＜［四重積−二重積］対称式周辺にて（その７）　＞ rev1.01

----- ある定理の発見 -----

今回は、ある定理を見出したので紹介したい。下方の青字の四つの定理である。

これらを式の形からそれぞれ、四重積・自乗・四和式における定理 1-1/定理 2-1、また四重積・四乗・四和式における定理 1-2/定理 2-2 と名付けた。

以降では、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、shy は sinh(y)のことである。また、ch2x は cosh(2x)のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜四重積・自乗・四和式における定理 1-1＞

任意の実数 x, y において

$$g(x,y)=(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2+(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2$$

と置くと、次が成り立つ。

- $|x|\geqq|y|$ のとき、$g(x,y)\geqq 0$
- $|x|<|y|$ のとき、$g(x,y)<0$

ここで｜　｜は絶対値を表す。

＜四重積・四乗・四和式における定理 1-2＞

任意の実数 x, y において

$$f(x,y)=(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^4-(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^4+(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^4-(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^4$$

と置くと、次が成り立つ。

- $|x|\geqq|y|$ のとき、$f(x,y)\geqq 0$
- $|x|<|y|$ のとき、$f(x,y)<0$

ここで｜　｜は絶対値を表す。

＜四重積・自乗・四和式における定理 2-1＞

任意の実数 x, y において

$$g(x,y)=(\mathrm{ch}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \sin y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \cos y)^2+(\mathrm{ch}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \cos y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \sin y)^2$$

と置くと、次が成り立つ。

$g(x,y)\geqq 0$

＜四重積・四乗・四和式における定理 2-2＞

任意の実数 x, y において

$$f(x,y)=(\mathrm{ch}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \sin y)^4-(\mathrm{sh}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \cos y)^4+(\mathrm{ch}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \cos y)^4-(\mathrm{sh}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \sin y)^4$$

と置くと、次が成り立つ。

$f(x,y)\geqq 0$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これらの定理を見つけた。以降では単に、定理 1-1、定理 1-2、定理 2-1、定理 2-2 などと略していく。

定理 2-1 と定理 2-2 がとくに簡明で美しい。ただし、これらが現時点で何に役立つかというと、それはまだ思いつかない。

これらの定理には、次の特徴がある。

[定理の特徴]
定理 1-1 と定理 1-2 で、また定理 2-1 と定理 2-2 で、結果がまったく同じである。これを「関係性の保存」とでも名付けたいところだが、べきの 2 が 4 に変わっても結果は不変となっている。
以上。

この特徴は、もっと高次のべきでも成り立つはずで、よって定理はさらに一般化できるはずだが、現時点では予想でしかない。

これらの定理は、ちょっと前に報告したゼータの香りの・・(その３７３)の公式１と公式２を眺めていて気付いた。今回の定理 1-1 と定理 2-1 は、そこの式 1-(1) と式 2-(2) を使えば即座に得られる。(式 1-(1) と式 2-(2) を使わずとも直接計算から得ることもできる)

定理 1-2 と定理 2-2 に関しては長い計算を行って得られた。ここでは、この定理 2-2 のみその証明を簡潔に示す。詳細な計算は飛ばした。

＜四重積・四乗・四和式における定理 2-2＞

任意の実数 x, y において

$$f(x,y)=(\mathrm{ch}x\cdot\sin x\cdot\mathrm{ch}y\cdot\sin y)^4-(\mathrm{sh}x\cdot\cos x\cdot\mathrm{sh}y\cdot\cos y)^4+(\mathrm{ch}x\cdot\cos x\cdot\mathrm{ch}y\cdot\cos y)^4-(\mathrm{sh}x\cdot\sin x\cdot\mathrm{sh}y\cdot\sin y)^4$$

と置くと、次が成り立つ。

$$f(x,y)\geqq 0$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[定理 2-2 の証明]

f(x, y) を

$$f(x,y)=(\mathrm{ch}x\cdot\sin x\cdot\mathrm{ch}y\cdot\sin y)^4-(\mathrm{sh}x\cdot\cos x\cdot\mathrm{sh}y\cdot\cos y)^4+(\mathrm{ch}x\cdot\cos x\cdot\mathrm{ch}y\cdot\cos y)^4-(\mathrm{sh}x\cdot\sin x\cdot\mathrm{sh}y\cdot\sin y)^4$$

とおく。

この右辺を三角関数と双曲線関数の次の２倍角の公式を使って、ひたすら変形していく。

$\mathrm{ch}2A=2\mathrm{ch}^2A-1=1+2\mathrm{sh}^2A$、　$\cos 2A=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A$

ひたすら変形していった結果、f(x, y) は次となる。

$$f(x,y)=(\mathrm{ch}2x+\mathrm{ch}2y)(1+\mathrm{ch}2x\cdot\mathrm{ch}2y)\{(1+\cos 2x\cdot\cos 2y)^2+(\cos 2x+\cos 2y)^2\}/32$$

ここで、$\mathrm{ch}X\geqq 1$、$-1\leqq\cos X\leqq 1$ の性質があるから、右辺の形から定理 2-2 は成り立っている。

なお、$f(x,y)=0$ となるのは、$x=0,\ y=\pi/2+n\pi$ または $y=0,\ x=\pi/2+n\pi$ (n：整数) の場合である。

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

定理 2-2 はこのようにして得られた。定理 1-2 も全く同様に証明できる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●定理 2-1、定理 2-2 を並べよう。

＜四重積・自乗・四和式における定理 2-1＞

任意の実数 x, y において

$$g(x,y)=(\mathrm{ch}x\cdot\sin x\cdot\mathrm{ch}y\cdot\sin y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot\cos x\cdot\mathrm{sh}y\cdot\cos y)^2+(\mathrm{ch}x\cdot\cos x\cdot\mathrm{ch}y\cdot\cos y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot\sin x\cdot\mathrm{sh}y\cdot\sin y)^2$$

と置くと、次が成り立つ。

$$g(x,y)\geqq 0$$

＜四重積・四乗・四和式における定理 2-2＞

任意の実数 x, y において

$$f(x,y)=(\mathrm{ch}x\cdot\sin x\cdot\mathrm{ch}y\cdot\sin y)^4-(\mathrm{sh}x\cdot\cos x\cdot\mathrm{sh}y\cdot\cos y)^4+(\mathrm{ch}x\cdot\cos x\cdot\mathrm{ch}y\cdot\cos y)^4-(\mathrm{sh}x\cdot\sin x\cdot\mathrm{sh}y\cdot\sin y)^4$$

と置くと、次が成り立つ。

$$f(x,y)\geqq 0$$

もしなにかの役にたつとすれば、こっちの定理だろう。結果が美しい。定理 1-1、定理 1-2 はちょっと複雑な感じがあって役に立たない気がする。

●上方で「この特徴は、もっと高次のべきでも成り立つはずで、よって定理はさらに一般化できるはずだが、・・」と述べた。

２と４のべき乗の計算の感触から、少なくとも 2^n のべきでは定理は成り立つような気がする。予想。

●数学では、役に立つ定理・公式、役に立たない定理・公式といろいろとある。公式集などでよく使う定理や公式というのは、ごく一部であって、大部分のものは（私にとっては）ほぼ使わない式として羅列されている。

使うものは本当によく使う。三角関数や双曲線関数の加法定理や、あるいはロピタルの定理など日常茶飯に使う。結局、使いやすい単純なものしか使っていない。

私は、あるときから、

単純な道具は役に立つ。複雑な道具は役に立たない。

と思うようになった。それはいまではもう確信に近い。

そして、そのことは数学のみならず、日常や仕事の上においてもそのまま当てはまっている。

●数学者の広中平祐氏は「学問の発見」（広中平祐著、佼成出版社）の中で、単純明快の重要性を強調している。私は若いころこの書から大きな影響を受けたので、いまだに氏のその言葉の影響をうけつづけているような気がする。

　少し引用しよう。
p.135～p.137　“・・・・”は大きく略したところ。
****
・・・・
　ガリレイは、「真空状態のものではどんな物体でも、その形や性質、大きさ、重さに関係なく、落ちる速度に差がない」という結論を導くためにいろいろな実験を試みた。水銀の中にいろいろな物体を落としてみる。そうすると落ちないものが多い。そこで今度は水の中に落としてみる。そうすると大抵の物体はどんどん落下する。金属であればみんな落ちてしまう。しかし、やはり重いものは早く落ちる。それならば空気中でやってみたらどうなるか。高い所からいろいろな物体を落としてみる。やはり空気中でも重いものは早く落ちるが、速度の差はうんと小さくなる。
　そこで今度は、非常に極端な状況を想定して、真空状態の中で物体を落としてみると考える。そうすると、どんな物体でも落ちるスピードにまったく差がないはずだという推論を得た。
　まさに単純で明快な原理である。こうした考え方は、ニュートンが「万有引力の法則」を思いつく論理的な経過にも非常によく似ている。
　私も一数学者として常に自分にいい聞かせているのは、このようなことである。「いい数学」とは何か。それは実はまだ私にもわかっていないが、その一つの要素は、単純にして明快な理論をもつ数学と私には思えるのだ。「美しい」と感じられる数学は、やはり単純明快に創造されているのである。難しいことだが、少なくとも私は数学に対して、そのような志を保ち続けている。
　私がこういう志をもつに至ったのは、米国でともかくも一数学者として身をたてなければならなかったことと、大いに関係している。米国の数学界は、とかく複雑難解を尊ぶ風のある日本のそれとは逆に、単純明快であることを重視する。どちらがいいかはともかくとして、そのような傾向が米国の数学の世界で通用している以上、いやでも私は理論を単純化し明快なものにする努力を惜しんではならなかったのである。
・・・・
しかし、数学の上では米国のこの単純明快を尊ぶ気風の中で学べたことを、私はよかったと思っている。単純明快に自分の考えを相手に伝えるには、自分の考えに責任をもたなければならない。数学でもそうだ。・・
そして、理論そのものもすっきりした、単純明快なものでなければならないのだ。このことが、例えば特異点解消の問題を解く上でも、非常に役立ったのである。
・・・・
****

　ガリレイの実験に関連づけたこの文章に感動し、いまだにここは私の記憶に焼き付いている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.7.12 杉岡幹生

＜参考文献＞
・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）
・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）
・「学問の発見」（広中平祐著、佼成出版社）

改定 rev1.01　証明中の小ミス他、書き損じを修正した。　2025.7.19