

＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その４３）＞

新種の極限公式が三つ得られたので下方に青色式で示す。今回はじめてL(4)とζ(4)の式が得られた。

極限公式が多く出すぎたので、同グループでは過去分も示したが、今回のものとの関係のない他グループでは最新のもの二つずつのみを示した。なお、ゼータ香り式と2次体ゼータ式では、調整因子の簡単化をし忘れているので簡単化した（例 $\sin a \Rightarrow a$ ）。

以降において、 $L(1) \sim L(4)$ 、 $\zeta(2) \sim \zeta(4)$ は次の通り。

$$L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \pi/4$$

$$L(2) = 1 - 1/3^2 + 1/5^2 - 1/7^2 + \dots = \text{非明示（カタランの定数）}$$

$$L(3) \text{ は } L(3) = 1 - 1/3^3 + 1/5^3 - 1/7^3 + \dots = \pi^3/32$$

$$L(4) = 1 - 1/3^4 + 1/5^4 - 1/7^4 + \dots = \text{非明示}$$

$$\zeta(2) = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots = \pi^2/6$$

$$(3/4)\zeta(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots = \pi^2/8 \text{（一つ上と実質は同じ）}$$

$$\zeta(3) = 1 + 1/2^3 + 1/3^3 + 1/4^3 + \dots = \text{非明示}$$

$$\zeta(4) = 1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \dots = \pi^4/90$$

以降では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、 $\text{sh}2a$ は $\sinh(2a)$ のことである。 a , x は任意の実数である。 $\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ $\arctan$, arctanh である。 $\log$ は自然対数、 e は自然対数の底。 $\sin$, $\cos$, $\tan$ は通常の表記である。

なお、 $\lim$ での $a \rightarrow +0$ は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、 $a \rightarrow \pm 0$ は a をプラス側, マイナス側 どちらから 0 に近づけても OK の意味である。

=====

＜ 極限公式 ＞

◆ $2^{1/2} / 2^{1/4} / 2^{-1} / 2^2$ 極限公式

$$\frac{1}{2} = \lim_{a \rightarrow +0} \log \left((1 + a^2 \cdot e^{-a}) (1 + a^2 \cdot e^{-3a})^3 (1 + a^2 \cdot e^{-5a})^5 (1 + a^2 \cdot e^{-7a})^7 \cdot \dots \right) \quad \text{--<O1-8>}$$

$$4 = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin a}{\text{cha} - \sin a} \right)^{e^{-a}} \left(\frac{\text{ch}2a + \sin a}{\text{ch}2a - \sin a} \right)^{e^{-2a}} \left(\frac{\text{ch}3a + \sin a}{\text{ch}3a - \sin a} \right)^{e^{-3a}} \left(\frac{\text{ch}4a + \sin a}{\text{ch}4a - \sin a} \right)^{e^{-4a}} \cdot \dots \quad \text{--<Q1>}$$

◆ L(2) 極限公式

$$L(2) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\text{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\text{cha}} \right) + 3 \text{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\text{ch}3a} \right) + 5 \text{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\text{ch}5a} \right) + 7 \text{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\text{ch}7a} \right) + \dots \right) \quad \text{--<S1-8>}$$

$$L(2)=\lim_{a\rightarrow\pm 0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh}16a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-9>}$$

◆ $\frac{\pi^2}{8}$ 極限公式 (3 ζ (2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\rightarrow+0}9a\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}3a}\right)+3\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}9a}\right)+5\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}15a}\right)+7\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}21a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S2-11>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\rightarrow+0}16a\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}4a}\right)+3\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}12a}\right)+5\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}20a}\right)+7\text{th}^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{sh}28a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S2-12>}$$

◆ $\frac{\pi^2}{6}$ 極限公式 (ζ (2) 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\rightarrow+0}2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<S3-11>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\rightarrow+0}a\cdot\log\left(2(1+e^{-a})^2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-3a})^2(1+e^{-4a})^2\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-12>}$$

◆ $\frac{\pi}{4}$ 極限公式 (L (1) 極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}8a\left(\frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}}+\frac{\text{ch}12a}{\text{ch}24a+\text{cha}}+\frac{\text{ch}20a}{\text{ch}40a+\text{cha}}+\frac{\text{ch}28a}{\text{ch}56a+\text{cha}}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S4-21>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\rightarrow+0}16a\left(\frac{\text{ch}8a}{\text{ch}16a+\text{cha}}+\frac{\text{ch}24a}{\text{ch}48a+\text{cha}}+\frac{\text{ch}40a}{\text{ch}80a+\text{cha}}+\frac{\text{ch}56a}{\text{ch}112a+\text{cha}}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S4-22>}$$

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\rightarrow+0}2a\left(\frac{e^{-2a}+\text{cha}}{\text{ch}2a+\text{cha}}+\frac{e^{-6a}+\text{cha}}{\text{ch}6a+\text{cha}}+\frac{e^{-10a}+\text{cha}}{\text{ch}10a+\text{cha}}+\frac{e^{-14a}+\text{cha}}{\text{ch}14a+\text{cha}}+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S5-7>}$$

$$\log 2=\lim_{a\rightarrow+0}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{e^a}\cdot\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{cha}}\right)+\frac{1}{e^{2a}}\cdot\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}2a}\right)+\frac{1}{e^{3a}}\cdot\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}3a}\right)+\frac{1}{e^{4a}}\cdot\text{th}^{-1}\left(\frac{1}{\text{ch}4a}\right)+\cdot\cdot\cdot\right) \quad \text{--<5-8>}$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log(2(1 + e^{-2a})^2(1 + e^{-4a})^3(1 + e^{-6a})^4(1 + e^{-8a})^5 \cdot \cdot) \quad \text{---<S6-22>}$$

$$\zeta(3) = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{16a^2}{3} \log((1 + e^a)(1 + e^{-a})^2(1 + e^{-3a})^3(1 + e^{-5a})^4 \cdot \cdot) \quad \text{---<S6-23>}$$

◆ $\frac{\pi^3}{32}$ 極限公式 (L(3) 極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 (\tan^{-1}(1) + 3\tan^{-1}(e^{-2a}) + 5\tan^{-1}(e^{-4a}) + 7\tan^{-1}(e^{-6a}) + \cdot \cdot) \quad \text{--<S7-6>}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \lim_{a \rightarrow +0} 2a^2 (\tan^{-1}(e^a) + 3\tan^{-1}(e^{-a}) + 5\tan^{-1}(e^{-3a}) + 7\tan^{-1}(e^{-5a}) + \cdot \cdot) \quad \text{--<S7-7>}$$

◆ e^π 極限公式

$$e^\pi = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin a}{\text{cha} - \sin a} \right) \left(\frac{\text{ch2a} + \sin a}{\text{ch2a} - \sin a} \right) \left(\frac{\text{ch3a} + \sin a}{\text{ch3a} - \sin a} \right) \left(\frac{\text{ch4a} + \sin a}{\text{ch4a} - \sin a} \right) \cdot \cdot \quad \text{--<S8-1>}$$

$$e^\pi = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin a}{\text{cha} - \sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch3a} + \sin a}{\text{ch3a} - \sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch5a} + \sin a}{\text{ch5a} - \sin a} \right)^2 \left(\frac{\text{ch7a} + \sin a}{\text{ch7a} - \sin a} \right)^2 \cdot \cdot \quad \text{--<S8-2>}$$

◆ $e^{\pi x}$ [恒等] 極限公式

$$e^{\pi x} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin ax}{\text{cha} - \sin ax} \right) \left(\frac{\text{ch2a} + \sin ax}{\text{ch2a} - \sin ax} \right) \left(\frac{\text{ch3a} + \sin ax}{\text{ch3a} - \sin ax} \right) \left(\frac{\text{ch4a} + \sin ax}{\text{ch4a} - \sin ax} \right) \cdot \cdot \quad \text{--<S8-1-2>}$$

$$e^{\pi x} = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\frac{\text{cha} + \sin ax}{\text{cha} - \sin ax} \right)^2 \left(\frac{\text{ch3a} + \sin ax}{\text{ch3a} - \sin ax} \right)^2 \left(\frac{\text{ch5a} + \sin ax}{\text{ch5a} - \sin ax} \right)^2 \left(\frac{\text{ch7a} + \sin ax}{\text{ch7a} - \sin ax} \right)^2 \cdot \cdot \quad \text{--<S8-2-2>}$$

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi \text{ch} \pi}{\text{sh}(2\pi)} = \frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{3^2+1} - \frac{1}{4^2+1} + \cdot \cdot$$

$$= \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\frac{\sin a}{e^a+1} + \frac{\sin 2a}{e^{2a}+1} + \frac{\sin 3a}{e^{3a}+1} + \frac{\sin 4a}{e^{4a}+1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S9-1>}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{(\pi/2)}{\text{th } \pi} = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{4^2+1} + \cdot \cdot$$

$$= \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\frac{\sin a}{e^a-1} + \frac{\sin 2a}{e^{2a}-1} + \frac{\sin 3a}{e^{3a}-1} + \frac{\sin 4a}{e^{4a}-1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S9-2>}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi \text{ch } \pi}{\text{sh}(2\pi)} = \frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{3^2+1} - \frac{1}{4^2+1} + - \cdot \cdot$$

$$= \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\sin a}{e^a+1} + \frac{\sin 3a}{e^{3a}+1} + \frac{\sin 5a}{e^{5a}+1} + \frac{\sin 7a}{e^{7a}+1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S9-3>}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{(\pi/2)}{\text{th } \pi} = \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{4^2+1} + \cdot \cdot$$

$$= \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\sin a}{e^a-1} + \frac{\sin 3a}{e^{3a}-1} + \frac{\sin 5a}{e^{5a}-1} + \frac{\sin 7a}{e^{7a}-1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{----<S9-4>}$$

$$\frac{1}{1^2+1} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} + - \cdot \cdot = \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\cos a}{e^a+1} + \frac{\cos 3a}{e^{3a}+1} + \frac{\cos 5a}{e^{5a}+1} + \frac{\cos 7a}{e^{7a}+1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S9-5>}$$

$$\frac{1}{1^2+1} - \frac{2}{2^2+1} + \frac{3}{3^2+1} - \frac{4}{4^2+1} + - \cdot \cdot = \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\frac{\cos a}{e^a+1} + \frac{\cos 2a}{e^{2a}+1} + \frac{\cos 3a}{e^{3a}+1} + \frac{\cos 4a}{e^{4a}+1} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S9-6>}$$

$$\frac{(\pi/2)^2 \text{ch}(\pi/2)}{\text{sh}^2(\pi/2)} - \frac{(\pi/2)}{\text{sh}(\pi/2)} = 4 \left(\frac{2^2}{(2^2+1)^2} - \frac{4^2}{(4^2+1)^2} + \frac{6^2}{(6^2+1)^2} - \frac{8^2}{(8^2+1)^2} + - \cdot \cdot \right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{\sin a}{\text{ch}^2 a} + \frac{2\sin 2a}{\text{ch}^2 2a} + \frac{3\sin 3a}{\text{ch}^2 3a} + \frac{4\sin 4a}{\text{ch}^2 4a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S9-7>}$$

$$\frac{(\pi/2)}{\text{th}(\pi/2)} - \frac{(\pi/2)^2}{\text{sh}^2(\pi/2)} = 4 \left(\frac{2^2}{(2^2+1)^2} + \frac{4^2}{(4^2+1)^2} + \frac{6^2}{(6^2+1)^2} + \frac{8^2}{(8^2+1)^2} + \cdot \cdot \right)$$

$$= \lim_{a \rightarrow +0} a^2 \left(\frac{\sin a}{\text{sh}^2 a} + \frac{2\sin 2a}{\text{sh}^2 2a} + \frac{3\sin 3a}{\text{sh}^2 3a} + \frac{4\sin 4a}{\text{sh}^2 4a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{---<S9-8>}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\text{sh}(3\pi/2) - \text{sh}(\pi/2)}{\text{sh}(2\pi)} = \frac{1}{1^2+1} - \frac{3}{3^2+1} + \frac{5}{5^2+1} - \frac{7}{7^2+1} + - \cdot \cdot$$

$$= \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\frac{\cos a}{\text{ch } a} + \frac{\cos 3a}{\text{ch } 3a} + \frac{\cos 5a}{\text{ch } 5a} + \frac{\cos 7a}{\text{ch } 7a} + \cdot \cdot \right) \quad \text{--<S9-9>}$$

$$\frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{5^2+1} - \frac{1}{7^2+1} + \cdots = \lim_{a \rightarrow \pm 0} a \left(\frac{\sin a}{\operatorname{cha}} + \frac{\sin 3a}{\operatorname{ch} 3a} + \frac{\sin 5a}{\operatorname{ch} 5a} + \frac{\sin 7a}{\operatorname{ch} 7a} + \cdots \right) \quad \text{--<S9-10>}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{\operatorname{sh}(3\pi/2) - \operatorname{sh}(\pi/2)}{\operatorname{sh}(2\pi)} &= \frac{1}{1^2+1} - \frac{3}{3^2+1} + \frac{5}{5^2+1} - \frac{7}{7^2+1} + \cdots \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\frac{\operatorname{sh} 2a \cdot \sin a}{\operatorname{ch} 4a + \cos 2a} + \frac{\operatorname{sh} 3a \cdot \sin 2a}{\operatorname{ch} 6a + \cos 2a} + \frac{\operatorname{sh} 4a \cdot \sin 3a}{\operatorname{ch} 8a + \cos 2a} + \frac{\operatorname{sh} 5a \cdot \sin 4a}{\operatorname{ch} 10a + \cos 2a} + \cdots \right) \quad \text{--<S9-11>} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2} \right) \frac{\operatorname{sh}(3\pi/2) - \operatorname{sh}(\pi/2)}{\operatorname{sh}(2\pi)} &= \frac{1}{1^2+1} - \frac{3}{3^2+1} + \frac{5}{5^2+1} - \frac{7}{7^2+1} + \cdots \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} a \left(\frac{\operatorname{sh} 2a \cdot \sin a}{\operatorname{ch} 4a + \operatorname{ch} 2a} + \frac{\operatorname{sh} 3a \cdot \sin 2a}{\operatorname{ch} 6a + \operatorname{ch} 2a} + \frac{\operatorname{sh} 4a \cdot \sin 3a}{\operatorname{ch} 8a + \operatorname{ch} 2a} + \frac{\operatorname{sh} 5a \cdot \sin 4a}{\operatorname{ch} 10a + \operatorname{ch} 2a} + \cdots \right) \quad \text{---<S9-12>} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1^2+1} - \frac{1}{3^2+1} + \frac{1}{5^2+1} - \frac{1}{7^2+1} + \cdots \\ &= \lim_{a \rightarrow \pm 0} \left(\sin a \cdot \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\operatorname{cha}} \right) + \sin 3a \cdot \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\operatorname{ch} 3a} \right) + \sin 5a \cdot \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\operatorname{ch} 5a} \right) + \sin 7a \cdot \operatorname{th}^{-1} \left(\frac{\sin a}{\operatorname{ch} 7a} \right) + \cdots \right) \quad \text{--<S9-13>} \end{aligned}$$

◆ $\pi \sqrt{2}/4$ 極限公式 (虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ゼータ $L_2(1)$ 極限公式)

$$\begin{aligned} \frac{\pi\sqrt{2}}{4} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{ch} 2a} + \frac{\operatorname{ch} 3a}{\operatorname{ch} 6a} + \frac{\operatorname{ch} 5a}{\operatorname{ch} 10a} + \frac{\operatorname{ch} 7a}{\operatorname{ch} 14a} + \cdots \right) \quad \text{----<S10-1>} \end{aligned}$$

◆ $(1/\sqrt{2}) \log(1+\sqrt{2})$ 極限公式 (実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ゼータ $L_1(1)$ 極限公式)

$$\begin{aligned} \frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \cdots \\ &= \lim_{a \rightarrow +0} 2a \left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch} 2a} + \frac{\operatorname{sh} 3a}{\operatorname{ch} 6a} + \frac{\operatorname{sh} 5a}{\operatorname{ch} 10a} + \frac{\operatorname{sh} 7a}{\operatorname{ch} 14a} + \cdots \right) \quad \text{----<S11-1>} \end{aligned}$$

◆ $L(4)$ 極限公式

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\operatorname{ch} 3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\operatorname{ch} 5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\operatorname{ch} 7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\operatorname{ch} 9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\operatorname{ch} 11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\operatorname{ch} 13a} + \cdots \right) \quad \text{--<S12-1>}$$

◆ $\frac{\pi^4}{90}$ 極限公式 (ζ(4) 極限公式)

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{32a^4}{45} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{sh}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{sh}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{sh}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{sh}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{sh}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{sh}13a} + \dots \right) \text{--<S13-1>}$$

=====

これらの三つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。

やはり注目すべきは L(4) と $\pi^4/90$ の二式である。これらは シンプルであり面白い規則 から成っている！
L(4) の導出は複雑な計算になったが、その複雑なものの中から霧が晴れるようにシンプルな L(4) 式が浮かんできたときは感動した。それら二式を再掲する。

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{ch}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{ch}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{ch}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{ch}13a} + \dots \right) \text{--<S12-1>}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{32a^4}{45} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{sh}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{sh}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{sh}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{sh}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{sh}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{sh}13a} + \dots \right) \text{--<S13-1>}$$

これらは対称的で面白い形をしている！

$\pi^4/90$ 式で “32/45” がいま一つと感じられるかもしれないが、じつは、

$$1 + 1/3^4 + 1/5^4 + 1/7^4 + \dots = (1 - 1/2^4) (1 + 1/2^4 + 1/3^4 + 1/4^4 + \dots) = (1 - 1/2^4) \cdot \pi^4/90$$

であり、最左辺に注目して $A = 1 + 1/3^4 + 1/5^4 + 1/7^4 + \dots$ とすると、両式は次のようになる。

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{ch}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{ch}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{ch}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{ch}13a} + \dots \right) \text{--<S12-1>}$$

$$A = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{sh}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{sh}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{sh}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{sh}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{sh}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{sh}13a} + \dots \right)$$

このように 完全に対称的な形 にできる！ ゼータの本心はこうなのである。

これらの式は 深いところに埋もれていた というのが偽らざる実感である。これまで大量に出た $\pi/4$ 式 (L(1) 式) とか $\pi^2/6$ 式 (ζ(2) 式) とかは地表近くにあって楽に発見できた鉱石 (公式) であったが、今回の式は地下深くにある鉱物という感じである。

さて、今回の式の中から L(4) 式の <S 1 2 - 1> の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

=====

<S12-1> の証明

下式 [1] の 右辺から 出発する。その右辺を 13 年前の こちらの 2012/8/16 の [導出] と類似的な方法を使って変形していくと [1] の 左辺に 到達する。途中で ゼータの香りの漂う・・・ (その 307) でのフーリエ級数を使う。

(注意：その頁でフーリエ級数の表現を使っているが、それらは恒等式である。xに制限を加えているが、じつはxは任意の実数である)。この[1]は三変数の恒等式となっている。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos x}{e^a}\right) \frac{1}{(1 + \alpha^2 \cdot e^{-2a})} - \left(\frac{\cos 3x}{e^{3a}}\right) \frac{1}{(1 + \alpha^2 \cdot e^{-6a})} + \left(\frac{\cos 5x}{e^{5a}}\right) \frac{1}{(1 + \alpha^2 \cdot e^{-10a})} - \left(\frac{\cos 7x}{e^{7a}}\right) \frac{1}{(1 + \alpha^2 \cdot e^{-14a})} + \dots \\ &= \cos x \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a + \cos 2x} - \frac{\alpha^2 \cdot \text{ch}3a}{\text{ch}6a + \cos 2x} + \frac{\alpha^4 \cdot \text{ch}5a}{\text{ch}10a + \cos 2x} - \frac{\alpha^6 \cdot \text{ch}7a}{\text{ch}14a + \cos 2x} + \dots \right) \quad \text{-----[1]} \\ & \quad (a > 0, x \text{ は任意実数}, \alpha \text{ は } e^a \text{ より小さい}) \end{aligned}$$

この両辺に $1/\cos x$ を掛けて (左辺は各項に掛ける)、両辺を x で微分して別の式を得る。その式で α に 1 を代入して、両辺に $1/(2\sin 2x)$ を掛けて (左辺は各項に掛ける) 変形を続け、次の式[2]を得る。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}\right) \left(\left(\frac{4\sin 2x + 2\sin 4x}{\sin 4x + 2\sin 2x}\right) \frac{1}{\text{ch}3a} - \left(\frac{6\sin 4x + 4\sin 6x}{\sin 4x + 2\sin 2x}\right) \frac{1}{\text{ch}5a} + \left(\frac{8\sin 6x + 6\sin 8x}{\sin 4x + 2\sin 2x}\right) \frac{1}{\text{ch}7a} - \left(\frac{10\sin 8x + 8\sin 10x}{\sin 4x + 2\sin 2x}\right) \frac{1}{\text{ch}9a} + \dots \right) \\ &= \frac{\text{cha}}{(\text{ch}2a + \cos 2x)^2} - \frac{\text{ch}3a}{(\text{ch}6a + \cos 2x)^2} + \frac{\text{ch}5a}{(\text{ch}10a + \cos 2x)^2} - \frac{\text{ch}7a}{(\text{ch}14a + \cos 2x)^2} + \dots \quad \text{-----[2]} \\ & \quad (a, x \text{ は任意実数}) \end{aligned}$$

上式で x を $\pi/2$ に近づけていく ($x \rightarrow \pi/2$)。ロピタルの定理を何度か使い計算していくと、次の式[3]に到達する。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{ch}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{ch}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{ch}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{ch}13a} + \dots \right) \\ &= \frac{\text{cha}}{(\text{ch}2a - 1)^2} - \frac{\text{ch}3a}{(\text{ch}6a - 1)^2} + \frac{\text{ch}5a}{(\text{ch}10a - 1)^2} - \frac{\text{ch}7a}{(\text{ch}14a - 1)^2} + \dots \quad \text{---[3]} \\ & \quad (a \text{ は任意実数}) \end{aligned}$$

上式に対し、両辺に a^4 を掛けて (右辺は各項に掛ける)、 a を 0 に近づけていく ($a \rightarrow \pm 0$)。右辺では何度かロピタルの定理を使って計算を行うと最終的に右辺は $L(4)/4$ となる。形を整え、よって目標の $L(4)$ 式が得られた。

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{ch}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{ch}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{ch}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{ch}13a} + \dots \right) \quad \text{--<S12-1>}$$

終わり。

=====

このようにして $L(4)$ 極限公式は得られた。詳細に書けば複雑になるが、最後は <S 1 2 - 1> というきれいな式になった。また証明中の式[3]も価値のある恒等式である。

なお、上記証明において、形式的に α に i (虚数単位) を代入することで、証明の途中計算をそっくりそのまま利用できて、簡単に $\pi^4/90$ 極限公式 (つまり $\zeta(4)$ 極限公式) が得られる。

まとめると次となる。

$\alpha = 1$ のとき $\Rightarrow L(4)$ 式が出る。

$\alpha = i$ のとき $\Rightarrow \zeta(4)$ 式が出る。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

●L(4)と $\pi^4/90$ の式を再び眺めたい。

$$L(4) = \lim_{a \rightarrow \pm 0} \frac{2a^4}{3} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{ch}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{ch}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{ch}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{ch}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{ch}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{ch}13a} + \dots \right) \text{--<S12-1>}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \lim_{a \rightarrow +0} \frac{32a^4}{45} \left(\frac{1 \times 2 \times 3}{\text{sh}3a} + \frac{2 \times 3 \times 5}{\text{sh}5a} + \frac{3 \times 4 \times 7}{\text{sh}7a} + \frac{4 \times 5 \times 9}{\text{sh}9a} + \frac{5 \times 6 \times 11}{\text{sh}11a} + \frac{6 \times 7 \times 13}{\text{sh}13a} + \dots \right) \text{--<S13-1>}$$

これらはやはりきれいである。対称的でありふしぎさもあって、いくら眺めていても飽きない。

●これまでL(1)～L(3)や $\zeta(2)$ 、 $\zeta(3)$ の式は出ても、どうしてもL(4)以降と $\zeta(4)$ 以降の式が出なかった。原理的に無理なのか・・・？と音をあげかかっていたのだが、今回、母等式に対し“ある変形”を思いつき長い計算を進めたら突然L(4)が得られた。そしてL(4)が出たらほぼ同時に $\zeta(4)$ が出るという仕組みになっていることにも気づき、即座に $\zeta(4)$ も出た。

その“ある変形”とは、証明中[1]の両辺に $1/\cos x$ を掛けてから微分するという操作である。わかればなんでもないのであるが、これに気づかなかった。その操作が地下回廊へと続く階段の扉を開けてくれた。一旦扉があると、向こうは豊穡なるものが眠る大空間であり、そこからさまざまなものが湧き出てくる。

いつも「もう先へは進めない。完全に行き詰まりだ！」と思うのだが、しばらくすると小穴が見つかりそこを無理やり進むと、大空間が開けている・・・ということになる。そんなことのくり返しである。人間などにも見えていないし、真理の前には小さいものでしかない。

昔、将棋の棋士・羽生善治氏（永世名人）が、「将棋は突き詰めていくと狂気の世界に通じている。狂気の世界にはいりこむ一手手前で引き返すようにしている。将棋の読みに耽っていると、巨大な大海にポツンと投げ出されたように感じる。人間なんて小さなものだなあと感じる。」というようなことを何かに書いて、とても印象に残っている。

羽生氏のいうことは数学でも同じであるし、のみならず創造の領域ではすべてそうである。

=====

2025. 5. 10 杉岡幹生

<参考文献>

・「マグローヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)