＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その４０）＞

新種の極限公式が九つ得られたので下方に青色式で示す。それらに対しては同グループの過去の全ての式も一緒に示した。他のものは最新のもの二つずつを示した。

以降において、L(2)はL(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2$ +-・・である（カタランの定数）。
ξ(3)はξ(3)＝1 $+1/2^3+1/3^3+1/4^3$ +・・で、L(3)はL(3)＝1 $-1/3^3+1/5^3-1/7^3$ +-・・＝$\pi^3/32$ である。
$\pi/4$ はL(1)＝1 $-1/3+1/5-1/7$ +-・・＝$\pi/4$ であり、$\pi^2/6$ はξ(2) ＝1 $+1/2^2+1/3^2+1/4^2$ +・・＝$\pi^2/6$、
$\pi^2/8$ は(3/4)ξ(2) ＝1 $+1/3^2+1/5^2+1/7^2$ +・・＝$\pi^2/8$。

さらに以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a, x は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a->±0 は a をプラス側,マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left(\left(1+a^2\cdot e^{-a}\right)\left(1+a^2\cdot e^{-3a}\right)^3\left(1+a^2\cdot e^{-5a}\right)^5\left(1+a^2\cdot e^{-7a}\right)^7\cdot\cdot\right)\quad\text{--<O1-8>}$$

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot\quad\text{--<Q1>}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{---<S1>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a^2\left(\frac{2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{4}{\mathrm{ch}4a}+\frac{6}{\mathrm{ch}6a}+\frac{8}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right)\quad\text{----<S1-2>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a^2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{3}{\mathrm{ch}3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)\quad\text{----<S1-3>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{--<S1-4>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} 2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cha}{sh14a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-5>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sha}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-6>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{sha}{cha}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-7>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} a\left(th^{-1}\left(\frac{sina}{cha}\right)+3th^{-1}\left(\frac{sina}{ch3a}\right)+5th^{-1}\left(\frac{sina}{ch5a}\right)+7th^{-1}\left(\frac{sina}{ch7a}\right)+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S1-8>}$$

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} a\cdot\log\left(\frac{1}{tha\cdot th2a\cdot th3a\cdot th4a\cdots}\right) \quad \text{----<S2-1>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{tha\cdot th3a\cdot th5a\cdot th7a\cdots}\right) \quad \text{----<S2-2>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} a^2\left(\frac{2}{sh2a}+\frac{4}{sh4a}+\frac{6}{sh6a}+\frac{8}{sh8a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} a^2\left(\frac{1}{sha}+\frac{3}{sh3a}+\frac{5}{sh5a}+\frac{7}{sh7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-4>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{sh2a}+\frac{2}{sh3a}+\frac{3}{sh4a}+\frac{4}{sh5a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S2-5>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} a\cdot\log\left(\left(\frac{ch2a+cha}{ch2a-cha}\right)\left(\frac{ch6a+cha}{ch6a-cha}\right)\left(\frac{ch10a+cha}{ch10a-cha}\right)\left(\frac{ch14a+cha}{ch14a-cha}\right)\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S2-6>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to +0} \left(\frac{a}{2}\right)\log\left(\left(\frac{cha+cosa}{cha-cosa}\right)\left(\frac{ch3a+cosa}{ch3a-cosa}\right)\left(\frac{ch5a+cosa}{ch5a-cosa}\right)\left(\frac{ch7a+cosa}{ch7a-cosa}\right)\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S2-7>}$$

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式　(ζ(2)極限公式)

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to +0} a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<S3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{ch^2 a}+\frac{2^2}{ch^2 2a}+\frac{3^2}{ch^2 3a}+\frac{4^2}{ch^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−2>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a^3\left(\frac{1^2}{sh^2 a}+\frac{2^2}{sh^2 2a}+\frac{3^2}{sh^2 3a}+\frac{4^2}{sh^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−3>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−4>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−5>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−6>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^3\left(\frac{1^2}{ch^2 a}+\frac{3^2}{ch^2 3a}+\frac{5^2}{ch^2 5a}+\frac{7^2}{ch^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−7>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{sh^2 a}+\frac{3^2}{sh^2 3a}+\frac{5^2}{sh^2 5a}+\frac{7^2}{sh^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−8>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−9>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−10>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<S3−11>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(2(1+e^{-a})^2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-3a})^2(1+e^{-4a})^2\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−12>

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　（L(1)極限公式）

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} \frac{a}{2}\left(\frac{1}{cha}+\frac{1}{ch2a}+\frac{1}{ch3a}+\frac{1}{ch4a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−1>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{1}{cha}+\frac{1}{ch3a}+\frac{1}{ch5a}+\frac{1}{ch7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−2>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{2sh2a}{ch^2 2a}+\frac{4sh4a}{ch^2 4a}+\frac{6sh6a}{ch^2 6a}+\frac{8sh8a}{ch^2 8a}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{---<S4-3>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{cha}{ch2a+cha}+\frac{ch3a}{ch6a+cha}+\frac{ch5a}{ch10a+cha}+\frac{ch7a}{ch14a+cha}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{--<S4-4>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch14a}\right)+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{--<S4-5>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{sha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh7a}\right)+-\cdot\ \cdot\right) \quad \text{--<S4-6>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 4\left(\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch20a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch28a}\right)+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{--<S4-7>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{ch2a}{ch4a+cha}+\frac{ch4a}{ch8a+cha}+\frac{ch6a}{ch12a+cha}+\frac{ch8a}{ch16a+cha}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{----<S4-8>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sha}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{cosa}{sh7a}\right)+-\cdot\ \cdot\right) \quad \text{--<S4-9>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch16a}\right)+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{--<S4-10>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{sh2a}{ch4a+cos2a}+\frac{2sh3a}{ch6a+cos2a}+\frac{3sh4a}{ch8a+cos2a}+\frac{4sh5a}{ch10a+cos2a}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{---<S4-11>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{sh2a}{ch4a+1}+\frac{2sh3a}{ch6a+1}+\frac{3sh4a}{ch8a+1}+\frac{4sh5a}{ch10a+1}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{---<S4-12>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}(e^{-a})-\tan^{-1}(e^{-3a})+\tan^{-1}(e^{-5a})-\tan^{-1}(e^{-7a})+-\cdot\ \cdot\right) \quad \text{--<S4-13>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{sha}{ch^2 a}+\frac{3sh3a}{ch^2 3a}+\frac{5sh5a}{ch^2 5a}+\frac{7sh7a}{ch^2 7a}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{---<S4-14>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{sina\cdot sha}{ch2a+cos2a}+\frac{3sina\cdot sh3a}{ch6a+cos2a}+\frac{5sina\cdot sh5a}{ch10a+cos2a}+\frac{7sina\cdot sh7a}{ch14a+cos2a}+\cdot\ \cdot\right) \quad \text{---<S4-15>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(cosa\cdot\tan^{-1}(e^{-a})-cos3a\cdot\tan^{-1}(e^{-3a})+cos5a\cdot\tan^{-1}(e^{-5a})-cos7a\cdot\tan^{-1}(e^{-7a})+-\cdot\ \cdot\right) \quad \text{--<S4-16>}$$

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{1}{e^{2a}+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S5−1>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{1}{e^{3a}+1}+\frac{1}{e^{5a}+1}+\frac{1}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S5−2>

$$\log 2=\lim_{a\to\pm0} 2a^2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S5−3>

$$\log 2=\lim_{a\to\pm0} a^2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S5−4>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2a\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\mathrm{sh}5a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ---<S5−5>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} a\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}2a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S5−6>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{e^{-2a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-6a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-10a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-14a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S5−7>

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{7}\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}^2 3a\cdot\mathrm{th}^3 4a\cdot\mathrm{th}^4 5a\cdots}\right)$$ ---<S6−1>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8a^4}{9}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−2>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−3>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{16a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−4>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^{2a}+1}+\frac{2^2}{e^{4a}+1}+\frac{3^2}{e^{6a}+1}+\frac{4^2}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−5>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−6>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}4a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right)$$ ---<S6−7>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−8>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}2a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right)$$ ---<S6−9>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{4a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^a+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−10>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}a^3\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−11>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−12>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{7}\left(\mathrm{th}^{-1}(e^{-a})+3\mathrm{th}^{-1}(e^{-3a})+5\mathrm{th}^{-1}(e^{-5a})+7\mathrm{th}^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right)$$ --<S6−13>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8a^2}{7}\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S6−14>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^3-7}{\mathrm{sh}^2 7a}+\frac{9^3-9}{\mathrm{sh}^2 9a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−15>

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right)$$ -----<S7−1>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−2>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−3>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S7−4>

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1>

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2>

◆ $e^{\pi x}$ [恒等]極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1−2>

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2−2>

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2a}+\cdot\cdot\right)$$ --<S9−11>

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}2a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S9−12>

◆ $\pi\sqrt{2}/4$ 極限公式（虚 2 次体 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータ L2(1) 極限公式）

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S10−1>

◆(1/√2) log(1+√2) 極限公式（実2次体Q(√2)ゼータL1(1)極限公式）

$$\frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+--+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right)\qquad ----<S11-1>$$

================================

これら九つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。
九式を並べよう。

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad --<S1-7>$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0}a\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad --<S1-8>$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{a}{2}\right)\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}a+\cos a}{\mathrm{ch}a-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\cos a}{\mathrm{ch}3a-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\cos a}{\mathrm{ch}5a-\cos a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\cos a}{\mathrm{ch}7a-\cos a}\right)\cdot\cdot\right)\quad ---<S2-7>$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left(2(1+e^{-a})^2(1+e^{-2a})^2(1+e^{-3a})^2(1+e^{-4a})^2\cdot\cdot\right)\quad ----<S3-12>$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2a\left(\frac{\sin a\cdot\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2a}+\frac{3\sin a\cdot\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2a}+\frac{5\sin a\cdot\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2a}+\frac{7\sin a\cdot\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a+\cos 2a}+\cdot\cdot\right)\quad ---<S4-15>$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\left(\cos a\cdot\tan^{-1}(e^{-a})-\cos 3a\cdot\tan^{-1}(e^{-3a})+\cos 5a\cdot\tan^{-1}(e^{-5a})-\cos 7a\cdot\tan^{-1}(e^{-7a})+-\cdot\cdot\right)--<S4-16>$$

$$\log 2=\lim_{a\to+0}2a\left(\frac{e^{-2a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-6a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-10a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{e^{-14a}+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right)\quad ---<S5-7>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm 0}\frac{4a^4}{3}\left(\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^3-7}{\mathrm{sh}^2 7a}+\frac{9^3-9}{\mathrm{sh}^2 9a}+\cdot\cdot\right)\quad ---<S6-15>$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad --<S7-4>$$

これらは三角関数と双曲線関数の融合域における三変数域から出たものと、その二変数域から出たものが混在している。上記式はどれも興味ある形をしている。

二変数域は巨大だが、三変数域はそれよりはるかに大きくその広さなどまったくわからない。三変数域は広大無辺である。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●＜Ｓ１－７＞と＜Ｓ１－８＞を並べよう。

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} a\left(\tan^{-1}\left(\frac{sha}{cha}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{sha}{ch7a}\right)+\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-7>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm 0} a\left(th^{-1}\left(\frac{sina}{cha}\right)+3th^{-1}\left(\frac{sina}{ch3a}\right)+5th^{-1}\left(\frac{sina}{ch5a}\right)+7th^{-1}\left(\frac{sina}{ch7a}\right)+\cdot\cdot\right) \text{ --<S1-8>}$$

これらは双対的な関係になっていて面白い！このような形は深いなにかを暗示しているような気がする。両式とも三変数域から出てきている。

● Ｍさんは、極限公式に対して「ζ（３）の多種類の極限公式が得られてあたかもプリズムのように多面的な光を散乱しているさまを見ているような気がしました。」と言われた。本当にそんな感じがする。

公式たちを見ていると、キラキラと光が反射してまぶしくクラクラとしてくる。万華鏡の世界に入り込んだような感覚がある。

●「数学のたのしみ」という雑誌がある（あった）。それは 1997 年にはじまり 2008 年に終わった雑誌である。毎号、特定のテーマが取り上げられ解説されたものであった。主に一般読者が対象の雑誌であったがレベルも高く分からないことが多く書かれていたが、その雑誌はほぼ全部買っていた。先日、２号刊(1997 年)を取り出して眺めていると「q 解析学のルネサンス」というテーマ記事が目に留まった。そこには興味ある式が多数載っている。

オイラーの五角数定理、ヤコビの三重積公式、ロジャース-ラマヌジャン恒等式などなど。

それらをながめていて、q 解析の地底湖と三角関数と双曲線関数の融合域の地底湖は細い水路でつながっているような気がする。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.4.12 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)