

< [四重積-二重積]対称式周辺にて (その4) >

----- [四重積自乗四和]2nd 公式 (2倍角の公式) の発見 -----

別種の2倍角の公式を四つ見出したので、下方に青色式で示す。それらを先の2倍角公式つまり[四重積自乗四和]公式と区別する意味で、[四重積自乗四和]2nd 公式と名付けた。

すなわち今回は、同2nd 公式 I の式 I-1 と式 I-2 の二つと、さらに同2nd 公式 II の式 II-1 と式 II-2 の二つの計四式を得た。前者は[四重積-二重積]対称式 I から得られ、後者は[四重積-二重積]対称式 II から得られる。

以降では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$ はそれぞれ sh , ch と略記した。例えば、 shy は $\sinh(y)$ のことであり、 $ch2x$ は $\cosh(2x)$ のことである。また例えば、 $\cos 2x$ は $\cos(2x)$ の意味である。

=====

[四重積-二重積]対称式 I

対称式 I (1)

$$\sin x \cdot shx \cdot \cos y \cdot chy - \cos x \cdot chx \cdot \sin y \cdot shy = \{\sin(x+y) \cdot sh(x-y) + sh(x+y) \cdot \sin(x-y)\} / 2$$

対称式 I (2)

$$\cos x \cdot shx \cdot \sin y \cdot chy - \sin x \cdot chx \cdot \cos y \cdot shy = \{\sin(x+y) \cdot sh(x-y) - sh(x+y) \cdot \sin(x-y)\} / 2$$

対称式 I (3)

$$\sin x \cdot chx \cdot \cos y \cdot shy + \cos x \cdot shx \cdot \sin y \cdot chy = \{\sin(x+y) \cdot sh(x+y) - sh(x-y) \cdot \sin(x-y)\} / 2$$

対称式 I (4)

$$\sin x \cdot shx \cdot \cos y \cdot chy + \cos x \cdot chx \cdot \sin y \cdot shy = \{\sin(x+y) \cdot sh(x+y) + sh(x-y) \cdot \sin(x-y)\} / 2$$

ここで、 x, y は任意の実数である。

=====

=====

[四重積自乗四和]2nd 公式 I

式 I-1

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot shx \cdot \cos y \cdot chy)^2 + (\cos x \cdot chx \cdot \sin y \cdot shy)^2 - (\cos x \cdot shx \cdot \sin y \cdot chy)^2 - (\sin x \cdot chx \cdot \cos y \cdot shy)^2 \\ &= (\cos^2 y - \cos^2 x) (ch^2 x - ch^2 y) / 4 \end{aligned}$$

式 I-2

$$\begin{aligned} & (\sin x \cdot shx \cdot chy \cdot \cos y)^2 + (\cos x \cdot chx \cdot shy \cdot \sin y)^2 + (\cos x \cdot shx \cdot shy \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot chx \cdot chy \cdot \sin y)^2 \\ &= (ch^2 y - \cos^2 x) (ch^2 x - \cos^2 y) / 4 \end{aligned}$$

ここで、 x, y は任意の実数である。

=====

=====

[四重積-二重積]対称式Ⅱ

対称式Ⅱ (1)

$$\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y + \sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y = \{\cos(x-y) \cdot \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y) \cdot \cos(x+y)\} / 2$$

対称式Ⅱ (2)

$$\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y + \sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y = \{\cos(x-y) \cdot \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y) \cdot \cos(x+y)\} / 2$$

対称式Ⅱ (3)

$$\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y - \sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y = \{\cos(x+y) \cdot \operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y) \cdot \cos(x-y)\} / 2$$

対称式Ⅱ (4)

$$\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y - \sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y = \{\cos(x+y) \cdot \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y) \cdot \cos(x-y)\} / 2$$

ここで、 x, y は任意の実数である。

=====

=====

[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅱ

式Ⅱ-1

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 \\ &= (\cos^2 x + \cos^2 y) (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}^2 y) / 4 \end{aligned}$$

式Ⅱ-2

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 \\ &= (\cos^2 x + \operatorname{ch}^2 y) (\operatorname{ch}^2 x + \cos^2 y) / 4 \end{aligned}$$

ここで、 x, y は任意の実数である。

=====

これら青色式が得られた。Wolfram Alpha を使った数値検証でも合っていることを確認している。

まず式Ⅱ-1 の導出方法を以下に示す。

[四重積-二重積]対称式Ⅱの対称式Ⅱ (3) と対称式Ⅱ (4) から導いていく。

対称式Ⅱ (3) を辺々自乗したものから対称式Ⅱ (4) を辺々自乗したものを引く、すなわち、(対称式Ⅱ (3))² - (対称式Ⅱ (4))² を計算すると次となる。

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 \\ &= \{4 \cos(x+y) \cdot \cos(x-y) \cdot \operatorname{ch}(x+y) \cdot \operatorname{ch}(x-y)\} / 4 \\ &= (\cos^2 x + \cos^2 y) (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}^2 y) / 4 \end{aligned}$$

これは式Ⅱ-1 そのものである。途中、三角関数と双曲線関数の公式集にもある次の公式を用いた。

$$\cos A \cdot \cos B = \{\cos(A-B) + \cos(A+B)\} / 2$$

$$\cosh A \cdot \cosh B = \{\cosh(A+B) + \cosh(A-B)\} / 2$$

上で導出した式を途中を省いて書くと、次となる。

式Ⅱ-1

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 \\ &= (\cos^2 x + \cos^2 y) (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}^2 y) / 4 \end{aligned}$$

このようにして式Ⅱ-1 が得られた。

次に上記式Ⅱ-1 に対し、 x はそのまま、 y を iy (i : 虚数単位) で置き換えると次の式Ⅱ-2 を得る。

式Ⅱ-2

$$\begin{aligned} & (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 \\ &= (\cos^2 x + \operatorname{ch}^2 y) (\operatorname{ch}^2 x + \cos^2 y) / 4 \end{aligned}$$

上記の置き換えに際し、公式集にある、三角関数と双曲線関数での虚数乗法ともいえる次の関係式を用いた。

$$\sin(ix) = i \cdot \sinh(x) \quad \text{---①}$$

$$\sinh(ix) = i \cdot \sin(x) \quad \text{---②}$$

$$\cos(ix) = \cosh(x) \quad \text{---③}$$

$$\cosh(ix) = \cos(x) \quad \text{---④}$$

このようにして[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅱにおける式Ⅱ-1 と式Ⅱ-2 が得られた。

また[四重積自乗四和]2nd 公式Ⅰの式Ⅰ-1 と式Ⅰ-2 も、同様にして[四重積-二重積]対称式Ⅰから得られる。

今回の式はこのようにして得られた。

上記で示したように[四重積-二重積]対称式と①～④の関係式を用いる方法がもっとも簡単な方法である。

ただし今回式の左辺をひたすら直接的に計算(変形)していても右辺に到達できる。意欲のある読者は挑戦してください。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

●式Ⅱ-1 と式Ⅱ-2 は、[四重積-二重積]対称式Ⅱの対称式Ⅱ(3)と対称式Ⅱ(4)から導いたが、対称式Ⅱ(1)と対称式Ⅱ(2)からも同様に導くことができる。それらの右辺を眺めてもらえば「ああそうだな」と納得されるにちがいない。そしてそれは式Ⅰ-1 と式Ⅰ-2 においてもまったく同じである。

●ここ3回で、[四重積-二重積]対称式から（2変数の）2倍角の公式を数多く導いた。[四重積-二重積]対称式は3年前に発見しゼータの香り・・・（その251）他で報告したものである。そのときはその美しい式を発見したことに満足しそれ以上は考察を進めなかったし、そこからさらになにか出るとは思っていなかった。ところが3年後、このような2倍角公式という本質的なものが出た。そのことから[四重積-二重積]対称式というのはゆたかなものが湧き出る泉のようなものだというふうに思えてくる。

●四式を再び眺めよう。

[四重積自乗四和]2nd 公式 I

式 I-1

$$(\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 \\ = (\cos^2 y - \cos^2 x) (\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y) / 4$$

式 I-2

$$(\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 \\ = (\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x) (\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y) / 4$$

[四重積自乗四和]2nd 公式 II

式 II-1

$$(\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{ch} y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y)^2 - (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y)^2 \\ = (\cos^2 x + \cos^2 y) (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}^2 y) / 4$$

式 II-2

$$(\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \cos y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \sin y)^2 + (\cos x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \cdot \sin y)^2 + (\sin x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y \cdot \cos y)^2 \\ = (\cos^2 x + \operatorname{ch}^2 y) (\operatorname{ch}^2 x + \cos^2 y) / 4$$

いずれの式も美しい。対称的できれいである。しかも（2変数の）2倍角の公式になっていることに注目したい。

前回と前々回での2倍角公式もよいが、こっちの2倍角もすばらしい。ながめていると様々なイメージーションがわき起こってくる。思いつくまま書くと・・・。

- ・ 因数分解というのは多項式でのことをいうのだろうが、上式も一種の因数分解に違いない。
- ・ 式 I-1 と式 II-1 の右辺は、それぞれの因数が三角関数と双曲線関数になっていて分離している。
- ・ どうして右辺がこんなに簡明になるかというと、左辺式の計算（変形）途上で多くの式が相殺し合うからである。三角関数と双曲線関数の融合域は極端に対称性が高いためにそうなる。
- ・ 式 I-2 と式 II-2 は、左辺の全部の項の符号がプラスであってそれがまた美しい。

●上で「極端に対称性が高い」と述べた。これはいつもよく感じることで、三角関数のみ、双曲線関数のみの場合に比べて、三角関数と双曲線関数の融合域の対称性は異常に高い。

数学では

対称性の高い領域＝豊かな領域

といえる。

対称性の高い領域では美しいものしか出てこない。そこから切り出される鉱石は美と調和に満ちたものばかり！となる。

これまで私は、数学の研究をさまざまなことにたとえてきた。恐竜化石の探索にもたとえたりしてきたが、まだ人が足を踏みいれていない地帯で、且つそこが豊かな領域であれば（テーマが重要！）、歩くたびに地表に落ちている化石をひろうことができる。そこではだれでも化石が発見できる。ひろびろとしていて自由であり、簡易で安価な道具で（基本的な数学で）大化石をほり出せる。一方、有名発掘現場は混みあっている。天才秀才だらけである。地表にはもうなにも落ちていない。高価な強力ドリルで（抽象化された方法で）深くまでほらないとなにも出てこない。それでもよいものはすくない。周囲の人のやることが気になり、人とぶちあたり自由でない・・・窮屈である。

[こちら](#)で紹介した名エッセイの中で吉田正章氏が次のようにいうのは当然といえば当然のことである。

第二に、人と同じことをやっては *cpu* 秀才にかなわないのだから、人と違ったことをやる。はやっている数学の後追いはいししない。

=====

2025. 6. 13 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）
- ・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）