＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その３７）＞

新種の極限公式が六つ得られたので下方に青色式で示す。今回は1/2とζ(3)の極限公式が得られた。
それらに対しては同グループの過去の全ての式も一緒に示した。他のものは最新のもの二つずつを提示した（ただし$\pi^3/32$（L(3)）極限公式は一つのみ）。

以降において、L(2)はL(2)＝$1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots$である（カタランの定数）。
ζ(3)はζ(3)＝$1+1/2^3+1/3^3+1/4^3+\cdots$で、L(3)はL(3)＝$1-1/3^3+1/5^3-1/7^3+-\cdots=\pi^3/32$である。
$\pi/4$はL(1)＝$1-1/3+1/5-1/7+-\cdots=\pi/4$であり、$\pi^2/6$はζ(2)＝$1+1/2^2+1/3^2+1/4^2+\cdots=\pi^2/6$、$\pi^2/8$は(3/4)ζ(2)＝$1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$。

さらに以下では、双曲線関数sinh, cosh, tanhはそれぞれsh, ch, thと略記した。例えば、sh2aはsinh(2a)のことである。a, xは任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1}はそれぞれarctan,arctanhである。logは自然対数、eは自然対数の底。sin, cos, tanは通常の表記である。

なお、limでのa->+0はaをプラス側から0に近づける意味であり、a->±0はaをプラス側,マイナス側どちらから0に近づけてもＯＫの意味である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdots \quad \text{---<N1-2>}$$

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdots \quad \text{---<P1-4>}$$

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdots \quad \text{---<R2>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to\pm0}\sin a\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\cos 2a}+\cdots\right) \quad \text{--<O1-1>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\frac{\sin a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{cha}+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch3a}+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\cos a}+\cdots\right) \quad \text{---<O1-2>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{e^{a}}{2(\mathrm{cha}+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch3a}+\cos a)}{e^{3a}}\right)\left(\frac{e^{5a}}{2(\mathrm{ch5a}+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch7a}+\cos a)}{e^{7a}}\right)\cdots \quad \text{--<O1-3>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left(\frac{1}{(1-a\cdot e^{-a})(1-a\cdot e^{-3a})(1-a\cdot e^{-5a})(1-a\cdot e^{-7a})\cdot\cdot}\right)$$ ---<01-4>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left((1+a\cdot e^{-a})(1+a\cdot e^{-3a})(1+a\cdot e^{-5a})(1+a\cdot e^{-7a})\cdot\cdot\right)$$ --<01-5>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left((1+a\cdot e^{-a})(1+a\cdot e^{-3a})^{3}(1+a\cdot e^{-5a})^{5}(1+a\cdot e^{-7a})^{7}\cdot\cdot\right)$$ --<01-6>

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-a\cdot e^{-a})(1-a\cdot e^{-3a})^{3}(1-a\cdot e^{-5a})^{5}(1-a\cdot e^{-7a})^{7}\cdot\cdot}\right)$$ ---<01-7>

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot$$ --<Q1>

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2\mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}14a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1-5>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1-6>

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}+\frac{3}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2-4>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\frac{\mathrm{sh}^2a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{3}{\mathrm{sh}4a}+\frac{4}{\mathrm{sh}5a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2-5>

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3-8>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4(\mathrm{ch}a-1)\left(\frac{1}{e^{a}+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−9>

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\sin^2 a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2a}+\frac{2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2a}+\frac{3\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2a}+\frac{4\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−11>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2 a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+1}+\frac{2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+1}+\frac{3\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+1}+\frac{4\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+1}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−12>

◆log2 極限公式

$$\log 2=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}a\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\mathrm{sh}5a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ---<S5−5>

$$\log 2=\lim_{a\to+0}(e^{a}-1)\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}2a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S5−6>

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16(e^{a}-1)^2}{7}\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}^2 3a\cdot\mathrm{th}^3 4a\cdot\mathrm{th}^4 5a\cdots}\right)$$ ---<S6−1>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{8\mathrm{sh}^4 a}{9}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{ch}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−2>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{2\mathrm{sh}^4 a}{3}\left(\frac{2^3-2}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3^3-3}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4^3-4}{\mathrm{sh}^2 4a}+\frac{5^3-5}{\mathrm{sh}^2 5a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−3>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{16\mathrm{sh}^3 a}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{sh}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−4>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16\mathrm{sh}^3 a}{3}\left(\frac{1^2}{e^{2a}+1}+\frac{2^2}{e^{4a}+1}+\frac{3^2}{e^{6a}+1}+\frac{4^2}{e^{8a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−5>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8\mathrm{sh}^2 a}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$ ---<S6−6>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$
---<S6−6A>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}4\mathrm{sh}^2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-2a})(1-e^{-4a})^2(1-e^{-6a})^3(1-e^{-8a})^4\cdot\cdot}\right)$$
---<S6−7>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{16\mathrm{sh}^2a}{3}\log\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})^2(1+e^{-6a})^3(1+e^{-8a})^4\cdot\cdot\right)$$
---<S6−8>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right)$$
---<S6−9>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}2a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right)$$
---<S6−9A>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{4\mathrm{sh}^3a}{3}\left(\frac{1^2}{e^a+1}+\frac{3^2}{e^{3a}+1}+\frac{5^2}{e^{5a}+1}+\frac{7^2}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$
----<S6−10>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$
----<S6−11>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4\mathrm{sh}^3a}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right)$$
----<S6−12>

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right)$$
---<S7−1>

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot$$
--<S8−1>

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot$$
--<S8−2>

◆ $e^{\pi x}$［恒等］極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin ax}{\mathrm{cha}-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch2a}+\sin ax}{\mathrm{ch2a}-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\sin ax}{\mathrm{ch3a}-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch4a}+\sin ax}{\mathrm{ch4a}-\sin ax}\right)\cdot\cdot$$ --＜S8－1－2＞

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin ax}{\mathrm{cha}-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\sin ax}{\mathrm{ch3a}-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch5a}+\sin ax}{\mathrm{ch5a}-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch7a}+\sin ax}{\mathrm{ch7a}-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot$$ --＜S8－2－2＞

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$
$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{sh2a\cdot sina}}{\mathrm{ch4a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh3a\cdot sin2a}}{\mathrm{ch6a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh4a\cdot sin3a}}{\mathrm{ch8a+cos2a}}+\frac{\mathrm{sh5a\cdot sin4a}}{\mathrm{ch10a+cos2a}}+\cdot\cdot\right)$$ --＜S9－11＞

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$
$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh2a\cdot sina}}{\mathrm{ch4a+ch2a}}+\frac{\mathrm{sh3a\cdot sin2a}}{\mathrm{ch6a+ch2a}}+\frac{\mathrm{sh4a\cdot sin3a}}{\mathrm{ch8a+ch2a}}+\frac{\mathrm{sh5a\cdot sin4a}}{\mathrm{ch10a+ch2a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S9－12＞

◆π√￣2/4 極限公式（虚 2 次体 Q(√￣-2)ゼータ L2(1)極限公式）

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$
$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh2a}\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S10－1＞

◆(1/√￣2) log(1+√￣2)極限公式（実 2 次体 Q(√￣2)ゼータ L1(1)極限公式）

$$\frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+--+\cdot\cdot$$
$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{2sha}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch10a}}+\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch14a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S11－1＞

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら六つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。

1/2 極限公式の四式を並べたい。

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left(\frac{1}{(1-a\cdot e^{-a})(1-a\cdot e^{-3a})(1-a\cdot e^{-5a})(1-a\cdot e^{-7a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<01-4>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\log\left((1+a\cdot e^{-a})(1+a\cdot e^{-3a})(1+a\cdot e^{-5a})(1+a\cdot e^{-7a})\cdot\cdot\right) \quad \text{--<01-5>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left((1+a\cdot e^{-a})(1+a\cdot e^{-3a})^3(1+a\cdot e^{-5a})^5(1+a\cdot e^{-7a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{--<01-6>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-a\cdot e^{-a})(1-a\cdot e^{-3a})^3(1-a\cdot e^{-5a})^5(1-a\cdot e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<01-7>}$$

これらは眺めていると摩訶不思議な感覚にとらわれる。それはテータ関数の類似物のようなものがなにかをなそうとして、その結果 1/2 になったように見える。

さて、＜０１―６＞や＜０１―７＞は log に対して a が掛かっている。この a はこれまで sha や(e^a−1)としていたものと同類の調整因子である。sha や(e^a−1)でなくとも、a でも OK であることがだんだんわかってきたので、今回から a を掛けている。これら、a や sha や sh^2a や(e^a−1)など本体式の外にかかるこれらの因子を、私は先にこの稿で調整因子と名付けた。それ以外の本体部分を中心因子と名付けた。

すなわち、下式では赤の a が調整因子であり、青色部分が中心因子である。

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-a\cdot e^{-a})(1-a\cdot e^{-3a})^3(1-a\cdot e^{-5a})^5(1-a\cdot e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<01-7>}$$

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●以下の 4 式を眺めよう。

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8sh^2a}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-6>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---<S6-6A>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}2sh^2a\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<S6-9>}$$

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}2a^2\cdot\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})(1-e^{-3a})^3(1-e^{-5a})^5(1-e^{-7a})^7\cdot\cdot}\right) \quad \text{---<S6-9A>}$$

先に 1/2 極限公式で述べたことがここでも当てはまる。sha は a で置き換えてもＯＫなのである。青色式はとてもシンプルである。上記の４式はいずれも正しい式である。

これら極限公式は将来、超越数論や無理数論に役立つかもしれないと思っていて、その場合＜Ｓ６－６Ａ＞や＜Ｓ６－９Ａ＞のよりシンプルな形は有用に違いない。

上式はすべて論理的に証明して出した式であるが、論理ではそうなっても直感的には把握しづらい式であり右辺がζ(3)に収束するというのがふしぎでならない。

● ここで＜Ｓ６－６Ａ＞を調整因子、中心因子の視点から見たい。

$$\zeta(3) = \lim_{a\to+0}\frac{8a^2}{3}\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right) \quad \text{---＜S6−6A＞}$$

a^2 が調整因子であり、(8/3) log(～)が中心因子となる。

数学の本質は中心因子に集約されている。調整因子など単なる大きさの調整役にすぎない。

●＜Ｓ６－６＞や＜Ｓ６－６Ａ＞の右辺には 8/3 があり綺麗な感じがしない。しかしゼータの本心は次の形なのである。＜Ｓ６－６Ａ＞では次となる。

$$\left(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+-\cdot\cdot\right)/2 = \lim_{a\to+0} a^2\cdot\log\left((1+e^{-a})(1+e^{-3a})^3(1+e^{-5a})^5(1+e^{-7a})^7\cdot\cdot\right)$$

このように交代級数ではいつも美しい形になる。左辺は 3ζ(3)/8 であるから、ζ(3)＝として右辺に 8/3 が出てきたというわけである。ゼータの世界はいつも美しいのである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.3.22 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)