

＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その１６） ＞

新たに公式を三つ得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。極限公式や特殊値の式は、恒等式ではないので＜公式＞とした。

なお、一つ前まで載せていた＜M3＞と＜N3＞は、それぞれ＜M2＞と＜N2＞で th^{-1} と $\tan^{-1}$ 間の虚数乗法の関係 ($\text{th}^{-1}(i\alpha) = i \cdot \tan^{-1}(\alpha)$ など) から表裏の関係にあり、互いに即座に移れるので削除した。

以下では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、 $\text{sh}2a$ は $\sinh(2a)$ のことである。 a や b や α は任意の実数であり、よって例えば、 $(a \neq 0)$ は「 a は 0 でない任意の実数」を意味する。 $\tan^{-1}$, th^{-1} は、それぞれ $\arctan$, arctanh である。 e は自然対数の底。

=====

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{\text{cha}-1} - \frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{1}{\text{ch}2a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}6a-\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 1 \rangle$$

($a > 0$)

$$\frac{1}{\text{sha}} - \frac{1}{\text{cha}+1} = 2 \left(\frac{1}{\text{ch}2a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}6a+\text{cha}} + \frac{1}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 2 \rangle$$

($a > 0$)

$$\frac{1}{\text{sh}^2(a/2)} = 4 \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a-\text{cha}} + \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 3 \rangle$$

($a \neq 0$)

$$\frac{1}{\text{ch}^2(a/2)} = 4 \left(\frac{\text{cha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} - \frac{\text{ch}2a}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{\text{ch}3a}{\text{ch}6a+\text{cha}} - \frac{\text{ch}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 4 \rangle$$

($a \neq 0$)

$$\frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a-\text{cha}} - \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a-\text{cha}} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a-\text{cha}} - \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a-\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 5 \rangle$$

($a \neq 0$)

$$\frac{1}{\text{sha}} = 2 \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a+\text{cha}} + \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a+\text{cha}} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 6 \rangle$$

($a \neq 0$)

$$\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)} - \frac{1}{2} = \left(\frac{\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}2a-\operatorname{cha}} - 1\right) - \left(\frac{\operatorname{sh}4a}{\operatorname{ch}4a-\operatorname{cha}} - 1\right) + \left(\frac{\operatorname{sh}6a}{\operatorname{ch}6a-\operatorname{cha}} - 1\right) - \left(\frac{\operatorname{sh}8a}{\operatorname{ch}8a-\operatorname{cha}} - 1\right) + - \cdot \cdot - <7-1>$$

(a > 0)

$$\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}\right)} = \left(1 - \frac{\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}2a+\operatorname{cha}}\right) - \left(1 - \frac{\operatorname{sh}4a}{\operatorname{ch}4a+\operatorname{cha}}\right) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}6a}{\operatorname{ch}6a+\operatorname{cha}}\right) - \left(1 - \frac{\operatorname{sh}8a}{\operatorname{ch}8a+\operatorname{cha}}\right) + - \cdot \cdot - <7-2>$$

(a > 0)

$$\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{\operatorname{ch}2a-\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}2a+\operatorname{cha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}4a+\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}4a-\operatorname{cha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}6a-\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}6a+\operatorname{cha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}8a+\operatorname{cha}}{\operatorname{ch}8a-\operatorname{cha}}\right) \times \cdot \cdot \text{----} <E1>$$

(a > 0)

$$\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{\operatorname{sh}2a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}2a+\operatorname{sha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{sh}4a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}4a+\operatorname{sha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{sh}6a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}6a+\operatorname{sha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{sh}8a-\operatorname{sha}}{\operatorname{sh}8a+\operatorname{sha}}\right) \times \cdot \cdot \text{----} <E2>$$

(a > 0)

$$\frac{1}{(e^a-1)} + \frac{1}{2(e^{2a}-1)} + \frac{1}{3(e^{3a}-1)} + \frac{1}{4(e^{4a}-1)} + \cdot \cdot$$

$$= \log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})} \times \frac{1}{(1-e^{-2a})} \times \frac{1}{(1-e^{-3a})} \times \frac{1}{(1-e^{-4a})} \times \cdot \cdot\right) \text{----} <F1>$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2(a/2)} = 4\operatorname{sha}\left(\frac{\operatorname{sh}2a}{(\operatorname{ch}2a-\operatorname{cha})^2} + \frac{\operatorname{sh}4a}{(\operatorname{ch}4a-\operatorname{cha})^2} + \frac{\operatorname{sh}6a}{(\operatorname{ch}6a-\operatorname{cha})^2} + \frac{\operatorname{sh}8a}{(\operatorname{ch}8a-\operatorname{cha})^2} + \cdot \cdot\right) \text{---} <G1>$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(a/2)} = 4\operatorname{sha}\left(\frac{\operatorname{sh}2a}{(\operatorname{ch}2a+\operatorname{cha})^2} + \frac{\operatorname{sh}4a}{(\operatorname{ch}4a+\operatorname{cha})^2} + \frac{\operatorname{sh}6a}{(\operatorname{ch}6a+\operatorname{cha})^2} + \frac{\operatorname{sh}8a}{(\operatorname{ch}8a+\operatorname{cha})^2} + \cdot \cdot\right) \text{---} <G2>$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{e^a-1} - \frac{3}{e^{3a}-1} + \frac{5}{e^{5a}-1} - \frac{7}{e^{7a}-1} + - \cdot \cdot = \frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}2a+1} + \frac{\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}4a+1} + \frac{\operatorname{sh}3a}{\operatorname{ch}6a+1} + \frac{\operatorname{sh}4a}{\operatorname{ch}8a+1} + \cdot \cdot \text{---} <K1>$$

(a > 0)

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{\text{chb}}{\text{sha}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\text{chb}}{\text{sh3a}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{chb}}{\text{sh5a}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\text{chb}}{\text{sh7a}}\right) + - \cdot \cdot \\ = \frac{\text{chb}}{1\text{cha}} - \frac{\text{ch3b}}{3\text{ch3a}} + \frac{\text{ch5b}}{5\text{ch5a}} - \frac{\text{ch7b}}{7\text{ch7a}} + - \cdot \cdot \quad \text{---<L1>} \\ (|b| \leq a \text{ 且 } a \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan^{-1}\left(\frac{\text{shb}}{\text{cha}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{shb}}{\text{ch3a}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{shb}}{\text{ch5a}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{shb}}{\text{ch7a}}\right) + \cdot \cdot \\ = \frac{\text{shb}}{1\text{sha}} - \frac{\text{sh3b}}{3\text{sh3a}} + \frac{\text{sh5b}}{5\text{sh5a}} - \frac{\text{sh7b}}{7\text{sh7a}} + - \cdot \cdot \quad \text{---<L2>} \\ (|b| \leq a \text{ 且 } a \neq 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\text{sha}} + \frac{\alpha^2}{2\text{sh2a}} + \frac{\alpha^3}{3\text{sh3a}} + \frac{\alpha^4}{4\text{sh4a}} + \cdot \cdot \\ = 2\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})} \times \frac{1}{(1-\alpha e^{-3a})} \times \frac{1}{(1-\alpha e^{-5a})} \times \frac{1}{(1-\alpha e^{-7a})} \times \cdot \cdot\right) \quad \text{----<M1>} \\ (|\alpha| < e^a \text{ 且 } a > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\text{sha}} + \frac{\alpha^3}{3\text{sh3a}} + \frac{\alpha^5}{5\text{sh5a}} + \frac{\alpha^7}{7\text{sh7a}} + \cdot \cdot \\ = 2\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^a}\right) + \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right) + \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right) + \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right) + \cdot \cdot\right) \quad \text{----<M2>} \\ (|\alpha| < e^a \text{ 且 } a > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\text{cha}} + \frac{\alpha^2}{2\text{ch2a}} + \frac{\alpha^3}{3\text{ch3a}} + \frac{\alpha^4}{4\text{ch4a}} + \cdot \cdot \\ = 2\left(\log\frac{1}{1-\alpha e^{-a}} - \log\frac{1}{1-\alpha e^{-3a}} + \log\frac{1}{1-\alpha e^{-5a}} - \log\frac{1}{1-\alpha e^{-7a}} + - \cdot \cdot\right) \quad \text{---<N1>} \\ (|\alpha| < e^a \text{ 且 } a > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\text{cha}} + \frac{\alpha^3}{3\text{ch3a}} + \frac{\alpha^5}{5\text{ch5a}} + \frac{\alpha^7}{7\text{ch7a}} + \cdot \cdot \\ = 2\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^a}\right) - \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right) + \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right) - \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right) + - \cdot \cdot\right) \quad \text{---<N2>} \\ (|\alpha| < e^a \text{ 且 } a > 0) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{tha} - \frac{1}{2th2a} + \frac{1}{3th3a} - \frac{1}{4th4a} + \cdots$$

$$= \log \left\{ 2 \left((1 + e^{-2a})(1 + e^{-4a})(1 + e^{-6a})(1 + e^{-8a}) \cdots \right)^2 \right\} \quad \text{---<Q1>}$$

(a > 0)

< 公式 >

◆√2 極限公式

$$\sqrt{2} = \lim_{a \rightarrow 0} (1 + e^{-a}) \times 1/(1 + e^{-3a}) \times (1 + e^{-5a}) \times 1/(1 + e^{-7a}) \times \cdots \quad \text{---<N1-2>}$$

(a > 0)

◆√2 極限公式（別バージョン）

$$\sqrt{2} = \lim_{a \rightarrow 0} (1 + e^{-a}) \times 1/(1 + e^{-2a}) \times (1 + e^{-3a}) \times 1/(1 + e^{-4a}) \times \cdots \quad \text{---<P1>}$$

(a > 0)

◆ゼータの香りの漂う公式（特殊値が得られたケース）

$$\frac{1}{th\pi} - \frac{1}{2th2\pi} + \frac{1}{3th3\pi} - \frac{1}{4th4\pi} + \cdots = (1/4)\log 2 + \frac{\pi}{6} \quad \text{-----<Q1-2>}$$

=====

これら三つの青色式が得られた。<Q 1>は任意の実数 a（条件付き）で成り立つので、恒等式となっている。なお、これらは Excel での数値検証でも正しいことを確認している。これら導出の途上でも様々な恒等式が出てきたが、最終のものに絞っている。

さて、<Q 1>は“三変数・第一基本フーリエ Cos 版母等式”という母等式から出るのであるが、その名称は私独自のものである。その形は[ゼータの香りの・・・（その341）](#)での<M 1>の証明での母等式に似ているので、三変数母等式というものが気になる読者はそちらを参照いただきたい。

佐藤郁郎氏の次頁を見ていて、<Q 1>の右辺にテータ関数が出ている！ことに気づいた。

[可積分系とコマ（その17）](#) (ikuro-kotaro.sakura.ne.jp)

つまり<Q 1>右辺の

$$(1 + e^{-2a})(1 + e^{-4a})(1 + e^{-6a})(1 + e^{-8a}) \cdots$$

は、上記サイトのΘ1と実質的に同じである！と分かったのである。

さらに私は「テータ関数は有名な関数だから、もしかしたらその特殊値が知られているのではなかろうか？」と思い、web を検索したら次サイトにぶち当たった。

[テータ関数, イータ関数の特殊値を求める | Mathlog](#)

あった！なんとテータの値が後半の例5に $\prod (1+e^{-2n\pi}) = e^{\pi/12} \cdot 2^{-3/8}$ として出ている！

私はそれを＜Q 1＞にそっくり利用し、そして＜Q 1-2＞という貴重な式を得たのであった。

また、＜P 1＞の $\sqrt{2}$ 極限公式（別バージョン）も今回出た。これは、先に出した $\sqrt{2}$ 極限公式と似ているが違っており、ふしぎを醸し出している。＜P 1＞は三変数・別種2基本フーリエ Cos 版母等式から出た。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

● 先に出した $\sqrt{2}$ 極限公式と今回の別バージョンを並べよう。

◆ $\sqrt{2}$ 極限公式

$$\sqrt{2} = \lim_{a \rightarrow 0} (1 + e^{-a}) \times 1/(1 + e^{-3a}) \times (1 + e^{-5a}) \times 1/(1 + e^{-7a}) \times \cdots \text{---<N1-2>} \\ (a > 0)$$

◆ $\sqrt{2}$ 極限公式（別バージョン）

$$\sqrt{2} = \lim_{a \rightarrow 0} (1 + e^{-a}) \times 1/(1 + e^{-2a}) \times (1 + e^{-3a}) \times 1/(1 + e^{-4a}) \times \cdots \text{---<P1>} \\ (a > 0)$$

並べると余計にふしぎな感じがある。どちらも一つおきに逆数が掛かっていく。

これらの背後にどこかテータ関数が関係しているような気がしたが、なにがどう関係しているのか、さっぱりわからない状態であった。

●＜Q 1＞と＜Q 1-2＞を並べよう。

$$\frac{1}{\text{tha}} - \frac{1}{2\text{th}2a} + \frac{1}{3\text{th}3a} - \frac{1}{4\text{th}4a} + \cdots \\ = \log \left\{ 2 \left((1 + e^{-2a})(1 + e^{-4a})(1 + e^{-6a})(1 + e^{-8a}) \cdots \right)^2 \right\} \text{---<Q1>} \\ (a > 0)$$

$$\frac{1}{\text{th}\pi} - \frac{1}{2\text{th}2\pi} + \frac{1}{3\text{th}3\pi} - \frac{1}{4\text{th}4\pi} + \cdots = (1/4)\log 2 + \frac{\pi}{6} \text{-----<Q1-2>}$$

先に述べた通り、＜Q 1-2＞は＜Q 1＞から出た。＜Q 1-2＞左辺はゼータの香りが漂い、双曲線ゼータの類似物のような優美な式だが、その特殊値が得られた！という形となった。そしてそれは、ラマヌジャンの幾多の公式 $\sum n^s / (e^{2n\pi} - 1)$ と同じ泉から出てきているように感じる。

●＜Q 1-2＞は重要で数学好きの人が好む式であるが、柿の木でたとえれば、それは柿にあたる。＜Q 1＞は枝であり、三変数母等式は幹である。ただし枝も幹も根がないと生まれない。

その根は、[ゼータの香りの・・・\(その307\)](#)で示したフーリエ級数と深フーリエ級数である。じつは深～はあと二つある。(フーリエ級数などを書いたが、実質的には恒等式である)

構造はこのような形になっている。柿もよいが、根が基本的である。

● テータ関数はよく耳にするが、私はこれまでほとんど関心がなかった。おそらくヤコビやガウスが開発した関数だが、ガウスはそのあたり公表していないので(ただし手記から深い研究を行っている、数学史)、主にヤコビの仕事であると思う。

今回、テータ関数の定理とのつながりから＜Q 1-2＞が出たわけだが、出たときは感動した。それは、三角関数と双曲線関数の融合域の中でも、二変数域からではなく、三変数域からとび出てきたのであった。

三角&双曲融合域はある大地底湖を形成している。一方、テータ関数、楕円積分、楕円関数の領域も別の巨大地底湖を形成している。私は前者でずっとやってきたが、前者が後者とトンネルでつながっていることは、＜F 1＞あたりから感じはじめていた。そしてそれは＜Q 1＞で決定的となった。

$$\frac{1}{(e^a-1)} + \frac{1}{2(e^{2a}-1)} + \frac{1}{3(e^{3a}-1)} + \frac{1}{4(e^{4a}-1)} + \cdots$$

$$= \log \left(\frac{1}{(1-e^{-a})} \times \frac{1}{(1-e^{-2a})} \times \frac{1}{(1-e^{-3a})} \times \frac{1}{(1-e^{-4a})} \times \cdots \right) \quad \text{----<F1>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{tha} - \frac{1}{2th2a} + \frac{1}{3th3a} - \frac{1}{4th4a} + \cdots$$

$$= \log \left\{ 2 \left((1 + e^{-2a})(1 + e^{-4a})(1 + e^{-6a})(1 + e^{-8a}) \cdots \right)^2 \right\} \quad \text{---<Q1>}$$

(a > 0)

＜Q 1＞で a→∞ とすると、1-1/2+1/3-1/4+-・・・=log2 となる。

=====

2024. 10. 20 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
- ・「数学公式Ⅰ」「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)
- ・[テータ関数, イータ関数の特殊値を求める | Mathlog](#)
- ・[可積分系とコマ \(その17\) \(ikuro-kotaro.sakura.ne.jp\)](#)