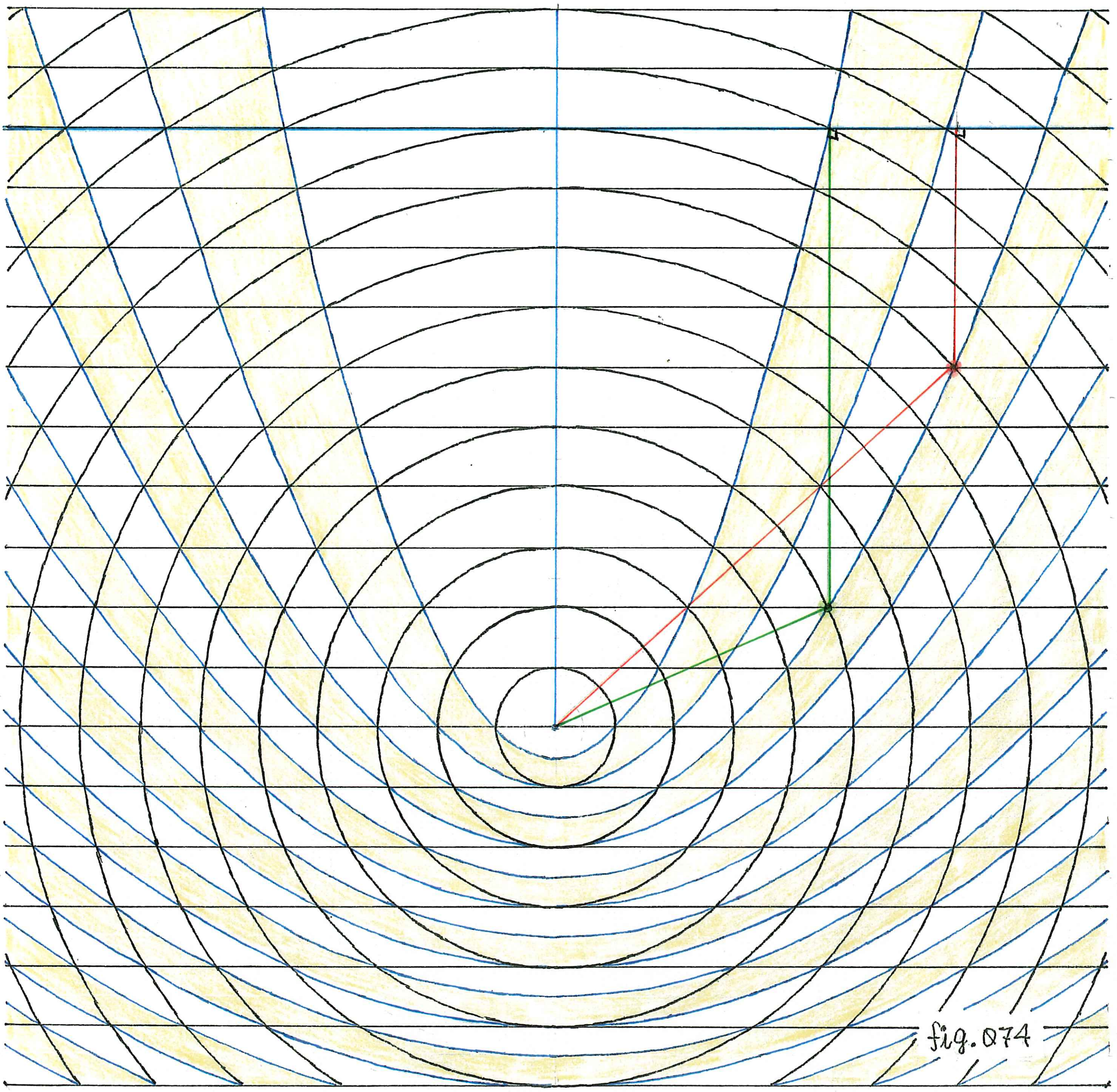


fig.074

これは2波源から成るさざなみ曲線群です。1波源しか見えませんね。この波源の源値は+10です。もう1つの波源は紙面の上方のはるか彼方に有ります。その源値も+10です。これをΔrと記すことにします（$\Delta r = 10$ mm）。従って上方の単源子は紙面上では、間隔がΔrの平行線群として表わされます。

同一曲線上のかってな2交点に注目しましょう。それらを緑色と赤色で強調しました。また、緑点と赤点の上方にあるかってな平行線にも注目しましょう。それを青色で強調しました。

緑点と、下側の波源との距離と上側の青色の平行線との距離の和は$5\Delta r + 8\Delta r = 13\Delta r$です。赤点と下側の波源との距離と上側の青色の平行線との距離の和は$9\Delta r + 4\Delta r = 13\Delta r$です。同じ値$13\Delta r$ですね。よって、かってに選んだ曲線は放物線（Parabola）です。従って上図のさざなみ曲線群は焦点を共有する放物線群です。

 8月24(月)さざなみ曲線群の呈示(続き)

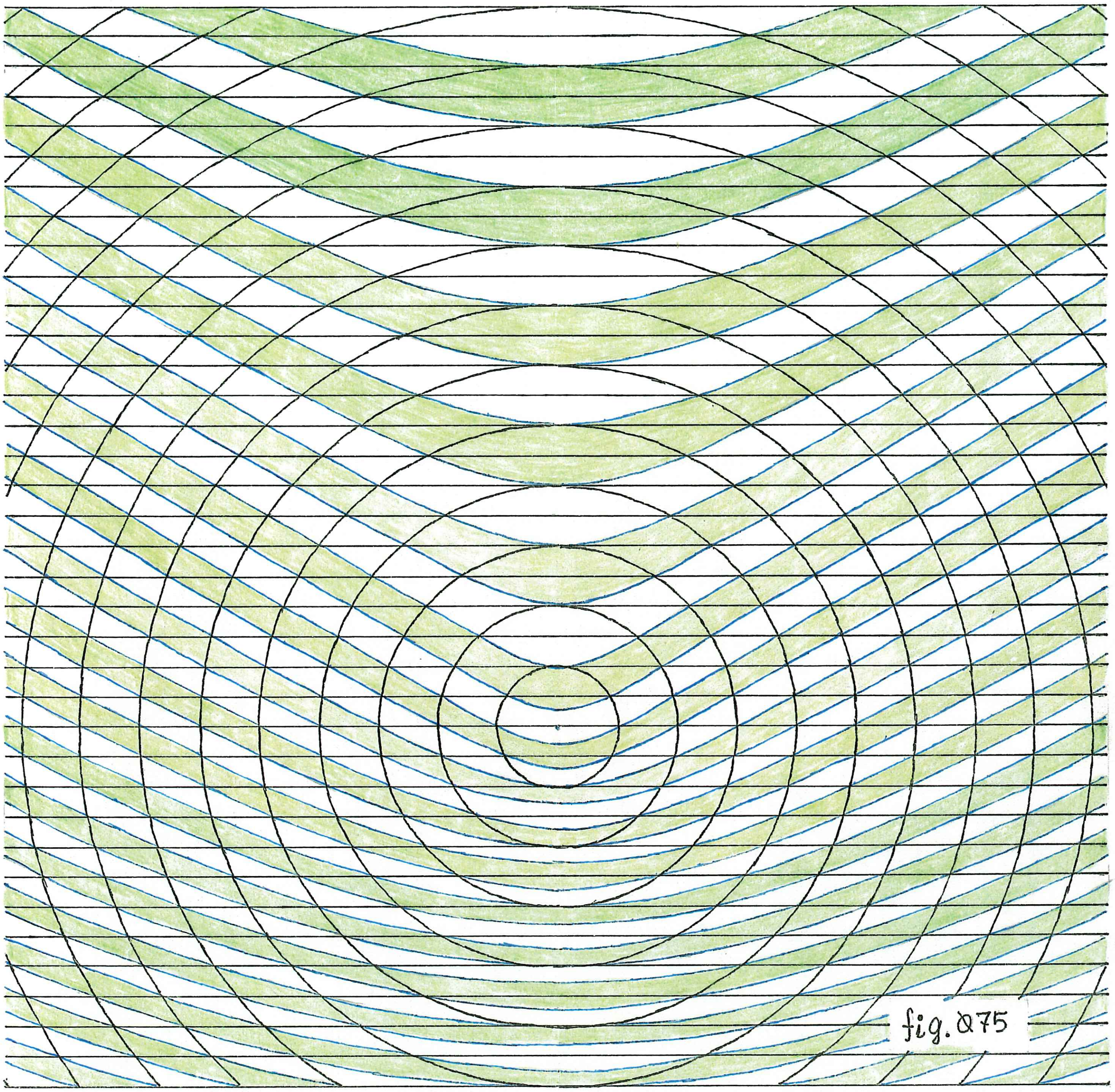
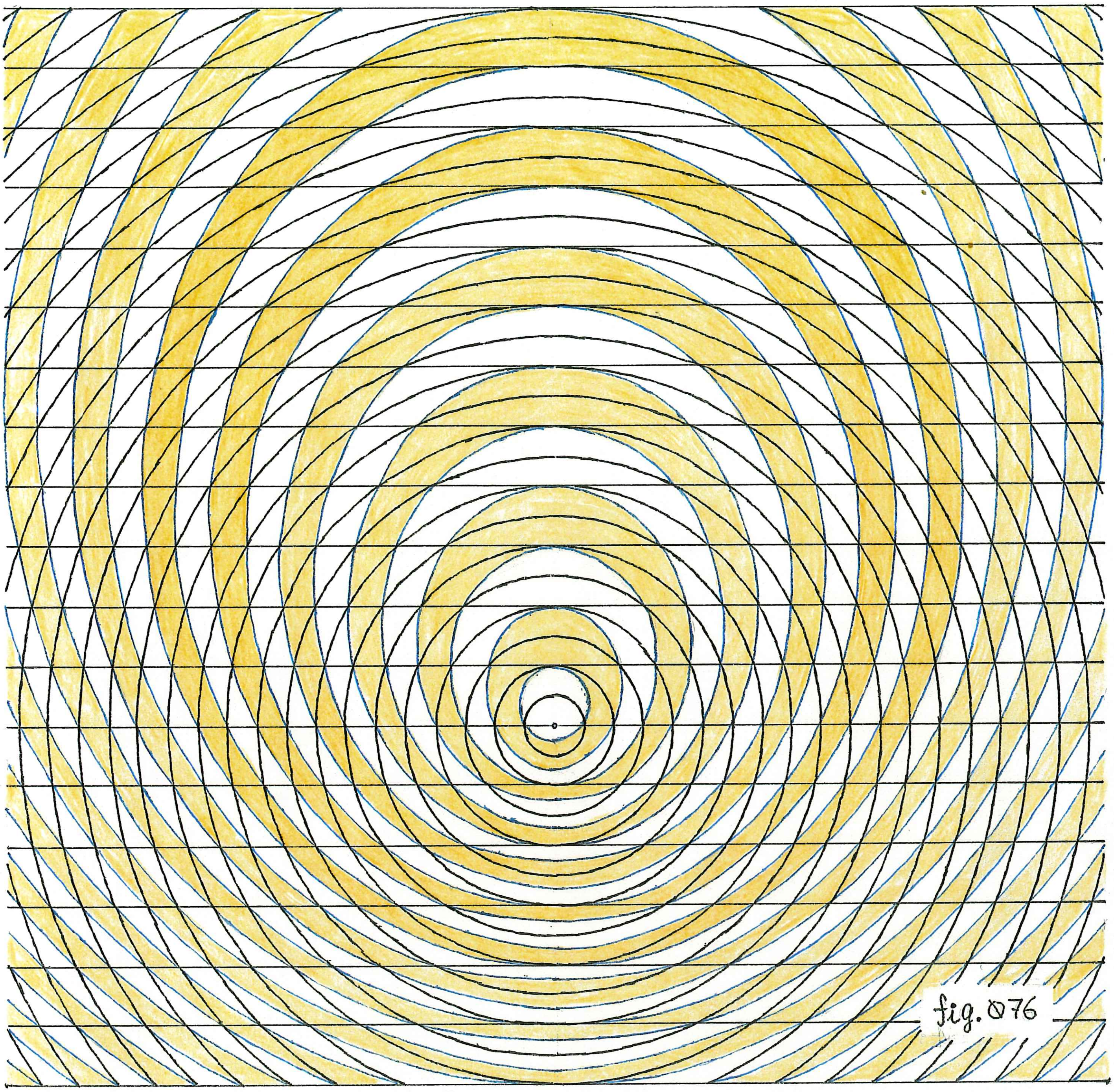


fig.075

これも2波源から成るさざなみ曲線群です。1波源しか見えませんね。この波源の源値は+10です。もう1つの波源は紙面の上方のはるか彼方に有ります。その源値は+5です。従って上方の単源子は紙面上では間隔が5mmの平行線群として表わされます。

fig.074と比べると、より源値の小さい平行線群の影響が強く、平行に近いさざなみ曲線群になっていますね。

 8月25日(火) さざなみ曲線群の呈示(続き)



これもまた2波源から成るさざなみ曲線群です。1波源しか見えません。この波源の源値は+5です。もう1つの波源は紙面の上方のはるか彼方に有ります。その源値は+10です。従って上方の単源子は線面上では間隔が10mmの平行線群として表わされます。

fig. 065の卵形よりも、より完全な、きれいな卵形に見えます。どう思いますか。

さざなみ曲線群の元となる波源たちの波値の絶対値は、それらを構成する同心円たちの間隔であることはP057で既に述べましたね。でもその符号の定義は呈示しないままで、幾つものさざなみ曲線群を作図してきました。ここで、単源子の波値の符号を下図のように定義します。

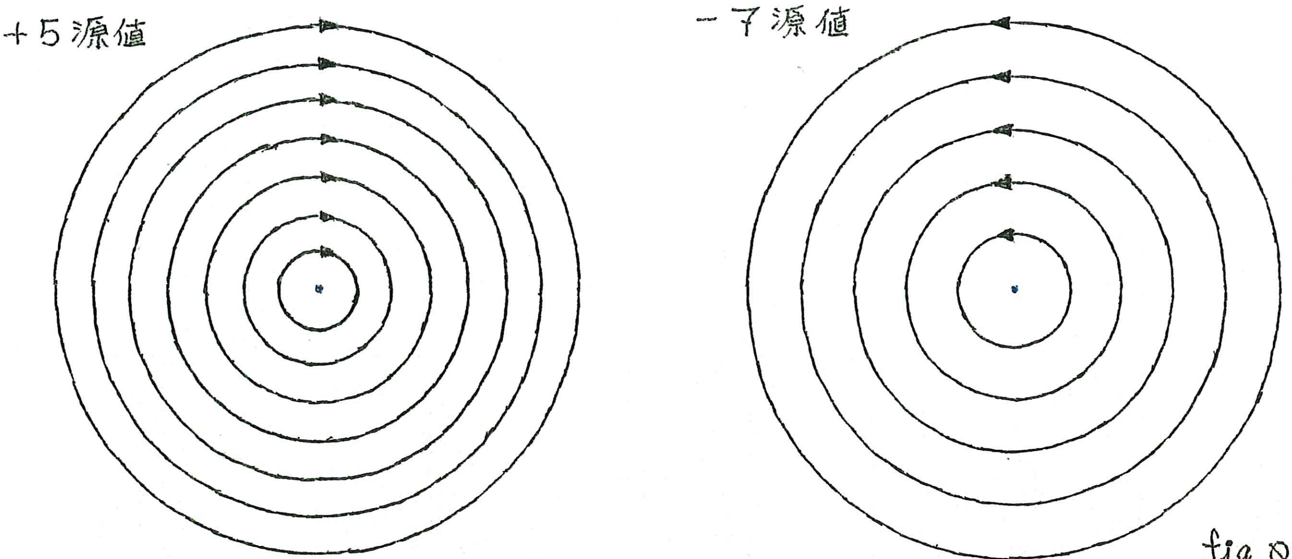


fig.077

単源子を構成する円たちが向きを持つとするのです。時計回りの向きを持つ円たちから成る単源子の源値の符号を正とし、反時計回りの向きを持つ円たちから成る単源子の源値の符号を負と約束することにします。

これにより、さざなみ曲線群の各曲線も有向曲線に成ります。下図に、引力的な、つまり同符号の源値を持つ2つの単源子から成るさざなみ曲線群がどのような向きを持つのかを、例として、描きましょう。

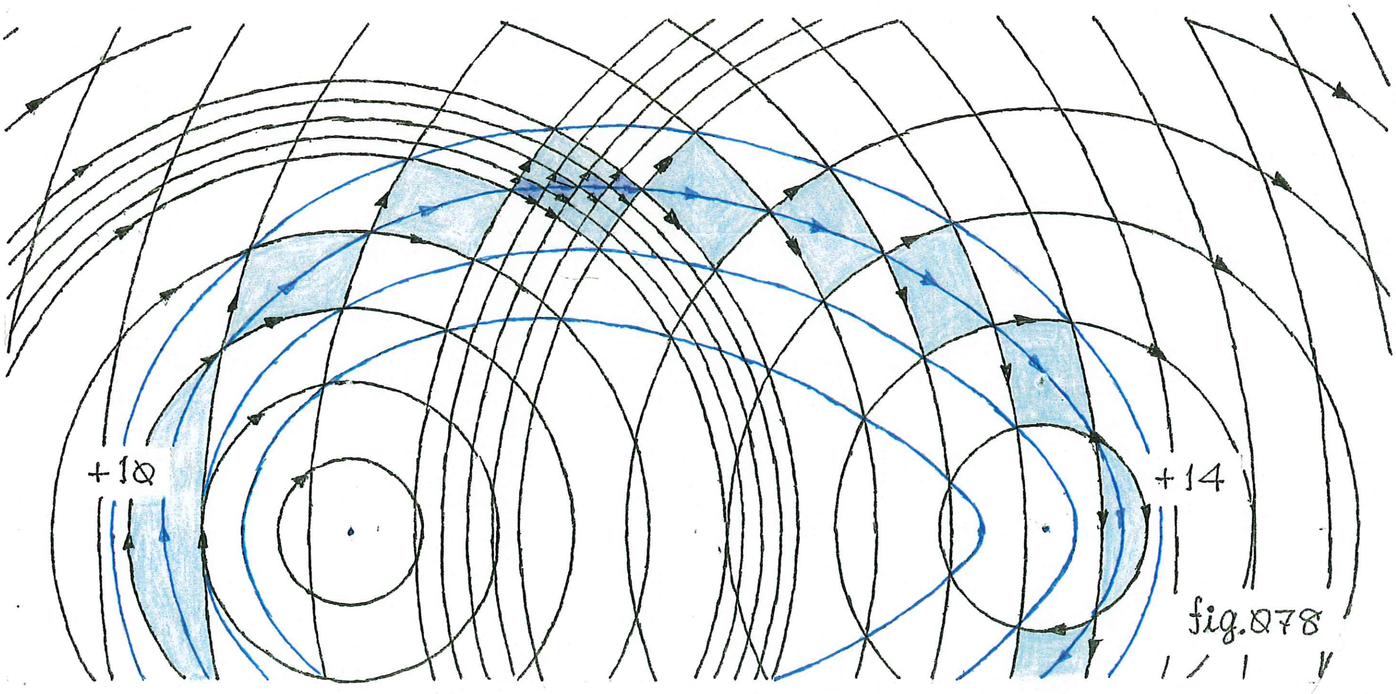


fig.078

【P075】 8月27日(木) さざなみ曲線群の呈示（続き）

斥力的な さざなみ曲線がどのような向きを持つのかも描きましょう。

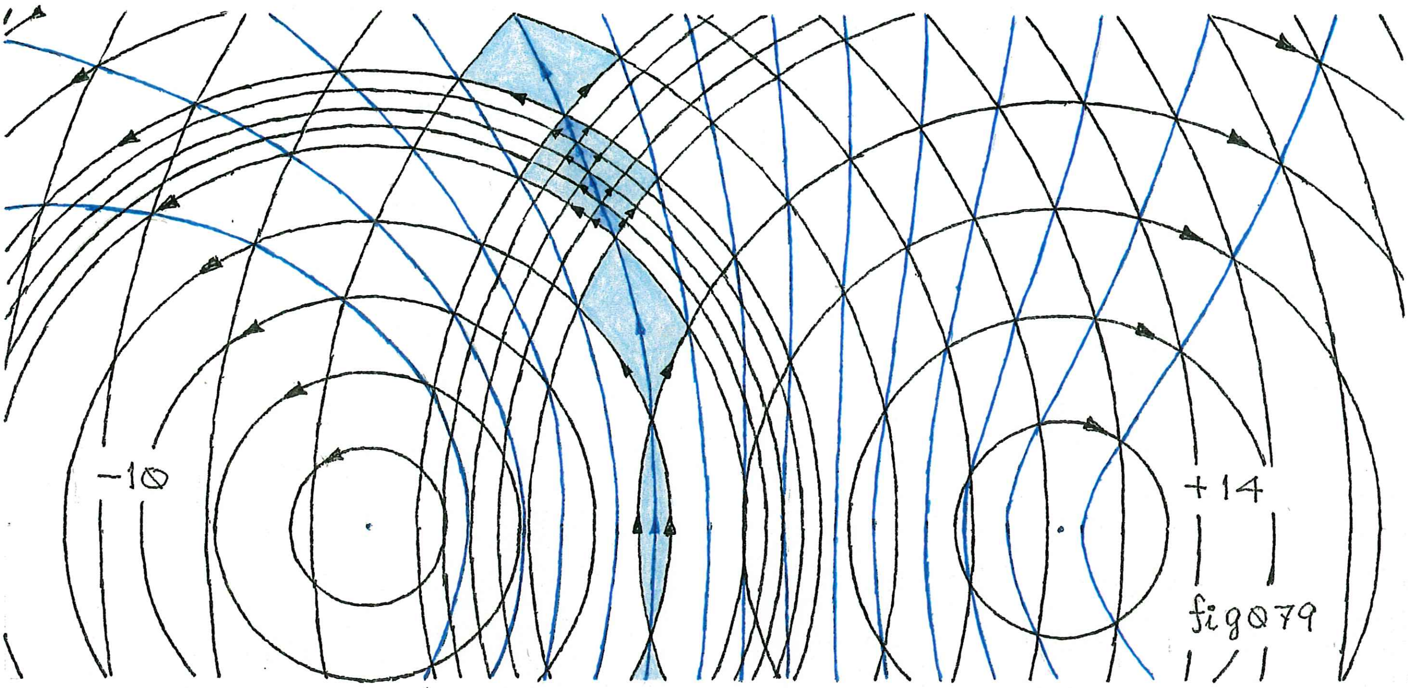


fig079

fig.078の右上のさざなみ4辺形の部分に注目し。もっと拡大し、さらに、2つの源値をもっと細分してみよう。

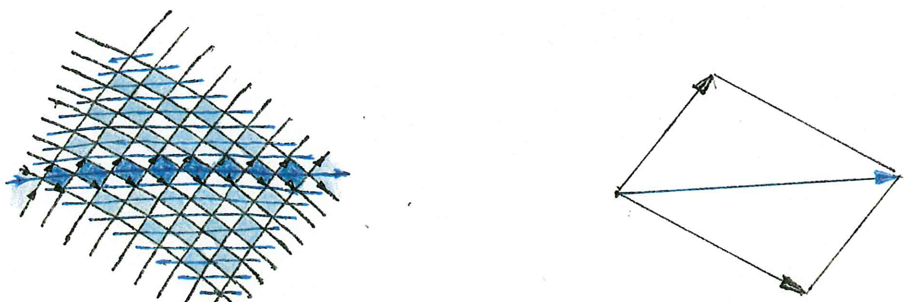


fig.080

2つの源値を、2等分，4等分，8等分，…と細分すると、4個，16個，64個，…とさざなみ4辺形が増加し、それらのさざなみ4辺形は、2分の1，4分の1，8分の1，…と次第に小さく成ります。それだけでは有りません。それらさざなみ4辺形の形も次第に平行4辺形に近づきます。つまり、さざなみ曲線の方向は、平行4辺形の2つの辺を有向辺、つまり2つのベクトルと見做せば、この2つのベクトルの和のベクトルの方向と一致します。さらにさざなみ曲線の本数も、源値の分割数に比例して増加します。限り無く分割したとしましょう。この場合、平面は、無限連続個のさざなみ曲線で埋め尽くされることに成ります。従って、平面上の1点を

かってに選べば、その点を通るさざなみ曲線が一意的に定まります。"さざなみ曲線群"という用語はもはや相応しくないですね。"さざなみ場"(Wavelet Field)と呼ぶことにしましょう。これはベクトル場であり、しかも重ね合わせの原理が成り立つと思われます。僕が今まで描いたさざなみ曲線群の作図方法は、さざなみ場から、有限個のさざなみ曲線を選び出す1つのアルゴリズムだと見做すことが出来ます。

源値の加法性について述べます。次式が成り立つと思われます。

源値が ΔV_i $(i=1,2,3,\cdots,n)$ の n 個の単源子から成るさざなみ曲線群は、すべての波源から十分に離れた所では、その源値が ΔV の単源子のように見える。ただし ΔV は、

$$\frac{1}{\Delta V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Delta V_i}$$

予想(1)

上式は予想式です。証明していません。上式には例外が有ります。fig.074, fig.075, fig.076 では上式は成り立ちません。それは波源が無限に離れているからです。また、右辺が0となる場合は、$\Delta V \to \infty$、つまり曲線間の間隔がすべての波源から遠ざかれば遠ざかるほど無限に大きくなることを意味します。
上式は予想式であり、作図作業の過程で得られた経験則です。もしかしたら間違っているかもしれません。上式と似た式が存在します。それは並列回路の電気抵抗の合成則です。

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \qquad (W1)$$

各 R_i は並列回路の各回路の電気抵抗です。R は全体を1つの抵抗器として見た場合の抵抗です。これを示すことは簡単です。次の図を参照して下さい。

【P077】さざなみ曲線群の呈示(続き)

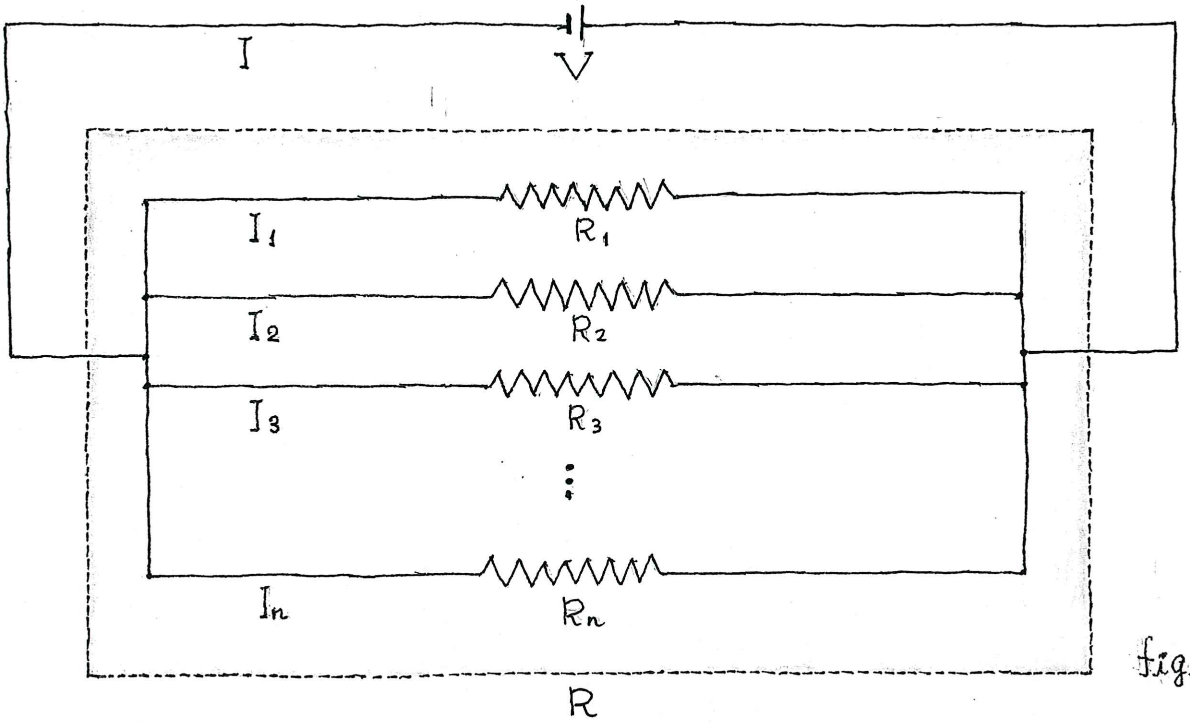


fig.081

上図で、I, I_i ($i=1,2,\cdots,n$) は電流です。Vは電圧(電位差)です。次式が成り立つのは明らかです。

$$I \cdot R = V, \qquad I_i \cdot R_i = V \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{W2.1}$$

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i \tag{W2.2}$$

(W2.1)より、$I = V/R$, $I_i = V/R_i$ ($i=1,2,\cdots,n$)。これらを(W2.2)に代入し、両辺をVで割れば(W1)が得られます。

(W1)の導出と同じ様な理屈で、予想(1)を導くことが出来るとするならば、V, Iに相当する量は何でしょうか? Vに相当するのはv、波の伝播速度です。これは一定でなければなりません。また、I, I_iに相当するのはν, ν_i、波の波源における振動子の振動数です。次式が成り立てば予想(1)が得られます。

$$\nu \cdot \Delta r = v, \qquad \nu_i \cdot \Delta r_i = v \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{W3.1}$$

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \tag{W3.2}$$

【P078】さざなみ曲線群の呈示（続き）

ν＝一定は理解できますが、$\nu=\sum\nu_i$は解りにくいですね。それ以前に、純粋に幾何学的な曲線の性質の説明に、速度や振動数のように、時間の概念が侵入するというのは不自然です。

そこでこう考えることにしましょう。$\nu=1$とし、無次元量だとするのです。このとき、ν, ν_iたちは長さの逆数の次元をもち、その意味は、すべての波源から離れた位置における、波源から無限遠方向に向って計った、単位長さあたりの曲線の本数ということになります。ν, ν_iはΔr, Δr_iと同じ符号を持つことに注意しましょう。ν, ν_iを上記の意味だとすると$\nu=\sum\nu_i$は理解できます。予想(1)は正しいと思われます。

予想(1)と似た式として次のような式が有ります。

$$\frac{1}{\sqrt{r}}=\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

予告(2)

この式の意味，証明については後述するつもりです。ただ、ここでは(2)のような等式が存在し、当文書に登場する予定であるということです。

さざなみ曲線群には、楕円，双曲線，放物線の全てが登場しました。これらの曲線については、ニュートン力学の"2体問題"や"円錐曲線"という主題で、もし余裕があれば、論じるつもりです。

荷力曲線群やさざなみ曲線群については、まだまだ、作図不足だと思っていますが、今は、当文書の主題（通奏低音）であるSimplexに関連した話題に戻るべきかと思います。

それにしても当文書で最初に現われた式が、予想(1)だったことは、我ながら以外に思っています。

● 小休止：色鉛筆の色見本

fig.082

Vermilion	朱，辰砂（しんしゃ）
Chrome	〖化〗Chromium(Cr)の旧称
Magenta	マゼンタ《深紅色のアニリン染料》
Carmine	洋紅色
Vandyke	オランダの肖像画家（1599～1641）
Ochre	黄土
Mandarin	蜜柑（みかん）の木
Peacock	雄孔雀（くじゃく）
Prussian	プロシャの，プロシャ人
Reddish	赤みがかった
Wistaria	〖植〗ふじ
Lilac	〖植〗リラ，むらさきはしどい