＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その５６）＞

--- ある不等式の定理の発見 ---

今回ある定理を発見したので報告したい。その定理は提示してきた極限公式とも関連しているが、それを $\pi^2/6$ 不等式-定理１と名付け、下方に青字で示した。まず先に過去に出した $\pi^2/6$ 極限公式をすべて表示し、次に発見した定理を示す。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から０に近づける意味である。

===

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \qquad \text{----<S3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<S3-2>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<S3-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S3-4>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S3-5>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S3-6>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<S3-7>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<S3-8>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−9>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−10>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<S3−11>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(2(1+e^{-a})^2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-3a})^2(1+e^{-4a})^2\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−12>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}5a}-1\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S3−１３>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left((1-\mathrm{th}2a)+2(1-\mathrm{th}3a)+3(1-\mathrm{th}4a)+4(1-\mathrm{th}5a)+\cdot\cdot\right)$$ --<S3−１４>

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上記の下から二つ目＜Ｓ３—１３＞は、前回分で証明した極限公式である。その＜Ｓ３ー１３＞に関連して、私は次の定理を発見した。

$\pi^2/6$ 不等式−定理 1

次の(1), (2)が成り立つ。

(1) 任意の正の実数 a について、次の不等式①と②が成り立つ。

$$a^2\left(\frac{1}{(e^{a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{2a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{3a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{4a}-1)^2}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6}\quad(a>0)$$ -----①

$$2a^2\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}5a}-1\right)+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6}\quad(a>0)$$ -----②

(2) ①と②は上式の形で最良である。すなわち、右辺が$\pi^2/6$ より僅かでも小さい場合、(1)は成り立たない。

この定理の証明を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$\pi^2/6$ 不等式−定理 1 の証明

まず(1)から示していく。a を正の実数として（a>0)、F(a)を次のように置く。

$$F(a)=\frac{a^2}{(e^a-1)^2}+\frac{a^2}{(e^{2a}-1)^2}+\frac{a^2}{(e^{3a}-1)^2}+\frac{a^2}{(e^{4a}-1)^2}+\cdot\cdot \qquad \text{-----[A]}$$

$$(a>0)$$

さて、ここでe^aの a=0 周りのテイラー展開は次のようになる。

$e^a=1+a+a^2/2!+a^3/3!+a^4/4!+\cdot\cdot$ ----[B]

よって、

$e^a-1=a+a^2/2!+a^3/3!+a^4/4!+\cdot\cdot$ ----[B]-2

[A]に対し[B]-2 を利用すると、次のようになる。

$$F(a)=\frac{a^2}{(e^a-1)^2}+\frac{a^2}{(e^{2a}-1)^2}+\frac{a^2}{(e^{3a}-1)^2}+\frac{a^2}{(e^{4a}-1)^2}+\cdot\cdot$$

$$<\frac{a^2}{(a+a^2/2!)^2}+\frac{a^2}{(2a+(2a)^2/2!)^2}+\frac{a^2}{(3a+(3a)^2/2!)^2}+\frac{a^2}{(4a+(4a)^2/2!)^2}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{a^2}{a^2(1+a/2!)^2}+\frac{a^2}{a^2(2+2^2\cdot a/2!)^2}+\frac{a^2}{a^2(3+3^2\cdot a/2!)^2}+\frac{a^2}{a^2(4+4^2\cdot a/2!)^2}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{1}{(1+a/2!)^2}+\frac{1}{(2+2^2\cdot a/2!)^2}+\frac{1}{(3+3^2\cdot a/2!)^2}+\frac{1}{(4+4^2\cdot a/2!)^2}+\cdot\cdot$$

$$<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\frac{\pi^2}{6}$$

よって、

$$\frac{a^2}{(e^a-1)^2}+\frac{a^2}{(e^{2a}-1)^2}+\frac{a^2}{(e^{3a}-1)^2}+\frac{a^2}{(e^{4a}-1)^2}+\cdot\cdot<\frac{\pi^2}{6}$$

左辺でa^2をくくり出して次となり、よってまず下記①が証明された。

$$a^2\left(\frac{1}{(e^a-1)^2}+\frac{1}{(e^{2a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{3a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{4a}-1)^2}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{-----①}$$

$$(a>0)$$

次に、前回分の＜Ｓ３－１３＞の証明で示した次の恒等式に着目する。

$$\frac{1}{(e^a-1)^2}+\frac{1}{(e^{2a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{3a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{4a}-1)^2}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{\mathrm{tha}}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}(3a/2)}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}(2a)}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}(5a/2)}-1\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--[2]-1}$$

$$(a>0)$$

①と[2]-1 の二つから容易に次がわかる。

$$\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{\mathrm{tha}}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}(3a/2)}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}(2a)}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}(5a/2)}-1\right)+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{----[C]}$$

$$(a>0)$$

同値変形で上式[C]で a＝2a とすると、本質的に a>0 はそのままにできて（厳密には a=2A として最後に A を a に置き換える)、目標の次の②に到達する。

$$2a^2\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th2a}}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th3a}}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th4a}}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th5a}}-1\right)+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad \text{-----②}$$

$$(a>0)$$

よって、②も証明できた。

したがって、これでまず(1)の証明が完了した。

次に(2)を示していく。

F(a)は[B]-2 から次のように変形できる。

$$F(a)=\frac{a^2}{(a+a^2/2!+a^3/3!+\cdot\cdot)^2}+\frac{a^2}{(2a+(2a)^2/2!+(2a)^3/3!+\cdot\cdot)^2}+\frac{a^2}{(3a+(3a)^2/2!+(3a)^3/3!+\cdot\cdot)^2}+\frac{a^2}{(4a+(4a)^2/2!+(4a)^3/3!+\cdot\cdot)^2}+\cdot\cdot$$

右辺を変形して次となる。

$$F(a)=\frac{1}{(1+a/2!+a^2/3!+\cdot\cdot)^2}+\frac{1}{(2+a\cdot 2^2/2!+a^2\cdot 2^3/3!+\cdot\cdot)^2}+\frac{1}{(3+a\cdot 3^2/2!+a^2\cdot 3^3/3!+\cdot\cdot)^2}+\frac{1}{(4+a\cdot 4^2/2!+a^2\cdot 4^3/3!+\cdot\cdot)^2}+\cdot\cdot \quad \text{----[D]}$$

$$(a>0)$$

さて、ここで、もし上方の①に関し、$\pi^2/6$ より僅かに小さい値でも不等式が成立したと仮定しよう($\varepsilon>0$)。

すなわち、

$$a^2\left(\frac{1}{(e^a-1)^2}+\frac{1}{(e^{2a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{3a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{4a}-1)^2}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6}-\varepsilon \qquad \text{----[E]}$$

$$(a>0)$$

しかし、この[E]は成り立たない。なぜなら[D]で a をどんどんと＋側から 0 に近づけていけば、[D]の形から[E]左辺（つまり F(a)）はどんどんと$\pi^2/6$ に近づいていき、ついには$\frac{\pi^2}{6}-\varepsilon$ よりも大きくなるときが必ず来るからである(しかし$\pi^2/6$ よりは小さい！ ①を見よ)。それは[E]と矛盾する。

よって、ε は 0 でしかありえず、①はその形が最良とわかる。

また[2]-1 の恒等式から[C]の形が即座に最良とわかり（①が最良であるから)、同値変形でその[C]を a=2a とした②も最良であることがわかる（厳密には a=2A として、最後に A を a に置き換える)。

よって、(2)が証明された。

以上で、この定理の証明は完了した。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして$\pi^2/6$ 不等式-定理 1 は証明された。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝

●この１年で極限公式があまりに多く出たこともあってそろそろ冗長なる気分も出始めてきて、すこし違ったものが出せないか？と思いはじめていた。これまでの数学研究で私が出してきた結果というのは、等式のものが多く、不等式の定理はごくわずかであることにちょっと不満があった。その不等式への欲求という点からここ１年の極限公式の導出過程を眺め直したとき今回の定理が発見できたという流れとなった。

●上方で示した証明自体は割合簡単である。多くの極限公式を出してきてその数値検証時に値の動きを観察していてこの定理に近いことは漠然とはわかっていたのに、私は１年間、定理の存在に気づかなかった。それは我ながら迂闊というか不思議な感じがある。おそらく極限公式のみに意識が向いてしまっていたので気づかなかったのであろう。

やはりいつも思うのは、意識的に（関心をもって！）ものを見ないと、人間はなにかを発見できないということである。今回は不等式への欲求という関心でもって極限公式の導出過程を眺めたので気づけた気がする。人間はなにかを見ていても、じつはなにも見ていない。

●定理を再掲。

$\pi^2/6$ 不等式–定理 1

次の(1), (2)が成り立つ。

(1) 任意の正の実数 a について、次の不等式①と②が成り立つ。

$$a^2\left(\frac{1}{(e^a-1)^2}+\frac{1}{(e^{2a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{3a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{4a}-1)^2}+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad (a>0) \quad \text{------①}$$

$$2a^2\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}5a}-1\right)+\cdot\cdot\right)<\frac{\pi^2}{6} \qquad (a>0) \quad \text{------②}$$

(2) ①と②は上式の形で最良である。すなわち、右辺が$\pi^2/6$ より僅かでも小さい場合、(1)は成り立たない。

この定理の正しさは、Wolfram Alpha を使った数値検証でも確認している。
すこし定理を味わいたい。①、②の形が最良ということが大事である。
両式の右辺が$\pi^2/6+1/7$ とか$\pi^2/6+1000$ であっても不等式が成り立つことは当然である。しかし、$\pi^2/6$ より僅かでも小さくなれば、不等式は成立しなくなる！というがポイントでそれが最良の意味である。
しかも①左辺はζ(2)＝$1+1/2^2+1/3^2+\cdot\cdot$の香りが漂っていて意味深い形をしている。香りが漂うのみならず、左辺は特殊値ζ(2)＝$\pi^2/6$ と密接に関係しているのだ！と積極的に主張しているかのようである。
①左辺の a^2 を左辺の各項に分配してから、a を+側から 0 に近づけていけば、ロピタルの定理より左辺が$\pi^2/6$ になる操作は極限公式の証明で頻繁に行ってきた。よって、この定理は極限公式の一歩手前に位置するものであるともいえる。
このように定理は極限公式と密接に関係していて、それは親子のような関係といえる。親が定理で、極限公式が子である。具体的には、今回の定理は次の＜Ｓ３—１３＞との関係しており、前回分の証明で繋がっていることは[$\pi^2/6$ 不等式–定理 1]の証明で示した通りである。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a}-1\right)+2\left(\frac{1}{\mathrm{th}3a}-1\right)+3\left(\frac{1}{\mathrm{th}4a}-1\right)+4\left(\frac{1}{\mathrm{th}5a}-1\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--＜S3－１３＞}$$

●極限公式と今回の定理の関係性をまた別の卑近な例“柿の木”で述べると、定理がその枝に当たり、また極限公式は柿ということになる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.11.30 杉岡幹生
sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)