＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その４１）＞

新種の極限公式が１０個得られたので下方に青色式で示す。紙幅の節約のため、それらの同グループの過去のものは最近の四つのみを示した（π/4 とζ(3)グループは変則とした)。他グループのものは最新のもの二つずつを示した。

以降において、L(2)はL(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2$ +−・・である（カタランの定数）。

ζ(3)はζ(3)＝1 $+1/2^3+1/3^3+1/4^3$ +・・で、L(3)はL(3)＝1 $-1/3^3+1/5^3-1/7^3$ +−・・＝$\pi^3/32$ である。

π/4 はL(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +−・・＝π/4 であり、$\pi^2/6$ はζ(2) ＝1 $+1/2^2+1/3^2+1/4^2$ +・・＝$\pi^2/6$、$\pi^2/8$ は(3/4)ζ(2) ＝1 $+1/3^2+1/5^2+1/7^2$ +・・＝$\pi^2/8$。

さらに以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a, x は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a->±0 は a をプラス側,マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left(\left(1+a^2\cdot e^{-a}\right)\left(1+a^2\cdot e^{-3a}\right)^3\left(1+a^2\cdot e^{-5a}\right)^5\left(1+a^2\cdot e^{-7a}\right)^7\cdot\cdot\right)\quad \text{--＜O1−8＞}$$

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot\quad \text{--＜Q1＞}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}14a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--＜S1−5＞}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--＜S1−6＞}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad \text{--＜S1−7＞}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-8>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} 2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}16a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-9>}$$

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} a^2\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}+\frac{3}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-4>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{3}{\mathrm{sh}4a}+\frac{4}{\mathrm{sh}5a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-5>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{ch}a}\right)\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S2-6>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} \left(\frac{a}{2}\right)\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}a+\cos a}{\mathrm{ch}a-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\cos a}{\mathrm{ch}3a-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\cos a}{\mathrm{ch}5a-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\cos a}{\mathrm{ch}7a-\cos a}\right)\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S2-7>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}12a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}12a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}16a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}16a-\mathrm{ch}a}\right)\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S2-8>}$$

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2) 極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to +0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<S3-11>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to +0} a\cdot\log\left(2(1+e^{-a})^2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-3a})^2(1+e^{-4a})^2\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S3-12>}$$

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1) 極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to +0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}16a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S4-10>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to +0} a^2\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2a}+\frac{2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2a}+\frac{3\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2a}+\frac{4\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S4-11>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+1}+\frac{2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+1}+\frac{3\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+1}+\frac{4\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+1}+\cdot\ \cdot\right)$$ ---<S4−12>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{5\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}^25a}+\frac{7\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}^27a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ---<S4−14>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 4\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}16a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}24a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}32a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$ --<S4−17>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 8\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}16a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}32a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}48a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}64a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$ --<S4−18>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 16\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}32a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}64a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}96a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}128a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$ --<S4−19>

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\to\pm0} a^2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^22a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^23a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^24a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ---<S5−4>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2a\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\mathrm{sh}5a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$ ---<S5−5>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} a\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}2a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$ --<S5−6>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{e^{-2a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-6a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-10a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-14a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ---<S5−7>

$$\log 2=\lim_{a\to+0}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{e^a}\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}\right)+\frac{1}{e^{2a}}\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a}\right)+\frac{1}{e^{3a}}\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}3a}\right)+\frac{1}{e^{4a}}\cdot\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}4a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$ --<5−8>

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\ \cdot\right)$$ ---<S6−6>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} 4a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4\cdot\ \cdot}\right)$$ ---<S6−7>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\ \cdot\right)$$ ---<S6−8>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm 0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^3-7}{\mathrm{sh}^2 7a}+\frac{9^3-9}{\mathrm{sh}^2 9a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−15>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{8a^2}{3}\log\left(2(1+e^{-2a})^3(1+e^{-4a})^5(1+e^{-6a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−16>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^5(1+e^{-8a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−17>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{a})(1+e^{-a})^3(1+e^{-3a})^5(1+e^{-5a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−18>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to +0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^5(1+e^{-9a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−19>

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　（L(3) 極限公式）

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to +0}a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−3>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to +0}a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−4>

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to +0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1>

$$e^{\pi}=\lim_{a\to +0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2>

◆ $e^{\pi x}$ [恒等] 極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to +0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1−2>

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to +0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2−2>

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{sh2a\cdot sina}}{\mathrm{ch4a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh3a\cdot sin2a}}{\mathrm{ch6a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh4a\cdot sin3a}}{\mathrm{ch8a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh5a\cdot sin4a}}{\mathrm{ch10a+cos2a}}+\cdot\cdot\right)$$ --<S9−11>

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a\cdot sina}}{\mathrm{ch4a+ch2a}}+\frac{\mathrm{sh3a\cdot sin2a}}{\mathrm{ch6a+ch2a}}+\frac{\mathrm{sh4a\cdot sin3a}}{\mathrm{ch8a+ch2a}}+\frac{\mathrm{sh5a\cdot sin4a}}{\mathrm{ch10a+ch2a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S9−12>

◆ π√2/4 極限公式（虚２次体 Q(√−2) ゼータ L2(1) 極限公式）

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh2a}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S10−1>

◆ (1/√2) log(1+√2) 極限公式（実２次体 Q(√2) ゼータ L1(1) 極限公式）

$$\frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+--+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch10a}}+\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch14a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S11−1>

=================================

これらの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。
π/4 式のいくつかを並べよう。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch12a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch16a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−10>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}4\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch16a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch24a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch32a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−17>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}8\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch16a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch32a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch48a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch64a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−18>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}16\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch32a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch64a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch96a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch128a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−19>

これらには美しい規則性が出ている！ そしてこの規則性はさらに無限に続き、上式は下へと延びていく。これらの式は２年前に導いた次の二変数恒等式の母等式を使い導出した。ノートにはこの①に対し“深い式”と記しているが、見るからにエネルギーに満ちた式である。

$$\frac{\sin x}{(e^{a}-1)}-\frac{\sin 3x}{3(e^{3a}-1)}+\frac{\sin 5x}{5(e^{5a}-1)}-\frac{\sin 7x}{7(e^{7a}-1)}+-\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}a}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}2a}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}3a}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}4a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ---①

実際にこの式からさまざまな公式が飛び出してくる。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●π^2/8 の二式を眺めたい。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{ch}a}\right)\cdot\cdot\right)$$ ---<S2−6>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}12a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}12a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}16a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}16a-\mathrm{ch}a}\right)\cdot\cdot\right)$$ ---<S2−8>

これはきれいであり、まるで美しいタイル模様の壁を見ているかのような印象がある。

●ζ(3) 式を並べる。ただし規則性を見るために順番を並べ替え、また色を茶色に変えた個所がある。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{a})(1+e^{-a})^3(1+e^{-3a})^5(1+e^{-5a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−18>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{0a})(1+e^{-2a})^3(1+e^{-4a})^5(1+e^{-6a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−16>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−6>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^3(1+e^{-6a})^5(1+e^{-8a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−17>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-3a})(1+e^{-5a})^3(1+e^{-7a})^5(1+e^{-9a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−19>

茶色部分は２だが、あえて上記のように表現した。これらを見て、驚くべき規則性が出ていることに気づく。右辺の大枠の形自体はまったく同じ（固定）であり、最小単位の()内だけが秩序ある形で変化している。そしてこれらが皆ζ(3)に収束する面白さ！ さらに、これが上に下に延々とこの規則で延びていくので、結局、無限個のこの形の式があるということになる。ふしぎな式たちである。

● 上記の一連のζ(3)式は次の恒等式から得たものである。これは三角関数と双曲線関数の融合域の三変数域から出た(二変数)恒等式であるが、これもまた意味深い式である。

$$\frac{\alpha\cdot \mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}^2 a}-\frac{\alpha^2\cdot \mathrm{ch}2a}{2\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{\alpha^3\cdot \mathrm{ch}3a}{3\mathrm{sh}^2 3a}-\frac{\alpha^4\cdot \mathrm{ch}4a}{4\mathrm{sh}^2 4a}+-\cdot\cdot$$
$$=2\log\left(\left(1+\alpha\cdot e^{-a}\right)\left(1+\alpha\cdot e^{-3a}\right)^3\left(1+\alpha\cdot e^{-5a}\right)^5\left(1+\alpha\cdot e^{-7a}\right)^7\cdot\cdot\right)\ \text{---＜Ｒ１＞}$$

このαをいろいろと変えロピタルの定理を用いることで、一つ上でのζ(3)式が次々と得られていく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.4.19 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)