＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その１７）＞

ラマヌジャン式に類似した式四つと恒等式一つの計五式を得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。紙幅の節約のため、√2 極限公式と＜７－１＞と＜７－１＞、＜L１＞や＜L２＞は一旦省いた。

以下では、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。a や α は任意の実数であり、よって例えば、$(a \neq 0)$は「a は 0 でない任意の実数」を意味する。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh である。e は自然対数の底。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\mathrm{cha}-1}-\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜1＞}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}-\frac{1}{\mathrm{cha}+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{1}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜2＞}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜3＞}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{ch4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{----＜4＞}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}-\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}-\mathrm{cha}}-\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}-\mathrm{cha}}+-\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜5＞}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha}}=2\left(\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh2a}}{\mathrm{ch4a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a}+\mathrm{cha}}+\frac{\mathrm{sh4a}}{\mathrm{ch8a}+\mathrm{cha}}+\cdot\cdot\right) \quad \text{-----＜6＞}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}\right)\times\cdot\cdot$$ ----＜E1＞

$(a>0)$

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}8a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}8a+\mathrm{sh}a}\right)\times\cdot\cdot$$ ----＜E2＞

$(a>0)$

$$\frac{1}{(e^{a}-1)}+\frac{1}{2(e^{2a}-1)}+\frac{1}{3(e^{3a}-1)}+\frac{1}{4(e^{4a}-1)}+\cdot\cdot$$
$$=\log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})}\times\frac{1}{(1-e^{-2a})}\times\frac{1}{(1-e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-e^{-4a})}\times\cdot\cdot\right)$$ ----＜F1＞

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a)^2}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜G1＞

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(a/2)}=4\mathrm{sh}a\left(\frac{\mathrm{sh}2a}{(\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}4a}{(\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}6a}{(\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a)^2}+\frac{\mathrm{sh}8a}{(\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a)^2}+\cdot\cdot\right)$$ ---＜G2＞

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{e^{a}-1}-\frac{3}{e^{3a}-1}+\frac{5}{e^{5a}-1}-\frac{7}{e^{7a}-1}+-\cdot\cdot=\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+1}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a+1}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+1}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a+1}+\cdot\cdot$$ --＜K1＞

$(a>0)$

$$\frac{\alpha}{\mathrm{sh}a}+\frac{\alpha^2}{2\mathrm{sh}2a}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{sh}3a}+\frac{\alpha^4}{4\mathrm{sh}4a}+\cdot\cdot$$
$$=2\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})}\times\frac{1}{(1-\alpha e^{-3a})}\times\frac{1}{(1-\alpha e^{-5a})}\times\frac{1}{(1-\alpha e^{-7a})}\times\cdot\cdot\right)$$ ----＜M1＞

$(|\alpha|<e^{a}$ 且つ $a>0)$

$$\frac{\alpha}{\mathrm{sh}a}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{sh}3a}+\frac{\alpha^5}{5\mathrm{sh}5a}+\frac{\alpha^7}{7\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot$$
$$=2\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right)+\cdot\cdot\right)$$ ----＜M2＞

$(\,|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{\alpha}{\mathrm{ch}a}+\frac{\alpha^2}{2\mathrm{ch}2a}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{ch}3a}+\frac{\alpha^4}{4\mathrm{ch}4a}+\cdot\cdot$$
$$=2\left(\log\frac{1}{1-\alpha e^{-a}}-\log\frac{1}{1-\alpha e^{-3a}}+\log\frac{1}{1-\alpha e^{-5a}}-\log\frac{1}{1-\alpha e^{-7a}}+-\cdot\cdot\right)$$ ---<N1>

$(\,|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{\alpha}{\mathrm{ch}a}+\frac{\alpha^3}{3\mathrm{ch}3a}+\frac{\alpha^5}{5\mathrm{ch}5a}+\frac{\alpha^7}{7\mathrm{ch}7a}+\cdot\cdot$$
$$=2\left(\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^a}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right)+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right)-\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right)+-\cdot\cdot\right)$$ ---<N2>

$(\,|\alpha|<e^a$ 且つ $a>0\,)$

$$\frac{1}{\mathrm{th}a}-\frac{1}{2\mathrm{th}2a}+\frac{1}{3\mathrm{th}3a}-\frac{1}{4\mathrm{th}4a}+-\cdot\cdot$$
$$=\log\left\{2\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot\right)^2\right\}$$ ---<Q1>

$(a>0)$

$$\frac{1}{e^a+1}-\frac{1}{2(e^{2a}+1)}+\frac{1}{3(e^{3a}+1)}-\frac{1}{4(e^{4a}+1)}+-\cdot\cdot$$
$$=\log\left(\frac{(1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot}{(1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot}\right)$$ ----<P1>

$(\,a>0\,)$

＜ 公式 ＞

◆ゼータの香りの漂う公式（特殊値が得られたケース）

$$\frac{1}{\mathrm{th}\pi}-\frac{1}{2\mathrm{th}2\pi}+\frac{1}{3\mathrm{th}3\pi}-\frac{1}{4\mathrm{th}4\pi}+-\cdot\cdot=(1/4)\log 2+\frac{\pi}{6}$$ -----<Q1-2>

◆ラマヌジャン式に類似した式

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}-\frac{1}{2(e^{4\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{6\pi}-1)}-\frac{1}{4(e^{8\pi}-1)}+-\cdot\cdot=\frac{\pi}{12}-(3/8)\log 2$$ ---<I−1>

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}+\frac{1}{3(e^{6\pi}-1)}+\frac{1}{5(e^{10\pi}-1)}+\frac{1}{7(e^{14\pi}-1)}+\cdot\cdot=(1/4)\log\left(\frac{\pi}{\omega\cdot 2^{1/4}}\right) \quad \text{---<I-2>}$$

ω ：レムニスケート周率

$$\frac{1}{e^{\pi}+1}-\frac{1}{2(e^{2\pi}+1)}+\frac{1}{3(e^{3\pi}+1)}-\frac{1}{4(e^{4\pi}+1)}+-\cdot\cdot=-\frac{\pi}{8}+(5/8)\log 2 \quad \text{---<I-3>}$$

$$\frac{1}{e^{\pi}-1}-\frac{1}{2(e^{2\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{3\pi}-1)}-\frac{1}{4(e^{4\pi}-1)}+-\cdot\cdot=\frac{\pi}{24}-(1/8)\log 2 \quad \text{---<I-4>}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これら五つの青色式が得られた。＜Ｐ１＞は任意のａ（>0）で成り立つので恒等式となっている。

＜I－１＞～＜I－４＞はラマヌジャンの式によく似た式だが、このタイプの式で交代級数の式は見たことがない。ラマヌジャン式を集めたサイトラマヌジャン公式集を見ても同じものはないので、新種のような気がする。私のもつラマヌジャン書簡集（B.C.バーント、R.A.ランキン編著）という本にもない。ただし、上記サイトでも本でもラマヌジャン式の一部が出ているのみなので、もし今回の式が既知ということであれば、お知らせください。⇒杉岡幹生 sugioka_m@mvb.biglobe.ne.jp

さて、今回の上記式はラマヌジャンの $\Sigma n^s/(e^{2n\pi}-1)$ タイプの式のうち、sが-1のものに対応するものである。そのタイプの式では本によく載っている次が有名である。

＜ラマヌジャンの式＞

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}+\frac{1}{2\left(e^{4\pi}-1\right)}+\frac{1}{3\left(e^{6\pi}-1\right)}+\frac{1}{4\left(e^{8\pi}-1\right)}+\cdot\cdot=-\frac{\pi}{12}+\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\omega}\right) \quad \text{--<ラ1>}$$

ω ：レムニスケート周率

＜I－１＞を再掲する。

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}-\frac{1}{2(e^{4\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{6\pi}-1)}-\frac{1}{4(e^{8\pi}-1)}+-\cdot\cdot=\frac{\pi}{12}-(3/8)\log 2 \quad \text{---<I-1>}$$

これらを眺めると、＜I－１＞がラマヌジャン式の交代級数版になっていることがよくわかる。

さて、＜I－３＞と＜I－４＞を並べたい。

$$\frac{1}{e^{\pi}+1}-\frac{1}{2(e^{2\pi}+1)}+\frac{1}{3(e^{3\pi}+1)}-\frac{1}{4(e^{4\pi}+1)}+-\cdot\cdot=-\frac{\pi}{8}+(5/8)\log 2 \quad \text{---}<\text{I}-3>$$

$$\frac{1}{e^{\pi}-1}-\frac{1}{2(e^{2\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{3\pi}-1)}-\frac{1}{4(e^{4\pi}-1)}+-\cdot\cdot=\frac{\pi}{24}-(1/8)\log 2 \quad \text{---}<\text{I}-4>$$

この＜I－３＞と＜I－４＞は、じつは＜I－１＞が真っ二つに分裂したものになっている。
すなわち、＜I－１＞が２分割されたものが＜I－３＞と＜I－４＞なのである！
それは、＜I－４＞から＜I－３＞を辺々引いて２で割れば簡単にわかる。この＜I－１＞が割れる現象はたいへん興味深い。

今回の各式の導出方法だが、その詳細は長大になるので、以下簡潔に示す。

[今回の五式の導出方法の概要]

まず＜Ｐ１＞は“三変数・第２別種基本フーリエ Cos 版母等式”（この名称は私独自）という次の母等式から出る。

$$\frac{\cos x}{e^{a}-\alpha}-\frac{\cos 2x}{e^{2a}-\alpha}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}-\alpha}-\frac{\cos 4x}{e^{4a}-\alpha}+-\cdot\cdot$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(1-\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}a+\cos x}\right)+\alpha\left(1-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}2a+\cos x}\right)+\alpha^{2}\left(1-\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}3a+\cos x}\right)+\cdot\cdot\right)$$
$$(a>0、|\alpha|\leqq 1,\ x\text{ は任意実数})$$

この母等式の導出方法は＜ゼータの香りの・・（その３４１）＞での＜Ｍ１＞の導出方法に似たものである。上記母等式をαで 0～αまで積分した式に、x に 0 を、αに−1 を代入すると次の＜Ｐ１＞が出る。

$$\frac{1}{e^{a}+1}-\frac{1}{2(e^{2a}+1)}+\frac{1}{3(e^{3a}+1)}-\frac{1}{4(e^{4a}+1)}+-\cdot\cdot$$
$$=\log\left(\frac{(1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot}{(1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----}<\text{P1}>$$
$$(a>0)$$

＜I－４＞は、＜Ｑ１＞または＜Ｐ１＞から出る。最初は＜Ｐ１＞を変形した式に、テータ関数の公式を適用して出したが、あとで＜Ｑ１＞から（やはりテータ関数の公式を用いて）もう少し簡単に出ることに気づいた。テータ関数の公式はテータ関数, イータ関数の特殊値を求める ｜ Mathlog というサイトの定理１３系１や定理８を用いた。
＜I－３＞は、先に上記でも述べたように＜I－１＞と＜I－４＞から簡単に出る。

＜I－１＞と＜I－２＞を再掲。

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}-\frac{1}{2(e^{4\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{6\pi}-1)}-\frac{1}{4(e^{8\pi}-1)}+-\cdot\cdot=\frac{\pi}{12}-(3/8)\log 2 \quad \text{---<I−1>}$$

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}+\frac{1}{3(e^{6\pi}-1)}+\frac{1}{5(e^{10\pi}-1)}+\frac{1}{7(e^{14\pi}-1)}+\cdot\cdot=(1/4)\log\left(\frac{\pi}{\omega\cdot 2^{1/4}}\right) \quad \text{---<I−2>}$$

ω ：レムニスケート周率

この＜I－１＞と＜I－２＞の導出方法であるが、＜I－１＞は＜Q１-２＞から出てくる。

$$\frac{1}{\mathrm{th}\pi}-\frac{1}{2\mathrm{th}2\pi}+\frac{1}{3\mathrm{th}3\pi}-\frac{1}{4\mathrm{th}4\pi}+-\cdot\cdot\ =(1/4)\log 2+\frac{\pi}{6} \quad \text{-----<Q1-2>}$$

この左辺を＜I－１＞とＢ式（内容略）から構成し直す。つまり、

＜I－１＞＋B＝(1/4)log2＋π/6 ----①

さらに、B－＜I－１＞＝log2 ---②

という自明式を発見。

① 、②を連立方程式で解き、＜I－１＞とBが得られた（B は略）。これで＜I－１＞が出た。

この＜I－１＞と上方のラマヌジャン式の＜ラ1＞を足し算して2で割れば＜I－2＞が得られる。

以上。

このようにして今回の五式が得られた。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ＜Ｑ１＞と＜Ｐ１＞を並べよう。

$$\frac{1}{\mathrm{th}a}-\frac{1}{2\mathrm{th}2a}+\frac{1}{3\mathrm{th}3a}-\frac{1}{4\mathrm{th}4a}+-\cdot\cdot$$

$$=\log\left\{2\left((1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot\right)^2\right\} \quad \text{---<Q1>}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{e^{a}+1}-\frac{1}{2(e^{2a}+1)}+\frac{1}{3(e^{3a}+1)}-\frac{1}{4(e^{4a}+1)}+-\cdot\cdot$$

$$=2\log\left(\frac{(1+e^{-a})(1+e^{-3a})(1+e^{-5a})(1+e^{-7a})\cdot\cdot}{(1+e^{-2a})(1+e^{-4a})(1+e^{-6a})(1+e^{-8a})\cdot\cdot}\right) \quad \text{----<P1>}$$

$$(a>0)$$

これらは今回のラマヌジャン式に類似した式を出すのに、基本的な役割を果たした式である。右辺 log 内にテータ関数やテータ関数類似物が出ていて意味が深い式である。

これらは、木でたとえれば幹の役割を果たしている。この幹の式に比べると、ラマヌジャン式や今回のそれに似た式などは木の葉っぱにすぎない。私は葉のほうにはあまり興味が向かない。それより任意のａで成り立つ恒等式の方が大事に見える。

●＜Ｉ－１＞と＜Ｉ－３＞、＜Ｉ－４＞を並べよう。

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}-\frac{1}{2(e^{4\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{6\pi}-1)}-\frac{1}{4(e^{8\pi}-1)}+-\cdot\cdot=\frac{\pi}{12}-(3/8)\log 2 \quad \text{---}\langle \mathrm{I}-1\rangle$$

$$\frac{1}{e^{\pi}+1}-\frac{1}{2(e^{2\pi}+1)}+\frac{1}{3(e^{3\pi}+1)}-\frac{1}{4(e^{4\pi}+1)}+-\cdot\cdot=-\frac{\pi}{8}+(5/8)\log 2 \quad \text{---}\langle \mathrm{I}-3\rangle$$

$$\frac{1}{e^{\pi}-1}-\frac{1}{2(e^{2\pi}-1)}+\frac{1}{3(e^{3\pi}-1)}-\frac{1}{4(e^{4\pi}-1)}+-\cdot\cdot=\frac{\pi}{24}-(1/8)\log 2 \quad \text{---}\langle \mathrm{I}-4\rangle$$

上方でも述べたが、＜Ｉ－１＞が＜Ｉ－３＞と＜Ｉ－４＞という二つに割れた現象は大事なことに思えてしかたがない。

[問題]

＜Ｉ－４＞はさらに割れるのだろうか？　これは無限に割れていくのだろうか？

現時点ではなにもわからない。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2024.11.02　杉岡幹生

＜参考文献＞

・ラマヌジャン書簡集（B.C.バーント/R.A.ランキン編著,細川尋史訳,シュプリンガー・フェアラーク東京）

・テータ関数,イータ関数の特殊値を求める ｜ Mathlog

・ラマヌジャン公式集