＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その３９）＞

　新種の極限公式が三つ得られたので下方に青色式で示す。それらに対しては同グループの過去の全ての式も一緒に示した。他のものは最新のもの二つずつを提示した。

以降において、L(2)はL(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2$ +−・・である（カタランの定数）。
　ζ(3)はζ(3)＝1 $+1/2^3+1/3^3+1/4^3$ +・・で、L(3)はL(3)＝1 $-1/3^3+1/5^3-1/7^3$ +−・・＝$\pi^3/32$ である。
π/4 はL(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +−・・＝π/4 であり、$\pi^2/6$ はζ(2) ＝1 $+1/2^2+1/3^2+1/4^2$ +・・＝$\pi^2/6$、
$\pi^2/8$ は(3/4)ζ(2) ＝1 $+1/3^2+1/5^2+1/7^2$ +・・＝$\pi^2/8$。

　さらに以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a, x は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

　なお、lim での a−>+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a−>±0 は a をプラス側,マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である。
＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left((1+a^2\cdot e^{-a})(1+a^2\cdot e^{-3a})^3(1+a^2\cdot e^{-5a})^5(1+a^2\cdot e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)\quad\text{--＜O1−8＞}$$

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot\quad\text{--＜Q1＞}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}14a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{--＜S1−5＞}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{--＜S1−6＞}$$

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{3}{\mathrm{sh}4a}+\frac{4}{\mathrm{sh}5a}+\cdot\cdot\right)\quad\text{----＜S2−5＞}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{ch}a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{ch}a}\right)\cdot\cdot\right)$$ ---<S2−6>

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−10>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<S3−11>

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−1>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}5a}+\frac{1}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−2>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−3>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−4>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}14a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−5>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+-\cdot\cdot\right)$$ --<S4−6>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 4\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}20a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}28a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−7>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}6a}{\mathrm{ch}12a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}8a}{\mathrm{ch}16a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−8>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}7a}\right)+-\cdot\cdot\right)$$ --<S4−9>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}16a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−10>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2a}+\frac{2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2a}+\frac{3\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2a}+\frac{4\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−11>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+1}+\frac{2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+1}+\frac{3\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+1}+\frac{4\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+1}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−12>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}(e^{-a})-\tan^{-1}(e^{-3a})+\tan^{-1}(e^{-5a})-\tan^{-1}(e^{-7a})+-\cdot\cdot\right)$$ --<S4−13>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}^2a}+\frac{3\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{5\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}^2 5a}+\frac{7\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−14>

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2a\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\mathrm{sh}5a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ---<S5−5>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} a\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}2a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S5−6>

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{7}\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}^2 3a\cdot\mathrm{th}^3 4a\cdot\mathrm{th}^4 5a\cdots}\right)$$ ---<S6−1>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8a^4}{9}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−2>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−3>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{16a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−4>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^{2a}+1}+\frac{2^2}{e^{4a}+1}+\frac{3^2}{e^{6a}+1}+\frac{4^2}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−5>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−6>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} 4a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right) \qquad \text{---}<\text{S6}-7>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right) \qquad \text{---}<\text{S6}-8>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} 2a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right) \qquad \text{---}<\text{S6}-9>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{4a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^a+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----}<\text{S6}-10>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} a^3\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----}<\text{S6}-11>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----}<\text{S6}-12>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{7}\left(\mathrm{th}^{-1}(e^{-a})+3\mathrm{th}^{-1}(e^{-3a})+5\mathrm{th}^{-1}(e^{-5a})+7\mathrm{th}^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--}<\text{S6}-13>$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8a^2}{7}\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}\right)+3\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}3a}\right)+5\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}5a}\right)+7\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--}<\text{S6}-14>$$

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{-----}<\text{S7}-1>$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--}<\text{S7}-2>$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--}<\text{S7}-3>$$

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S8-1>}$$

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot \quad \text{--<S8-2>}$$

◆ $e^{\pi x}$ [恒等] 極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<S8-1-2>}$$

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot \quad \text{--<S8-2-2>}$$

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<S9-11>}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}2a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S9-12>}$$

◆ π√2/4 極限公式（虚 2 次体 Q(√-2) ゼータ L2(1) 極限公式）

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S10-1>}$$

◆ (1/√2) log(1+√2) 極限公式（実 2 次体 Q(√2) ゼータ L1(1) 極限公式）

$$\frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+--+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{----<S11-1>}$$

==============================

これら三つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。

三式を並べよう。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{sha}{ch^2a}+\frac{3sh3a}{ch^2 3a}+\frac{5sh5a}{ch^2 5a}+\frac{7sh7a}{ch^2 7a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ---<S4−14>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8a^2}{7}\left(th^{-1}\left(\frac{1}{cha}\right)+3th^{-1}\left(\frac{1}{ch3a}\right)+5th^{-1}\left(\frac{1}{ch5a}\right)+7th^{-1}\left(\frac{1}{ch7a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$ --<S6−14>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{sha}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh7a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$ --<S7−3>

　これらはいずれもきれいである。眺めるほどにふしぎを感じてしまう。
簡明さでは＜Ｓ４－１４＞が一番であろうか。とんでもなくきれいである。＜Ｓ６－１４＞と＜Ｓ７－３＞の関係は対称的な感じであり、なにかを暗示させるようで面白い。前に述べたが、＜Ｓ６－１４＞に見える 8/7 の係数は、ζ(3) を交代級数の形にすれば消え、まったく気にすることはない。ゼータの世界はどこまでもきれいである。
＜Ｓ６－１４＞は、公式集にある $2th^{-1}(b/a)=\log\{(a+b)/(a-b)\}$（ただし $|b/a|<1$）という公式を使って、log(無限積)の形に変形することもできる。しかしその形では Wolfram Alpha での検証が難しく、よって今回の形とした。

　最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●＜Ｓ７－２＞と＜Ｓ７－３＞を並べよう。

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\ \cdot\right)$$ --<S7−2>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{sha}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{1}{sh7a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$ --<S7−3>

　極限公式の世界を探索しつづけていると、このような２倍の関係性（上では 2a^2(～)と a^2(～)）のあるペアの式がここかしこに現れる。例えば下記などもそうである。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\frac{a}{2}\left(\frac{1}{cha}+\frac{1}{ch2a}+\frac{1}{ch3a}+\frac{1}{ch4a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S4−1>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{1}{cha}+\frac{1}{ch3a}+\frac{1}{ch5a}+\frac{1}{ch7a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S4−2>

　まだほかにもいろいろあり、読者自ら見つけていただきたい。まだよくわかっていないが、これらはなにかの法則の現れだと思う。

●π^3/32 極限公式を並べよう。

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ------＜S7－1＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\ \cdot\right)$$ --＜S7－2＞

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)+3\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+5\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)+7\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\ \cdot\right)$$ --＜S7－3＞

π^3/32 極限公式（つまりL(3)極限公式）はまだこれだけしか得られていない。たぶんπ^3/32 式は他にもたくさんあるはずで、まだ見つけられていないだけという気がする。

数学は化石の探索作業に似ている。地表面に露出している化石（公式）は簡単にわかるが、地中とか岩と岩の境目にあるものとか発見が困難なものも多い。今回の＜Ｓ７－３＞も、地下深くにある三変数域の世界に行ってはじめて分かった。

数学ということに関しては、次の岡潔の意見もある・・

●数学者の故・岡潔は数学の作業というのは百姓の作業に似ているという意味を述べたことがある。たしかにそれも当たっている。種をまいて畑を整備し道具を準備してはじめてよい結果（収穫）が得られるから。

私としては三角関数と双曲線関数の融合域を探索する前に、ゼータの香りの漂う・・（その３０７）で示した道具（フーリエ級数、深フーリエ級数）を準備する必要があった。（フーリエ級数の表現を使っているが、じつはそれらは恒等式である。x に制限を加えているが、じつは x は任意の実数である）。これらの準備に１年ほどかかった。面倒な冗長な作業が長く続いたが、それらの道具が出そろったときから公式がたくさん出始めた。

そのような行為は、別に百姓ということにかぎらず、我々の日常の仕事や行為と同じである。なにかを創造するためには、まず道具を準備する必要があるのであり、それは百姓に限ったことではない。また道具も自作の安価な道具で十分。最新鋭の高価な（最先端の難解な）ものなど不要である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.4.5 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)