

< [四重積-二重積]対称式周辺にて (その8) >

----- ある定理の発見 -----

前回からの続きで、さらに別の類似の定理を見出したので紹介したい。下方の青字の四つである。これらを、四重積・自乗・四和式における定理 3-1/定理 4-1、また四重積・四乗・四和式における定理 3-2/定理 4-2 と名付けた。

以降では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$ はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、shy は $\sinh(y)$ のことである。また、ch2x は $\cosh(2x)$ のことである。

=====

<四重積・自乗・四和式における定理 3-1>

任意の実数 x, y において

$$g(x, y) = (\text{ch}x \cdot \text{cos}x \cdot \text{ch}y \cdot \text{sin}y)^2 - (\text{sh}x \cdot \text{sin}x \cdot \text{sh}y \cdot \text{cos}y)^2 + (\text{ch}x \cdot \text{sin}x \cdot \text{ch}y \cdot \text{cos}y)^2 - (\text{sh}x \cdot \text{cos}x \cdot \text{sh}y \cdot \text{sin}y)^2$$

と置くと、次が成り立つ。

$$g(x, y) \geq 0$$

<四重積・四乗・四和式における定理 3-2>

任意の実数 x, y において

$$f(x, y) = (\text{ch}x \cdot \text{cos}x \cdot \text{ch}y \cdot \text{sin}y)^4 - (\text{sh}x \cdot \text{sin}x \cdot \text{sh}y \cdot \text{cos}y)^4 + (\text{ch}x \cdot \text{sin}x \cdot \text{ch}y \cdot \text{cos}y)^4 - (\text{sh}x \cdot \text{cos}x \cdot \text{sh}y \cdot \text{sin}y)^4$$

と置くと、次が成り立つ。

$$f(x, y) \geq 0$$

<四重積・自乗・四和式における定理 4-1>

任意の実数 x, y において

$$g(x, y) = (\text{sh}x \cdot \text{sin}x \cdot \text{ch}y \cdot \text{sin}y)^2 - (\text{ch}x \cdot \text{cos}x \cdot \text{sh}y \cdot \text{cos}y)^2 + (\text{sh}x \cdot \text{cos}x \cdot \text{ch}y \cdot \text{cos}y)^2 - (\text{ch}x \cdot \text{sin}x \cdot \text{sh}y \cdot \text{sin}y)^2$$

と置くと、次が成り立つ。

- ・ $|x| \geq |y|$ のとき、 $g(x, y) \geq 0$
- ・ $|x| < |y|$ のとき、 $g(x, y) < 0$

ここで $| \cdot |$ は絶対値を表す。

<四重積・四乗・四和式における定理 4-2>

任意の実数 x, y において

$$f(x, y) = (\text{sh}x \cdot \text{sin}x \cdot \text{ch}y \cdot \text{sin}y)^4 - (\text{ch}x \cdot \text{cos}x \cdot \text{sh}y \cdot \text{cos}y)^4 + (\text{sh}x \cdot \text{cos}x \cdot \text{ch}y \cdot \text{cos}y)^4 - (\text{ch}x \cdot \text{sin}x \cdot \text{sh}y \cdot \text{sin}y)^4$$

と置くと、次が成り立つ。

- ・ $|x| \geq |y|$ のとき、 $f(x, y) \geq 0$
- ・ $|x| < |y|$ のとき、 $f(x, y) < 0$

ここで $| \cdot |$ は絶対値を表す。

=====

これらの定理を見つけた。以降では単に、定理 3-1、定理 3-2、定理 4-1、定理 4-2 などと略していく。

定理 3-1 と定理 3-2 がとくに簡明で美しい。

これらの定理には、[前回](#)と同様、次の特徴がある。

[定理の特徴]

定理 3-1 と定理 3-2 で、また定理 4-1 と定理 4-2 で、結果がまったく同じである。これを「関係性の保存」とでも名付けたいところだが、べきの 2 が 4 に変わっても結果は不変となっている。
以上。

この特徴は、もっと高次のべきでも成り立つはずで、よって定理はさらに一般化できるはずだが、現時点では予想でしかない。

これらの定理は、[前回](#)と同様の方法で得られるので、証明は略す。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

●定理 3-1、定理 3-2 を並べよう。

<四重積・自乗・四和式における定理 3-1>

任意の実数 x, y において

$$g(x, y) = (\operatorname{ch}x \cdot \operatorname{cos}x \cdot \operatorname{ch}y \cdot \operatorname{sin}y)^2 - (\operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sin}x \cdot \operatorname{sh}y \cdot \operatorname{cos}y)^2 + (\operatorname{ch}x \cdot \operatorname{sin}x \cdot \operatorname{ch}y \cdot \operatorname{cos}y)^2 - (\operatorname{sh}x \cdot \operatorname{cos}x \cdot \operatorname{sh}y \cdot \operatorname{sin}y)^2$$

と置くと、次が成り立つ。

$$g(x, y) \geq 0$$

<四重積・四乗・四和式における定理 3-2>

任意の実数 x, y において

$$f(x, y) = (\operatorname{ch}x \cdot \operatorname{cos}x \cdot \operatorname{ch}y \cdot \operatorname{sin}y)^4 - (\operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sin}x \cdot \operatorname{sh}y \cdot \operatorname{cos}y)^4 + (\operatorname{ch}x \cdot \operatorname{sin}x \cdot \operatorname{ch}y \cdot \operatorname{cos}y)^4 - (\operatorname{sh}x \cdot \operatorname{cos}x \cdot \operatorname{sh}y \cdot \operatorname{sin}y)^4$$

と置くと、次が成り立つ。

$$f(x, y) \geq 0$$

シンプルできれいである。もしなにかの役にたつとすれば、こっちの定理のような気がする。

定理 4-1、定理 4-2 はちょっと複雑な感じがあって役に立たない気がする。

- 話は変わって、昔、数学セミナーという雑誌で、京都賞を受賞したグロモフという数学者が、ある数学者から受けたインタビューがあるので、紹介したい（「数学セミナー」2003年4月号）。

「最後に、数学者を目指す学生や若者にメッセージをお願いします。」として次のように答えている。

グロモフ

自分以外の誰も信頼しない方がいい。これはそのまま誰にでも適用できるものではありませんし、そうでない逆の方法で成功した人もいます。私の友人に5年間本を読んで勉強したが大成しなかった人がいます。彼は本の内容を疑わなかった。それがこのような結果を生んだのだと思っています。

私はいつも疑ってかかるのですが。

何がメッセージになるだろうか・・・？「自分以外の人と違うことをしなさい」ですね。

以上。

このメッセージだが、私は非常に印象に残っている。これは、数学だけではなくても、どんな学問でも普遍的にいえることである。私も教科書などは信用できないなあと感じるので、グロモフのいうことはよくわかる。

「疑う」というのが、科学の基本である。教科書を疑う、権威者（有名人）のいうことを疑う。疑う視点から既存のものを見ていくと、あちこちに見落としがあることに気づく。

=====

2025. 7. 19 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）
- ・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）
- ・「数学セミナー」2003年4月号）