＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その３５）＞

新種の極限公式が四つ得られたので下方に青色式で示す。今回はＬ(2)と 1/2 とゼータ香り式と、さらにはじめてＬ(χ,s)の虚２次体 Q($\sqrt{-2}$)ゼータ L2(1)の極限公式が得られた。

それらに対しては同グループの過去の式も一緒に示した。他のものは最新のもの二つずつを提示した（ただしπ^3/32（L(3)）極限公式は一つのみ)。

L2(s)ゼータは、ディリクレのＬ関数Ｌ(χ,s)の特別な場合である。

ディリクレのＬ関数Ｌ(χ,s)は

$$L(\chi,s)=\chi(1)/1^s+\chi(2)/2^s+\chi(3)/3^s+\chi(4)/4^s+\chi(5)/5^s+\chi(6)/6^s+\cdots$$

で定義される一般的なゼータである。

L2(s)は「a≡1 or 3 mod 8-->χ(a)＝1、 a≡5 or 7 mod 8 -->χ(a)＝-1、それ以外の a ではχ(a)＝0」というディリクレ指標χ(a)をもつ。

L2(s)は虚２次体Ｑ（$\sqrt{-2}$）に対応するゼータ関数である。私は“虚２次体 Q($\sqrt{-2}$)ゼータ”と呼んでいる。

ところで“L2(s)”や“L2(1)”は私独自の記法である。L2(1)は、具体的には

$L2(s)=1+1/3^s-1/5^s-1/7^s+1/9^s+1/11^s-1/13^s-1/15^s$ ++−−・・

の s＝1 の次式となる。

$L2(1)=1+1/3-1/5-1/7+1/9+1/11-1/13-1/15$ ++−−・・＝$\pi\sqrt{2}/4$

以降において、Ｌ(2)はＬ(2)＝$1-1/3^2+1/5^2-1/7^2$ +−・・である（カタランの定数）。

ζ(3)は$\zeta(3)=1+1/2^3+1/3^3+1/4^3$ +・・で、Ｌ(3)はＬ(3)＝$1-1/3^3+1/5^3-1/7^3$ +−・・＝$\pi^3/32$ である。$\pi/4$ はＬ(1)＝$1-1/3+1/5-1/7$ +−・・＝$\pi/4$ であり、$\pi^2/6$ は$\zeta(2)=1+1/2^2+1/3^2+1/4^2$ +・・＝$\pi^2/6$、$\pi^2/8$ は$(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2$ +・・＝$\pi^2/8$。

さらに以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a, x は任意の実数である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan,arctanh である。log は自然対数、e は自然対数の底。sin, cos, tan は通常の表記である。

なお、lim での a->+0 は a をプラス側から 0 に近づける意味であり、a->±0 は a をプラス側,マイナス側どちらから 0 に近づけてもＯＫの意味である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 極限公式 ＞

◆$2^{1/2}$ ／$2^{1/4}$ ／2^{-1}／2^2 極限公式

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-3a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})^{-1}(1+e^{-9a})(1+e^{-11a})^{-1}\cdots \quad \text{---＜N1-2＞}$$

$$\sqrt{2}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-1}(1+e^{-3a})(1+e^{-4a})^{-1}(1+e^{-5a})(1+e^{-6a})^{-1}\cdots \quad \text{---＜P1-4＞}$$

$$2^{1/4}=\lim_{a\to+0}(1+e^{-a})(1+e^{-2a})^{-2}(1+e^{-3a})^{3}(1+e^{-4a})^{-4}(1+e^{-5a})^{5}(1+e^{-6a})^{-6}\cdot\cdot \qquad \text{---<R2>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to\pm0}\sin a\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2a}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+\cos 2a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--<O1-1>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\frac{\sin a}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch}2a+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch}3a+\cos a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a+\cos a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<O1-2>}$$

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{e^{a}}{2(\mathrm{ch}a+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch}3a+\cos a)}{e^{3a}}\right)\left(\frac{e^{5a}}{2(\mathrm{ch}5a+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch}7a+\cos a)}{e^{7a}}\right)\cdot\cdot \qquad \text{--<O1-3>}$$

$$4=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^{e^{-a}}\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)^{e^{-2a}}\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^{e^{-3a}}\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)^{e^{-4a}}\cdot\cdot \qquad \text{--<Q1>}$$

◆L(2)極限公式

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<S1>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{4}{\mathrm{ch}4a}+\frac{6}{\mathrm{ch}6a}+\frac{8}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S1-2>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a}+\frac{3}{\mathrm{ch}3a}+\frac{5}{\mathrm{ch}5a}+\frac{7}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S1-3>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--<S1-4>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2\mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{sh}14a}\right)+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--<S1-5>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right) \qquad \text{--<S1-6>}$$

◆$\frac{\pi^2}{8}$極限公式　(3ζ(2)/4 極限公式)

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S2-3>}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^2a\left(\frac{1}{\mathrm{sha}}+\frac{3}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S2－4＞

◆$\frac{\pi^2}{6}$極限公式（ζ(2)極限公式）

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{\mathrm{sh}^2a}+\frac{3^2}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{5^2}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{7^2}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S3－8＞

$$\frac{\pi^2}{6}=\lim_{a\to+0}4(\mathrm{cha}-1)\left(\frac{1}{e^a+1}+\frac{2}{e^{2a}+1}+\frac{3}{e^{3a}+1}+\frac{4}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S3－9＞

◆$\frac{\pi}{4}$極限公式　(L(1)極限公式)

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{\mathrm{sha}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{\mathrm{sh5a}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{\mathrm{sh7a}}\right)+-\cdot\cdot\right)$$ --＜S4－9＞

$$\frac{\pi}{4}=\lim_{a\to+0}2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch4a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch8a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch12a}}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch16a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S4－10＞

◆log2 極限公式

$$\log2=\lim_{a\to+0}2\mathrm{sha}\left(\mathrm{sha}\cdot\log\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)+\mathrm{sh3a}\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\mathrm{sh5a}\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{sh5a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ---＜S5－5＞

$$\log2=\lim_{a\to+0}(e^a-1)\left(\mathrm{sha}\cdot\log\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{sha}}\right)+\mathrm{sh2a}\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{sh2a}}\right)+\mathrm{sh3a}\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{sh3a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --＜S5－6＞

◆ζ(3)極限公式

$$\zeta(3)=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}^3a\left(\frac{1^2}{e^a-1}+\frac{3^2}{e^{3a}-1}+\frac{5^2}{e^{5a}-1}+\frac{7^2}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S6－11＞

$$\zeta(3)=\lim_{a\to\pm0}\frac{4\mathrm{sh}^3a}{7}\left(\frac{1^2}{\mathrm{sha}}+\frac{3^2}{\mathrm{sh3a}}+\frac{5^2}{\mathrm{sh5a}}+\frac{7^2}{\mathrm{sh7a}}+\cdot\cdot\right)$$ ----＜S6－12＞

◆ $\frac{\pi^3}{32}$極限公式　(L(3)極限公式)

$$\frac{\pi^3}{32}=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sh}^3 a\left(\frac{1^2}{\mathrm{ch}2a}+\frac{2^2}{\mathrm{ch}4a}+\frac{3^2}{\mathrm{ch}6a}+\frac{4^2}{\mathrm{ch}8a}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{---<S7−1>}$$

◆ e^{π}極限公式

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin a}{\mathrm{ch}2a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin a}{\mathrm{ch}4a-\sin a}\right)\cdot\cdot \qquad \text{--<S8−1>}$$

$$e^{\pi}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin a}{\mathrm{ch}a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin a}{\mathrm{ch}3a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin a}{\mathrm{ch}5a-\sin a}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin a}{\mathrm{ch}7a-\sin a}\right)^2\cdot\cdot \qquad \text{--<S8−2>}$$

◆ $e^{\pi x}$［恒等］極限公式

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}2a+\sin ax}{\mathrm{ch}2a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\sin ax}{\mathrm{ch}4a-\sin ax}\right)\cdot\cdot \qquad \text{--<S8−1−2>}$$

$$e^{\pi x}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\mathrm{ch}a+\sin ax}{\mathrm{ch}a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}3a+\sin ax}{\mathrm{ch}3a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}5a+\sin ax}{\mathrm{ch}5a-\sin ax}\right)^2\left(\frac{\mathrm{ch}7a+\sin ax}{\mathrm{ch}7a-\sin ax}\right)^2\cdot\cdot \qquad \text{--<S8−2−2>}$$

◆ ゼータの香りの漂う公式の極限公式

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}2\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\sin a}{e^{a}+1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}+1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}+1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S9−1>}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\sin a\left(\frac{\sin a}{e^{a}-1}+\frac{\sin 2a}{e^{2a}-1}+\frac{\sin 3a}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 4a}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot\right) \qquad \text{----<S9−2>}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{\pi\,\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}2\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{sina}}{e^{a}+1}+\frac{\mathrm{sin3a}}{e^{3a}+1}+\frac{\mathrm{sin5a}}{e^{5a}+1}+\frac{\mathrm{sin7a}}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$

----<S9−3>

$$-\frac{1}{2}+\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}\,\pi}=\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{4^2+1}+\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{sina}}{e^{a}-1}+\frac{\mathrm{sin3a}}{e^{3a}-1}+\frac{\mathrm{sin5a}}{e^{5a}-1}+\frac{\mathrm{sin7a}}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot\right)$$

----<S9−4>

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} 2\mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{e^{a}+1}+\frac{\mathrm{cos3a}}{e^{3a}+1}+\frac{\mathrm{cos5a}}{e^{5a}+1}+\frac{\mathrm{cos7a}}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot\right)$$

----<S9−5>

$$\frac{1}{1^2+1}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0} \mathrm{sina}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{e^{a}+1}+\frac{\mathrm{cos2a}}{e^{2a}+1}+\frac{\mathrm{cos3a}}{e^{3a}+1}+\frac{\mathrm{cos4a}}{e^{4a}+1}+\cdot\cdot\right)$$

----<S9−6>

$$\frac{(\pi/2)^2\mathrm{ch}(\pi/2)}{\mathrm{sh}^2(\pi/2)}-\frac{(\pi/2)}{\mathrm{sh}(\pi/2)}=4\left(\frac{2^2}{(2^2+1)^2}-\frac{4^2}{(4^2+1)^2}+\frac{6^2}{(6^2+1)^2}-\frac{8^2}{(8^2+1)^2}+-\cdot\cdot\right)$$

$$=\lim_{a\to+0}(\mathrm{cha}-\mathrm{cosa})\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{ch}^2\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{sin2a}}{\mathrm{ch}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{sin3a}}{\mathrm{ch}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{sin4a}}{\mathrm{ch}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right)$$

---<S9−7>

$$\frac{(\pi/2)}{\mathrm{th}(\pi/2)}-\frac{(\pi/2)^2}{\mathrm{sh}^2(\pi/2)}=4\left(\frac{2^2}{(2^2+1)^2}+\frac{4^2}{(4^2+1)^2}+\frac{6^2}{(6^2+1)^2}+\frac{8^2}{(8^2+1)^2}+\cdot\cdot\right)$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sin}^2\mathrm{a}\left(\frac{\mathrm{sina}}{\mathrm{sh}^2\mathrm{a}}+\frac{2\mathrm{sin2a}}{\mathrm{sh}^2 2\mathrm{a}}+\frac{3\mathrm{sin3a}}{\mathrm{sh}^2 3\mathrm{a}}+\frac{4\mathrm{sin4a}}{\mathrm{sh}^2 4\mathrm{a}}+\cdot\cdot\right)$$

---<S9−8>

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}2\pi}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sha}\left(\frac{\mathrm{cosa}}{\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{cos3a}}{\mathrm{ch3a}}+\frac{\mathrm{cos5a}}{\mathrm{ch5a}}+\frac{\mathrm{cos7a}}{\mathrm{ch7a}}+\cdot\cdot\right)$$

--<S9−9>

◆π√2/4 極限公式（虚 2 次体 Q(√−2) ゼータ L2(1) 極限公式）

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S10−1>

==================================

　これら四つの青色式が得られた。Wolfram Alpha の数値検証でも式の成立を確認している。

　四式を並べよう。

$$\frac{1}{2}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{e^{a}}{2(\mathrm{ch}a+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch}3a+\cos a)}{e^{3a}}\right)\left(\frac{e^{5a}}{2(\mathrm{ch}5a+\cos a)}\right)\left(\frac{2(\mathrm{ch}7a+\cos a)}{e^{7a}}\right)\cdot\cdot$$ --<O1−3>

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\mathrm{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\mathrm{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)$$ --<S1−6>

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mathrm{sh}(3\pi/2)-\mathrm{sh}(\pi/2)}{\mathrm{sh}2\pi}=\frac{1}{1^2+1}-\frac{3}{3^2+1}+\frac{5}{5^2+1}-\frac{7}{7^2+1}+-\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}a\left(\frac{\cos a}{\mathrm{ch}a}+\frac{\cos 3a}{\mathrm{ch}3a}+\frac{\cos 5a}{\mathrm{ch}5a}+\frac{\cos 7a}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)$$ --<S9−9>

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right)$$ ----<S10−1>

　いずれも興味ある形をしている。とくに＜Ｓ９－９＞や＜Ｓ１０－１＞は右辺が簡明できれいである。

　今回、L(χ,s)ゼータから出る虚 2 次体 Q(√−2)ゼータ L2(s)の s が 1 の場合の＜Ｓ１０－１＞が得られた。2 次体ゼータでの極限公式は初となる。L2(1)とその特殊値は

　L2(1)＝1 +1/3 −1/5 −1/7 +1/9 +1/11 −1/13 −1/15 +1/17 +1/19 −1/21 −1/23 ++−−・・

　　　＝π√2/4

となる。要するに 8 で割って 1 か 3 余る項は+符号、8 で割って 5 か 7 余る項は−符号となる。

　なお、ディリクレの L 関数 L(χ,s)は、ζ(s)や L(s)、さらに無数の虚 2 次体ゼータや実 2 次体ゼータを含む巨大ゼータである。

　今回の式の中から＜Ｓ１０－１＞の証明を以下に示す。詳細な式変形はとばした。

==================================

＜S10−1＞の証明

　下式[1]の左辺から出発する。それに対し、１３年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]と類似的な方法を使って変形していき[1]右辺に到達する。途中でゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数を使う。

（注意：その頁でフーリエ級数の表現を使っているが、それらは恒等式である。x に制限を加えているが、じつは x は任意の実数である）。この[1]は二変数の恒等式となっている。

$$\sin x\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\cos 2x}-\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+\cos 2x}-\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a+\cos 2x}+-\cdot\cdot\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}a}-\frac{\sin 3x}{\mathrm{ch}3a}+\frac{\sin 5x}{\mathrm{ch}5a}-\frac{\sin 7x}{\mathrm{ch}7a}+-\cdot\cdot\right)\text{---[1]}$$

$(a>0,\ x\text{ は任意実数})$

上式で x をπ/2-x で置き換えて式変形してから、x を ai/2（i：虚数単位）で置き換え cos(ai)＝cosh(a)の公式を使って式変形を行うと次となる。

$$\mathrm{ch}(a/2)\left(\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{ch}a}-\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{ch}a}+-\cdot\cdot\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{ch}(a/2)}{\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}(3a/2)}{\mathrm{ch}3a}+\frac{\mathrm{ch}(5a/2)}{\mathrm{ch}5a}+\frac{\mathrm{ch}(7a/2)}{\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot\right)\text{---[2]}$$

$(a>0)$

この両辺に sha を掛けて（左辺は()内の各項に sha を掛ける！）、a を 0 に近づけていく（a->0）。左辺はロピタルの定理から（変形の後に）(1/2)[1+1/3−1/5−1/7+1/9+1/11−1/13−1/15++−−・・]となり[～]の値は現代数学で知られていて[～]＝π√2/4 である。最後に a を 2a で置き換えて、目標の次の＜Ｓ１０－１＞に到達する。

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}++--\cdot\cdot$$

$$=\lim_{a\to+0}\mathrm{sh}2a\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a}+\cdot\cdot\right)$$

----<S10−1>

終わり。

＝＝

＜Ｓ１０－１＞はこのようにして得られた。証明のポイントは二つある。一つ目は最初の下線部分で変数 x を変数 a に置き換えた点、二つ目は２番目の下線の所でわざわざ sha を掛けた点である。前者は哲学的に深い意味があり、後者は強引にロピタル定理を適用可能とするための操作である。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝

●上記証明では核心部分のみを書いて多くを略したが、最後のところをもう少し述べる。

左辺に関して、はじめ

2/(1・3)− 6/(5・7)+ 10/(9・11)− 14/13・15)+−・・

という交代級数が得られたのだが、これがどんな値になるのかわからなかった。その後、上は

2/(1・3)− 6/(5・7)+ 10/(9・11)− 14/13・15)+−・・

＝(1/2)[1 +1/3 −1/5 −1/7 +1/9 +1/11 −1/13 −1/15 +1/17 +1/19 −1/21 −1/23 ++−−・・]

と変形できることに気づいた。

ここまでくれば[～]の級数は L(χ,s)の 2 次体ゼータ L2(s)だ！と気づき、その s=1 での特殊値は、独自に開発したテイラーシステムを用いて１７年前に求めた値π√2/4 を使うことができた、という流れである。

⇒ロニオス彗星　その７　2008/1/12 の二つ目（タイトルの記法など書き間違えているが・・）

● 上記の級数 1 +1/3 -1/5 -1/7 ++−−・・の値（特殊値）π√2/4 は、数学者は虚 2 次体の類数公式という高級食材を使って求める（料理する）はずである。類数公式はロニオス彗星　その７でも載せているが類数や 2 次体 K に含まれる 1 のべき根の個数とか・・の値を必要とする。

庶民はそんな高級食材は手に入れにくい。ロニオス彗星　その７でも載せたテイラーシステムを使えば、安物の食材だけで（高級品必要なし！）π√2/4 が得られる。

● 数学は料理に似ている。身の回りの器具と安い食材でおいしい料理ができるのがよい。数学上のことも日常のことも同じである。

●以下の３式を眺めよう。

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\operatorname{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{ch}a}{\operatorname{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{ch}a}{\operatorname{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{ch}a}{\operatorname{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{ch}a}{\operatorname{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{--<S1−4>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}2\operatorname{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{ch}a}{\operatorname{sh}2a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{ch}a}{\operatorname{sh}6a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{ch}a}{\operatorname{sh}10a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{ch}a}{\operatorname{sh}14a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{--<S1−5>}$$

$$L(2)=\lim_{a\to\pm0}\operatorname{sh}a\left(\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\operatorname{sh}a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\operatorname{sh}3a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\operatorname{sh}5a}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{\cos a}{\operatorname{sh}7a}\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{--<S1−6>}$$

これらは似ていているが、少しちがっている。カタランの定数 L(2)＝1 $-1/3^2+1/5^2-1/7^2$ +−・・は、いまだ超越数かどうかわかっていないし、それどころか無理数かどうかさえわかっていない。

●素数が無限にある（有限個ではない）ことは、ユークリッド（エウクレイデス）によって原論にて証明されている。

しかし４で割ると１余る素数は無限にあるか？４で割ると３余る素数は無限にあるか？１００で割ると１３余る素数はどうか？などそんな一般的な問題は誰もわからなかった。

ディリクレ(1805-1859)は自身が発明したＬ関数 L(χ, s)を使って「どの場合も無限にある！」と証明した。ディリクレの算術級数定理。

ユークリッドは紀元前 300 年ごろに生きた人のようだから、ディリクレは 2000 年ぶりに素数への理解を一挙に進展させた！といえる。ディリクレはドイツの人だが、若い頃パリに出て最先端の数学に触れ、そしてそこでアーベルとも会っている。（高瀬正仁氏数学史ブログ日々のつれづれ |2007 年 06 月には興味ある話が載っている）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2025.3.8 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

・高瀬正仁氏数学史ブログ日々のつれづれ |2007 年 06 月