＜［四重積−二重積］対称式周辺にて（その２） ＞ rev1.01

----- ［四重積自乗四和］公式（２倍角の公式）の発見 -----

前回、３年前に見つけていた[四重積−二重積]対称式Ｉを使って[四重積自乗四和]公式を見出し報告した。今回は[四重積−二重積]対称式Ⅱを使って[四重積自乗四和]公式２を三つ新たに見出したので報告する。つまり前回の類似を～対称式Ⅱに対して行った。そして得られた三公式は２倍角の公式となっていることに気づき、それがダイレクトにわかる形で示した。発見した三公式を下方に青色式で示した。

さらに同時に前回の公式も２倍角の公式になっていたことに改めて気づき、それは後半のエッセイで示した。

まとめると、次のようになる。

・今回見出した[四重積自乗四和]公式２の三式は２倍角の公式となっている。

・前回見つけた[四重積自乗四和]公式１の三式も２倍角の公式となっていた。

注意：前回分は[四重積自乗四和]公式としていたが、[四重積自乗四和]公式１とする。

以降では、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、shy は sinh(y)のことであり、ch2x は cosh(2x)のことである。また例えば、cos2x は cos(2x)の意味である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[四重積−二重積]対称式Ⅱ

対称式Ⅱ(1)

$$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y + \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y = \{\cos(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2$$

対称式Ⅱ(2)

$$\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y + \sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y = \{\cos(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2$$

対称式Ⅱ(3)

$$\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y = \{\cos(x+y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot \cos(x-y)\}/2$$

対称式Ⅱ(4)

$$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y - \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y = \{\cos(x+y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot \cos(x-y)\}/2$$

ここで、x, y は任意の実数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[四重積自乗四和]公式２

式 2-(1)

$$(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2 - (\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2 + (\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2 - (\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2$$
$$= (\cos 2x + \cos 2y)(\mathrm{ch}2x\cdot \mathrm{ch}2y + 1)/4$$

式 2-(2)

$$(\mathrm{chx}\cdot\sin x\cdot\mathrm{chy}\cdot\sin y)^2-(\mathrm{shx}\cdot\cos x\cdot\mathrm{shy}\cdot\cos y)^2+(\mathrm{chx}\cdot\cos x\cdot\mathrm{chy}\cdot\cos y)^2-(\mathrm{shx}\cdot\sin x\cdot\mathrm{shy}\cdot\sin y)^2$$
$$=(\mathrm{ch}2x+\mathrm{ch}2y)(\cos 2x\cdot\cos 2y+1)/4$$

式 2-(3)

$$(\mathrm{chx}\cdot\sin x\cdot\cos y\cdot\mathrm{shy})^2-(\mathrm{shx}\cdot\cos x\cdot\sin y\cdot\mathrm{chy})^2-(\mathrm{chx}\cdot\cos x\cdot\cos y\cdot\mathrm{chy})^2+(\mathrm{shx}\cdot\sin x\cdot\sin y\cdot\mathrm{shy})^2$$
$$=-(\mathrm{ch}2x+\cos 2y)(\cos 2x\cdot\mathrm{ch}2y+1)/4$$

ここで、x, y は任意の実数である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら三つの青色式が得られた。対称的な秩序が出ていてきれいである。Wolfram Alpha を使った数値検証でも合っていることを確認している。

さて、これらの導出であるが次のように行った。[四重積−二重積]対称式Ⅱの四式に着目し、

Ⅱ(1)×Ⅱ(4)＋ Ⅱ(2)×Ⅱ(3)

を辺々計算していく。すると右辺では多くの項が相殺されすっきりしてまず次の式 2-(1)が得られる。

式 2-(1)

$$(\cos x\cdot\mathrm{shx}\cdot\cos y\cdot\mathrm{shy})^2-(\sin x\cdot\mathrm{chx}\cdot\sin y\cdot\mathrm{chy})^2+(\cos x\cdot\mathrm{chx}\cdot\cos y\cdot\mathrm{chy})^2-(\sin x\cdot\mathrm{shx}\cdot\sin y\cdot\mathrm{shy})^2$$
$$=(\cos 2x+\mathrm{ch}2y)(\mathrm{ch}^2x\cdot\mathrm{ch}^2y+\mathrm{sh}^2x\cdot\mathrm{sh}^2y)/2$$
$$=(\cos 2x+\cos 2y)(\mathrm{ch}2x\cdot\mathrm{ch}2y+1)/4$$

参考までに右辺に関して途中の式も赤字で示した。赤字式に対し sinh と cosh の倍角公式を使えば、容易に最後の形に到達する。次に赤字を省いて書いておく。

式 2-(1)

$$(\cos x\cdot\mathrm{shx}\cdot\cos y\cdot\mathrm{shy})^2-(\sin x\cdot\mathrm{chx}\cdot\sin y\cdot\mathrm{chy})^2+(\cos x\cdot\mathrm{chx}\cdot\cos y\cdot\mathrm{chy})^2-(\sin x\cdot\mathrm{shx}\cdot\sin y\cdot\mathrm{shy})^2$$
$$=(\cos 2x+\cos 2y)(\mathrm{ch}2x\cdot\mathrm{ch}2y+1)/4$$

これはよく見ると、２倍角の公式になっている！

さて、この式 2-(1)が求まれば残りの二式はすぐに出る。

それらを出す前に、前回見た公式集にもある三角関数と双曲線関数における以下の関係式を掲げる。

sin(ix)＝i・sinh(x) ---①

sinh(ix)＝i・sin(x) ---②

cos(ix)＝cosh(x) ---③

cosh(ix)＝cos(x) ---④

　さて、式 2−(1) を再掲する。

式 2−(1)

$$(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2+(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2$$
$$=(\cos 2x+\cos 2y)(\mathrm{ch}2x\cdot \mathrm{ch}2y+1)/4$$

　この式 2−(1) に対し、形式的に x に i・x を代入し、y に i・y を代入する（i：虚数単位）。そして上記関係式①～④を適用すると即座に次の式 2−(2) が得られる。

式 2−(2)

$$(\mathrm{ch}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \sin y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \cos y)^2+(\mathrm{ch}x\cdot \cos x\cdot \mathrm{ch}y\cdot \cos y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot \sin x\cdot \mathrm{sh}y\cdot \sin y)^2$$
$$=(\mathrm{ch}2x+\mathrm{ch}2y)(\cos 2x\cdot \cos 2y+1)/4$$

　式 2−(1) を再び掲げる。

式 2−(1)

$$(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2+(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2$$
$$=(\cos 2x+\cos 2y)(\mathrm{ch}2x\cdot \mathrm{ch}2y+1)/4$$

　この式 2−(1) に対し、形式的に x に i・x を代入し、y はそのままとする（i：虚数単位）。そして関係式①～④を適用すると即座に次の式 2−(3) が得られる。

式 2−(3)

$$(\mathrm{ch}x\cdot \sin x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2-(\mathrm{sh}x\cdot \cos x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\mathrm{ch}x\cdot \cos x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2+(\mathrm{sh}x\cdot \sin x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2$$
$$=-(\mathrm{ch}2x+\cos 2y)(\cos 2x\cdot \mathrm{ch}2y+1)/4$$

　このようにして今回の式が得られた。

　式 2−(1) が得られたら、あとは関係式①～④を用いることで簡単に式 2−(2) と式 2−(3) が出るという流れとなっている。

　最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●冒頭で示唆したように前回の[四重積自乗四和]公式（それを～公式１とする）も２倍角公式の形に変形できると気づいたので、その形にして今回分と合わせて並べると以下となる。

****

[四重積自乗四和]公式 1

式 1−(1)

$$(\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y)^2+(\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y)^2-(\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y)^2$$
$$=(\mathrm{ch}2x-\mathrm{ch}2y)(1-\cos 2x\cdot \cos 2y)/4$$

式 1−(2)

$$(\mathrm{shx}\cdot\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{chy}\cdot\mathrm{cosy})^2-(\mathrm{chx}\cdot\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{shy}\cdot\mathrm{siny})^2+(\mathrm{chx}\cdot\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{shy}\cdot\mathrm{cosy})^2-(\mathrm{shx}\cdot\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{chy}\cdot\mathrm{siny})^2$$
$$=(\cos 2x-\cos 2y)(1-\mathrm{ch}2x\cdot\mathrm{ch}2y)/4$$

式 1−(3)

$$(\mathrm{shx}\cdot\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{cosy}\cdot\mathrm{chy})^2-(\mathrm{chx}\cdot\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{siny}\cdot\mathrm{shy})^2-(\mathrm{chx}\cdot\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{siny}\cdot\mathrm{chy})^2+(\mathrm{shx}\cdot\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{cosy}\cdot\mathrm{shy})^2$$
$$=(\cos 2x-\mathrm{ch}2y)(1-\mathrm{ch}2x\cdot\cos 2y)/4$$

[四重積自乗四和]公式２

式 2−(1)

$$(\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{shx}\cdot\mathrm{cosy}\cdot\mathrm{shy})^2-(\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{chx}\cdot\mathrm{siny}\cdot\mathrm{chy})^2+(\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{chx}\cdot\mathrm{cosy}\cdot\mathrm{chy})^2-(\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{shx}\cdot\mathrm{siny}\cdot\mathrm{shy})^2$$
$$=(\cos 2x+\cos 2y)(\mathrm{ch}2x\cdot\mathrm{ch}2y+1)/4$$

式 2−(2)

$$(\mathrm{chx}\cdot\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{chy}\cdot\mathrm{siny})^2-(\mathrm{shx}\cdot\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{shy}\cdot\mathrm{cosy})^2+(\mathrm{chx}\cdot\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{chy}\cdot\mathrm{cosy})^2-(\mathrm{shx}\cdot\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{shy}\cdot\mathrm{siny})^2$$
$$=(\mathrm{ch}2x+\mathrm{ch}2y)(\cos 2x\cdot\cos 2y+1)/4$$

式 2−(3)

$$(\mathrm{chx}\cdot\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{cosy}\cdot\mathrm{shy})^2-(\mathrm{shx}\cdot\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{siny}\cdot\mathrm{chy})^2-(\mathrm{chx}\cdot\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{cosy}\cdot\mathrm{chy})^2+(\mathrm{shx}\cdot\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{siny}\cdot\mathrm{shy})^2$$
$$=-(\mathrm{ch}2x+\cos 2y)(\cos 2x\cdot\mathrm{ch}2y+1)/4$$

****

このように、前回分も２倍角公式という形になった。前回の形のままでは左辺の大リングが右辺の小リングに縮小するというだけの式に見えていたが、２倍角の公式の形になってみると、ぐっと深みのある式に変貌したといえる。裏側に大きななにかが潜んでいると感じる。

● [四重積−二重積]対称式の発見から３年が経過している。そのときはそれら美しい公式に満足してしまいさらになにかが埋まっているとは思っていなかった。ただそれらの式は気になり続けてはいたのだが、今回もうすこし先を掘り進めて上記公式に行き着いた。

数学研究ではいつも「もうここからは何も出ない！掘り尽くした！」と思って別方向に向かっていくのだが、しかしそんなことは錯覚であり、しばらくすると先の領域からわんさと宝物が湧き出てくるということを頻繁に経験している。本当に人間というのは見ているようで見ていない。また気づかずに通過してしまったものも山のようにあるだろうことも容易に想像できる。これは私だけではなくおそらくプロの数学者であっても同じだろうと思う。人間のすることなど見落としだらけである。

● 今回と前回で[四重積-二重積]対称式での～対称式Ⅰと～対称式Ⅱに対して、[四重積自乗四和]公式の～公式１と～公式２をそれぞれ見出した。あと～対称式Ⅲと対称式Ⅳが残っていて、それも同様にして[四重積自乗四和]公式（つまり２倍角公式）が出ることはもはや明らかである。

対称性の高い領域（三角関数と双曲線関数の融合域は本当に対称性が高い！）というのは、１点突破が全面突破であって、ある１点が分かると類似を行うことで公式がどんどんとイモずる式に飛び出てくる。過去そんなことをくり返してきたが、今回もそうである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.5.31 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

Rev1.01 改訂　式 2-(3)と式 2-(4)は同値とわかり（x と y の置換で容易）、式 2-(4)を削除。　2025.6.8