＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その３６）＞

新種の極限公式が七つ得られたので下方に青色式で示す。今回はπ/4 とπ^2/8 極限公式とゼータ香り式と、さらにL(χ,s)の実 2 次体 Q(√2)ゼータ L1(s)の s＝1 の L1(1)極限公式が得られた。

それらに対しては同グループの過去の式も一緒に示した。他のものは最新のもの二つずつを提示した（ただしπ^3/32（L(3)）極限公式は一つのみ)。

実 2 次体 Q(√2)に対応したゼータの L1(s)は、ディリクレのＬ関数Ｌ(χ,s)の特別な場合である。

ディリクレのＬ関数Ｌ(χ,s)は

L(χ,s)＝χ(1)/1^s ＋ χ(2)/2^s ＋ χ(3)/3^s ＋ χ(4)/4^s ＋ χ(5)/5^s ＋ χ(6)/6^s ＋ ・・

で定義される一般的なゼータである。

L1(s)は「a≡1 or 7 mod 8-->χ(a)＝1、 a≡3 or 5 mod 8 -->χ(a)＝-1、それ以外の a ではχ(a)＝0」というディリクレ指標χ(a)をもつ。

L1(s)は実２次体 Q(√2)に対応するゼータ関数である。私は“実 2 次体 Q(√2)ゼータ”と呼んでいる。

ところで“L1(s)”は私独自の記法である。L1(1)は、具体的には

L1(s)＝1 -1/3^s -1/5^s +1/7^s +1/9^s -1/11^s -1/13^s +1/15^s +--+・・

の s＝1 の次式となる。

L1(1)＝1 -1/3 -1/5 +1/7 +1/9 -1/11 -1/13 +1/15 +--+・・＝(1/√2)log(1+√2)

以降において、Ｌ(2)はＬ(2)＝1 -1/3^2 +1/5^2 -1/7^2 +-・・である（カタランの定数）。

ζ(3)はζ(3)＝1 +1/2^3 +1/3^3 +1/4^3 +・・で、Ｌ(3)はＬ(3)＝1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 +-・・＝π^3/32 である。π/4 はＬ(1)＝1 -1/3 +1/5 -1/7 +-・・＝π/4 であり、π^2/6 はζ(2) ＝1 +1/2^2 +1/3^2 +1/4^2 +・・＝π^2/6、π^2/8 は(3/4)ζ(2) ＝1 +1/3^2 +1/5^2 +1/7^2 +・・＝π^2/8。

さらに以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a, x は任意の実数である。tan^{-1}, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a->±0 は a をプラス側,マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である。

＝＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{e^{a}}{2(\mathrm{ch}a+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch}3a+\cos a)}{e^{3a}}\right)\left(\frac{e^{5a}}{2(\mathrm{ch}5a+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch}7a+\cos a)}{e^{7a}}\right)\cdot\cdot \quad \text{--<O1-3>}$$

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot \quad \text{--<Q1>}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} 2\mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}14a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−5>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0} \mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−6>

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}2a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}4a\cdots}\right)$$ ----<S2−1>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\cdot\log\left(\frac{1}{\mathrm{th}a\cdot\mathrm{th}3a\cdot\mathrm{th}5a\cdot\mathrm{th}7a\cdots}\right)$$ ----<S2−2>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2−3>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}+\frac{3}{\mathrm{sh}3a}+\frac{5}{\mathrm{sh}5a}+\frac{7}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2−4>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\frac{\mathrm{sh}^2a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{3}{\mathrm{sh}4a}+\frac{4}{\mathrm{sh}5a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2−5>

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S3−8>

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4(\mathrm{ch}a-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S3−9>

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\frac{(e^a-1)}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−1>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a}+\frac{1}{\mathrm{ch}5a}+\frac{1}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S4−2>

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{4\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\frac{6\mathrm{sh}6a}{\mathrm{ch}^2 6a}+\frac{8\mathrm{sh}8a}{\mathrm{ch}^2 8a}+\cdot\ \cdot\right)\qquad \text{---<S4-3>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\ \cdot\right)\qquad \text{--<S4-4>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}14a}\right)+\cdot\ \cdot\right)\quad \text{--<S4-5>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+-\cdot\ \cdot\right)\qquad \text{--<S4-6>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}4\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}20a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}28a}\right)+\cdot\ \cdot\right)\quad \text{--<S4-7>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}6a}{\mathrm{ch}12a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}8a}{\mathrm{ch}16a+\mathrm{ch}a}+\cdot\ \cdot\right)\qquad \text{----<S4-8>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cos}a}{\mathrm{sh}a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cos}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cos}a}{\mathrm{sh}5a}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cos}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+-\cdot\ \cdot\right)\qquad \text{--<S4-9>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}4a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}8a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}12a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}16a}\right)+\cdot\ \cdot\right)\quad \text{--<S4-10>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\sin^2a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+\cos2a}+\frac{2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos2a}+\frac{3\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+\cos2a}+\frac{4\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+\cos2a}+\cdot\ \cdot\right)\qquad \text{---<S4-11>}$$

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+1}+\frac{2\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+1}+\frac{3\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+1}+\frac{4\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+1}+\cdot\ \cdot\right)\qquad \text{---<S4-12>}$$

◆log2 極限公式

$$\log2=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}a\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\mathrm{sh}5a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\cdot\ \cdot\right)\qquad \text{---<S5-5>}$$

$$\log2=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\left(\mathrm{sh}a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\mathrm{sh}2a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\mathrm{sh}3a\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\cdot\ \cdot\right)\quad \text{--<S5-6>}$$

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−11>

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4\mathrm{sh}^3a}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sha}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5^2}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7^2}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S6−12>

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式 (L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch2a}}+\frac{2^2}{\mathrm{ch4a}}+\frac{3^2}{\mathrm{ch6a}}+\frac{4^2}{\mathrm{ch8a}}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S7−1>

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin a}{\mathrm{cha}-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch2a}+\sin a}{\mathrm{ch2a}-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\sin a}{\mathrm{ch3a}-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch4a}+\sin a}{\mathrm{ch4a}-\sin a}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1>

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin a}{\mathrm{cha}-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\sin a}{\mathrm{ch3a}-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch5a}+\sin a}{\mathrm{ch5a}-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch7a}+\sin a}{\mathrm{ch7a}-\sin a}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2>

◆ $e^{\pi x}$ [恒等] 極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin ax}{\mathrm{cha}-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch2a}+\sin ax}{\mathrm{ch2a}-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\sin ax}{\mathrm{ch3a}-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch4a}+\sin ax}{\mathrm{ch4a}-\sin ax}\right)\cdot\cdot$$ --<S8−1−2>

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{cha}+\sin ax}{\mathrm{cha}-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch3a}+\sin ax}{\mathrm{ch3a}-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch5a}+\sin ax}{\mathrm{ch5a}-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch7a}+\sin ax}{\mathrm{ch7a}-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot$$ --<S8−2−2>

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{sina}}{e^a+1}+\frac{\mathrm{sin2a}}{e^{2a}+1}+\frac{\mathrm{sin3a}}{e^{3a}+1}+\frac{\mathrm{sin4a}}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S9−1>

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\sin a}{e^{a}-1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}-1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot\right)\qquad \text{----<S9-2>}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\sin a\left(\frac{\sin a}{e^{a}+1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 5a}{e^{5a}+1}+\frac{\sin 7a}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)\qquad \text{----<S9-3>}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\sin a\left(\frac{\sin a}{e^{a}-1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 5a}{e^{5a}-1}+\frac{\sin 7a}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)\qquad \text{----<S9-4>}$$

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\sin a\left(\frac{\cos a}{e^{a}+1}+\frac{\cos 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 5a}{e^{5a}+1}+\frac{\cos 7a}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)\qquad \text{----<S9-5>}$$

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\cos a}{e^{a}+1}+\frac{\cos 2a}{e^{2a}+1}+\frac{\cos 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 4a}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)\qquad \text{----<S9-6>}$$

$$\frac{(\pi/2)^2\mathrm{ch}(\pi/2)}{\mathrm{sh}^2(\pi/2)}-\frac{(\pi/2)}{\mathrm{sh}(\pi/2)}=4\left(\frac{2^2}{(2^2+1)^2}-\frac{4^2}{(4^2+1)^2}+\frac{6^2}{(6^2+1)^2}-\frac{8^2}{(8^2+1)^2}+-\cdot\cdot\right)$$

$$=\lim_{a\to+0}(\mathrm{ch}a-\cos a)\left(\frac{\sin a}{\mathrm{ch}^2 a}+\frac{2\sin 2a}{\mathrm{ch}^2 2a}+\frac{3\sin 3a}{\mathrm{ch}^2 3a}+\frac{4\sin 4a}{\mathrm{ch}^2 4a}+\cdot\cdot\right)\qquad \text{---<S9-7>}$$

$$\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}(\pi/2)}-\frac{(\pi/2)^2}{\mathrm{sh}^2(\pi/2)}=4\left(\frac{2^2}{(2^2+1)^2}+\frac{4^2}{(4^2+1)^2}+\frac{6^2}{(6^2+1)^2}+\frac{8^2}{(8^2+1)^2}+\cdot\cdot\right)$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin^2 a\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{2\sin 2a}{\mathrm{sh}^2 2a}+\frac{3\sin 3a}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{4\sin 4a}{\mathrm{sh}^2 4a}+\cdot\cdot\right)\qquad \text{---<S9-8>}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{cha}}+\frac{\cos 3a}{\mathrm{ch}3a}+\frac{\cos 5a}{\mathrm{ch}5a}+\frac{\cos 7a}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)\quad \text{--<S9-9>}$$

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{5^2+1}-\frac{1}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to\pm0}\sin a\left(\frac{\sin a}{\mathrm{cha}}+\frac{\sin 3a}{\mathrm{ch}3a}+\frac{\sin 5a}{\mathrm{ch}5a}+\frac{\sin 7a}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)\quad \text{--<S9-10>}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2a}+\cdot\cdot\right)\quad \text{--<S9-11>}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}(2\pi)}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin a}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3a}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}2a}+\cdot\cdot\right)\quad \text{---<S9-12>}$$

◆π√2/4 極限公式（虚２次体Ｑ(√−2)ゼータ L2(1)極限公式）

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right)\quad \text{----<S10-1>}$$

◆(1/√2) log(1+√2)極限公式（実２次体Ｑ(√2)ゼータ L1(1)極限公式）

$$\frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+--+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right)\quad \text{----<S11-1>}$$

==================================

これら七つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。いずれも興味ある形をしている。なお、＜Ｓ１１－１＞の左辺の値は、実２次体の類数公式からわかる。

さて、その七式の中で次のものなど、とくに簡明できれいである。

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0} sh^2a\left(\frac{sh2a}{ch4a+1}+\frac{2sh3a}{ch6a+1}+\frac{3sh4a}{ch8a+1}+\frac{4sh5a}{ch10a+1}+\cdot\cdot\right)$$ ---<S4−12>

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{5^2+1}-\frac{1}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$
$$=\lim_{a\to\pm0} sina\left(\frac{sina}{cha}+\frac{sin3a}{ch3a}+\frac{sin5a}{ch5a}+\frac{sin7a}{ch7a}+\cdot\cdot\right)$$ --<S9−10>

$$\frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+--+\cdot\cdot$$
$$=\lim_{a\to\pm0} 2sha\left(\frac{sha}{ch2a}+\frac{sh3a}{ch6a}+\frac{sh5a}{ch10a}+\frac{sh7a}{ch14a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S11−1>

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to\pm0}\frac{sh^2a}{2}\left(\frac{1}{sh2a}+\frac{2}{sh3a}+\frac{3}{sh4a}+\frac{4}{sh5a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S2−5>

この中から独断と偏見で一つ選ぶとすると、＜Ｓ２－５＞である。これはシンプルであるのと同時にふしぎさを合わせもっている。簡明なのにずれのようなものがはいっていて魅惑的である。

＜Ｓ９－１０＞の左辺級数の値は、明示的な値としては出ないと考えられる（予想）。

三角関数と双曲線関数の融合域という独自に探索してきた洞窟で鉱物（公式）を見つけてきたが、前回までの極限公式はすべて二変数域から出たものであった。今回の式は、＜Ｓ９－１０＞と＜Ｓ１１－１＞以外の五つは、三変数域という超巨大空間から出たものである。二変数域は巨大だが、三変数域はそれよりはるかに巨大であり全容などまるで見通せない。

今回の式の中から＜Ｓ２－５＞の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜S2−5＞の証明

下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数を使う。（注意：その頁でフーリエ級数の表現を使っているが、それらは恒等式である。x に制限を加えているが、じつは x は任意の実数である）。この[1]は三変数の恒等式となっている。

$$\frac{sinx}{e^a-\alpha}-\frac{sin3x}{e^{3a}-\alpha}+\frac{sin5x}{e^{5a}-\alpha}-\frac{sin7x}{e^{7a}-\alpha}+-\cdot\cdot$$
$$=sinx\left(\frac{sha}{ch2a+cos2x}+\frac{\alpha\cdot sh2a}{ch4a+cos2x}+\frac{\alpha^2\cdot sh3a}{ch6a+cos2x}+\frac{\alpha^3\cdot sh4a}{ch6a+cos2x}+\cdot\cdot\right)$$ ---[1]

(a > 0,　α, x は任意実数)

上式で α を$e^{i\alpha}$で形式的に置き換えて式変形して、その実部と虚部にそれぞれ対応する式を拾い上げると、虚部の式は次となる（式は実数の式！）。実部に対応した式は略。

$$\sin\alpha\left(\frac{\sin x}{(e^{a}-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}-\frac{\sin 3x}{(e^{3a}-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}+\frac{\sin 5x}{(e^{5a}-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}-\frac{\sin 7x}{(e^{7a}-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}+-\cdot\cdot\right)$$

$$=\sin x\left(\frac{\mathrm{sh}2a\cdot\sin\alpha}{\mathrm{ch}4a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot\sin 2\alpha}{\mathrm{ch}6a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot\sin 3\alpha}{\mathrm{ch}8a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot\sin 4\alpha}{\mathrm{ch}10a+\cos 2x}+\cdot\cdot\right)\quad\text{---[2]}$$

$(a>0,\ \ \alpha,\ x$ は任意実数$)$

上式で x にπ/2 を代入した式に対し、両辺に 1/sinαを掛けてから（右辺は各項に掛ける）αを 0 に近づけていき（α->0）、ロピタルの定理も用いて次式を得る。

$$\frac{1}{(e^{a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{3a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{5a}-1)^2}+\frac{1}{(e^{7a}-1)^2}+\cdot\cdot$$

$$=\frac{\mathrm{sh}2a\cdot 1}{\mathrm{ch}4a-1}+\frac{\mathrm{sh}3a\cdot 2}{\mathrm{ch}6a-1}+\frac{\mathrm{sh}4a\cdot 3}{\mathrm{ch}8a-1}+\frac{\mathrm{sh}5a\cdot 4}{\mathrm{ch}10a-1}+\cdot\cdot\quad\text{---[3]}$$

この両辺に sh^2a を掛けて（左辺は各項に sh^2a を掛ける！）、a を 0 に近づけていく（a->0）。左辺はロピタルの定理から $1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdot\cdot$ となり、つまりπ^2/8（本稿冒頭での式参照）となる。少し式変形を行うと、目標の次式に到達する。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\frac{\mathrm{sh}^2a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}2a}+\frac{2}{\mathrm{sh}3a}+\frac{3}{\mathrm{sh}4a}+\frac{4}{\mathrm{sh}5a}+\cdot\cdot\right)\qquad\text{----<S2-5>}$$

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Ｓ２－５＞はこのようにして得られた。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●三変数域は少し足を踏みいれた程度であり、まだまったくわかっていない。そんな巨大地下空間のたくさんある洞窟（母等式）の一つが証明での[1]である。ここから枝分かれした洞窟の一つが[2]で、その[2]から今回の極限公式が五つも出た。

＜Ｓ２－５＞もその五つの中の一つだが、これは二変数域からは出ない（or 出たとしても難解なことになるはず）ものである。

●[1]や[2]から“三変数”の意味がわかるであろう。一応 a やαは定数として式を出しているが、それは変数として扱ってもまったくＯＫである。変数と見ることができるので、微分や積分、ロピタルの定理などいろいろな道具を活用でき、豊かなものへと変貌をとげていく。

[1]や[2]は見るだけで不気味なエネルギーを感じる。[2]は左辺、右辺ともフーリエ級数のような感じになっていてすごい形である。

●以下の三式を比べよう。

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right)\qquad\text{----<S2-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} sh^2a\left(\frac{1}{sha}+\frac{3}{sh3a}+\frac{5}{sh5a}+\frac{7}{sh7a}+\cdot\cdot\right) \qquad ----<S2-4>$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0} \frac{sh^2a}{2}\left(\frac{1}{sh2a}+\frac{2}{sh3a}+\frac{3}{sh4a}+\frac{4}{sh5a}+\cdot\cdot\right) \qquad ----<S2-5>$$

　これらはまったくすばらしい。
　＜Ｓ２－３＞と＜Ｓ２－４＞は完璧な水晶という感じだが、＜Ｓ２－５＞は水晶の中に砂の筋が入っているかのようでズレがあって、それがふしぎを醸し出している。

●「数学は〇〇に似ている」としていろいろなものに例えてきたが、数学は洞窟探検に似ている。実際に洞窟を探検したことはないが、テレビなどで見ていると同じだ！とよく感じる。
　　空間を進んでいてあちこちに入り口の穴が開いている。ある穴はすぐ行き止まり、ある穴は狭いところを進むと信じられない空間が現れる・・。そんなことの繰り返しである。

●日本の秋芳洞は有名な洞窟である。かなり以前から探索が続けられていてもう解明されつくされたかと思うが、先日見たテレビではまだまだ未踏のエリアがたくさん残っているとわかった。数学も同じあって、教科書に書かれたものはある数学者が探索したエリアにすぎない。
　グロモフという数学者は教科書を疑うことが大事といっていたが、まったく同感である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.3.15 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）
・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）