＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その３８）＞

新種の極限公式が七つ得られたので下方に青色式で示す。それらに対しては同グループの過去の全ての式も一緒に示した。他のものは最新のもの二つずつを提示した。

なお、前回述べたように調整因子で sha や sina や(e^a-1)は単に a で置き換えても OK であるので（(cha-1)は $a^2/2$ に置き換えて OK)、全ての式記号はそのままにして置き換えたのでその点了解いただきたい。例えば、次式でこれまで上側式で表現していたものを下側式に置き換えた。これらはどちらも正しい式だが、下側式の方がより簡明なのでそちらを採用したという意味である。

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-8>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S3-8>}$$

以降において、L(2)はL(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2$ +−・・である（カタランの定数）。

ζ(3)はζ(3)＝1 $+1/2^3+1/3^3+1/4^3$ +・・で、L(3)はL(3)＝1 $-1/3^3+1/5^3-1/7^3$ +−・・＝$\pi^3/32$ である。$\pi/4$ はL(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +−・・＝$\pi/4$ であり、$\pi^2/6$ はζ(2) ＝1 $+1/2^2+1/3^2+1/4^2$ +・・＝$\pi^2/6$、$\pi^2/8$ は(3/4)ζ(2) ＝1 $+1/3^2+1/5^2+1/7^2$ +・・＝$\pi^2/8$。

さらに以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a, x は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a->±0 は a をプラス側,マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である。

＝＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---<N1-2>}$$

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdot\cdot \quad \text{---<P1-4>}$$

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot \quad \text{---<R2>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to\pm0} a\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a+cos2a}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{--<O1-1>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a+\cos a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<01−2>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{e^{a}}{2(\mathrm{ch}a+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch}3a+\cos a)}{e^{3a}}\right)\left(\frac{e^{5a}}{2(\mathrm{ch}5a+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch}7a+\cos a)}{e^{7a}}\right)\cdot\cdot$$ --<01−3>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left(\frac{1}{(1-a\cdot e^{-a})(1-a\cdot e^{-3a})(1-a\cdot e^{-5a})(1-a\cdot e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ---<01−4>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left((1+a\cdot e^{-a})(1+a\cdot e^{-3a})(1+a\cdot e^{-5a})(1+a\cdot e^{-7a})\cdot\cdot\right)$$ --<01−5>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left((1+a\cdot e^{-a})(1+a\cdot e^{-3a})^{3}(1+a\cdot e^{-5a})^{5}(1+a\cdot e^{-7a})^{7}\cdot\cdot\right)$$ --<01−6>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-a\cdot e^{-a})(1-a\cdot e^{-3a})^{3}(1-a\cdot e^{-5a})^{5}(1-a\cdot e^{-7a})^{7}\cdot\cdot}\right)$$ ---<01−7>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left((1+a^{2}\cdot e^{-a})(1+a^{2}\cdot e^{-3a})^{3}(1+a^{2}\cdot e^{-5a})^{5}(1+a^{2}\cdot e^{-7a})^{7}\cdot\cdot\right)$$ --<01−8>

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot$$ --<Q1>

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}14a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−5>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−6>

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^{2}}{8}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}4a\cdots}\right)$$ ----<S2−1>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{tha}\cdot\mathrm{th3a}\cdot\mathrm{th5a}\cdot\mathrm{th7a}\cdots}\right) \qquad \text{----<S2-2>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{2}{\mathrm{sh2a}}+\frac{4}{\mathrm{sh4a}}+\frac{6}{\mathrm{sh6a}}+\frac{8}{\mathrm{sh8a}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S2-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S2-4>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{sh2a}}+\frac{2}{\mathrm{sh3a}}+\frac{3}{\mathrm{sh4a}}+\frac{4}{\mathrm{sh5a}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S2-5>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch2a+cha}}{\mathrm{ch2a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch6a+cha}}{\mathrm{ch6a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch10a+cha}}{\mathrm{ch10a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch14a+cha}}{\mathrm{ch14a-cha}}\right)\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<S2-6>}$$

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ (2) 極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-2a})(1-e^{-3a})(1-e^{-4a})\cdot\cdot}\right) \qquad \text{----<S3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch^2a}}+\frac{2^2}{\mathrm{ch^22a}}+\frac{3^2}{\mathrm{ch^23a}}+\frac{4^2}{\mathrm{ch^24a}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<S3-2>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh^2a}}+\frac{2^2}{\mathrm{sh^22a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{4^2}{\mathrm{sh^24a}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<S3-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{5}{e^{5a}+1}+\frac{7}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S3-4>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^a-1}+\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}+\frac{7}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S3-5>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^2\left(\frac{1}{e^{2a}-1}+\frac{2}{e^{4a}-1}+\frac{3}{e^{6a}-1}+\frac{4}{e^{8a}-1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S3-6>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch^2a}}+\frac{3^2}{\mathrm{ch^23a}}+\frac{5^2}{\mathrm{ch^25a}}+\frac{7^2}{\mathrm{ch^27a}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<S3-7>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh^2a}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh^23a}}+\frac{5^2}{\mathrm{sh^25a}}+\frac{7^2}{\mathrm{sh^27a}}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<S3-8>}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a^2\left(\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−9>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 4a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−10>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0} 2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<S3−11>

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\frac{a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−1>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}5a}+\frac{1}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−2>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−3>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−4>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}14a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−5>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+-\cdot\cdot\right)$$ --<S4−6>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 4\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}20a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}28a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−7>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2a\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}6a}{\mathrm{ch}12a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}8a}{\mathrm{ch}16a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−8>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}7a}\right)+-\cdot\cdot\right)$$ --<S4−9>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}16a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S4−10>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2a}+\frac{2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2a}+\frac{3\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2a}+\frac{4\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−11>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} a^2\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+1}+\frac{2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+1}+\frac{3\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+1}+\frac{4\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+1}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−12>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} 2\left(\tan^{-1}(e^{-a})-\tan^{-1}(e^{-3a})+\tan^{-1}(e^{-5a})-\tan^{-1}(e^{-7a})+-\cdot\cdot\right)$$ --<S4−13>

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\to+0} 2a\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\mathrm{sh}5a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ---<S5−5>

$$\log 2=\lim_{a\to+0} a\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}2a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S5−6>

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{7}\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}^2 3a\cdot\mathrm{th}^3 4a\cdot\mathrm{th}^4 5a\cdots}\right)$$ ---<S6−1>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8a^4}{9}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−2>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2a^4}{3}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−3>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{16a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−4>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^{2a}+1}+\frac{2^2}{e^{4a}+1}+\frac{3^2}{e^{6a}+1}+\frac{4^2}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−5>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−6>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} 4a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right)$$ ---<S6−7>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−8>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0} 2a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right)$$ ---<S6−9>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{4a^3}{3}\left(\frac{1^2}{e^a+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S6−10>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}a^3\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S6−11>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4a^3}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\ \cdot\right)$$ ----<S6−12>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{7}\left(\mathrm{th}^{-1}(e^{-a})+3\mathrm{th}^{-1}(e^{-3a})+5\mathrm{th}^{-1}(e^{-5a})+7\mathrm{th}^{-1}(e^{-7a})+\cdot\ \cdot\right)$$ --<S6−13>

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\ \cdot\right)$$ -----<S7−1>

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\ \cdot\right)$$ --<S7−2>

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\ \cdot$$ --<S8−1>

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\ \cdot$$ --<S8−2>

◆ $e^{\pi x}$[恒等]極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\ \cdot$$ --<S8−1−2>

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\ \cdot$$ --<S8−2−2>

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{sh2a\cdot sina}}{\mathrm{ch4a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh3a\cdot sin2a}}{\mathrm{ch6a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh4a\cdot sin3a}}{\mathrm{ch8a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh5a\cdot sin4a}}{\mathrm{ch10a+cos2a}}+\cdot\cdot\right)$$ --<S9−11>

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a\cdot sina}}{\mathrm{ch4a+ch2a}}+\frac{\mathrm{sh3a\cdot sin2a}}{\mathrm{ch6a+ch2a}}+\frac{\mathrm{sh4a\cdot sin3a}}{\mathrm{ch8a+ch2a}}+\frac{\mathrm{sh5a\cdot sin4a}}{\mathrm{ch10a+ch2a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S9−12>

◆π√2/4 極限公式（虚 2 次体 Q(√−2) ゼータ L2(1) 極限公式）

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh2a}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S10−1>

◆(1/√2) log(1+√2) 極限公式（実 2 次体 Q(√2) ゼータ L1(1) 極限公式）

$$\frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+--+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch10a}}+\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch14a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S11−1>

===============================

これら七つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。
七式を並べよう。

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left((1+a^2\cdot e^{-a})(1+a^2\cdot e^{-3a})^3(1+a^2\cdot e^{-5a})^5(1+a^2\cdot e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$ --<O1−8>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left(\left(\frac{\mathrm{ch2a+cha}}{\mathrm{ch2a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch6a+cha}}{\mathrm{ch6a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch10a+cha}}{\mathrm{ch10a-cha}}\right)\left(\frac{\mathrm{ch14a+cha}}{\mathrm{ch14a-cha}}\right)\cdot\cdot\right)$$ ---<S2−6>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4a\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−10>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})(1-e^{-5a})(1-e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<S3−11>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\left(\tan^{-1}(e^{-a})-\tan^{-1}(e^{-3a})+\tan^{-1}(e^{-5a})-\tan^{-1}(e^{-7a})+-\cdot\cdot\right)$$ --<S4−13>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16a^2}{7}\left(\mathrm{th}^{-1}(e^{-a})+3\mathrm{th}^{-1}(e^{-3a})+5\mathrm{th}^{-1}(e^{-5a})+7\mathrm{th}^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right)\quad\text{--<S6-13>}$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right)\quad\text{--<S7-2>}$$

いずれも興味深い形をしている。独断と偏見で一つを選ぶとしたら、＜Ｓ２－６＞であろうか。しかし人によって意見は割れることだろう。その＜Ｓ２－６＞は[th^{-1}()の無限和]の形に書き換えることもできる。それは公式集にある $2\mathrm{th}^{-1}(b/a)=\log\{(a+b)/(a-b)\}$ （ただし$|b/a|<1$）という公式を使えばできる。

また＜Ｓ６－１３＞はその逆方向の類似の変形を行うことができる。

ところで冒頭でも述べた通り調整因子が a^n で表現できるようになったので、式がとてもすっきりした。これまでの繰り返しになるが、例えば下記＜Ｓ７－２＞では、赤の a^2 が調整因子、緑の 2(～)が中心因子である。本質的に重要な部分は緑の中心因子 2(～)に集約されている。調整因子は単なる大きさの調整役にすぎない。

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right)\quad\text{--<S7-2>}$$

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● $\pi^3/32$ 極限公式（L(3)極限公式）の二つを並べよう。

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^3\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right)\qquad\text{-----<S7-1>}$$

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2a^2\left(\tan^{-1}(e^{-a})+3\tan^{-1}(e^{-3a})+5\tan^{-1}(e^{-5a})+7\tan^{-1}(e^{-7a})+\cdot\cdot\right)\quad\text{--<S7-2>}$$

長い間、$\pi^3/32$ 極限公式は＜Ｓ７－１＞一つだけであったが、今回ようやく＜Ｓ７－２＞を加えることができた。上記二式は似ても似つかぬが、どちらも$\pi^3/32$ に収束する。これらは、a が 0 に近い値であればあるほど無限和は$\pi^3/32$ に近づく（収束する）ことを表している。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.3.31 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)

・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)