

＜ 三角関数と双曲線関数の融合域（その 1 4） ＞

新種と考えられる二変数恒等式を三つ得たので下方に青色式で示す。これまでの主要なものと一緒に示した。

以下では、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$, $\tanh$ はそれぞれ sh , ch , th と略記した。例えば、 $sh2a$ は $\sinh(2a)$ のことである。 a や b また x や α は任意の実数であり、よって例えば、 $(a \neq 0)$ は「 a は 0 でない任意の実数」を意味する。 $\tan^{-1}$, th^{-1} は、それぞれ $\arctan$, $\operatorname{arctanh}$ である。

=====

＜ 恒等式 ＞

$$\frac{1}{ch a - 1} - \frac{1}{sh a} = 2 \left(\frac{1}{ch 2a - cha} + \frac{1}{ch 4a - cha} + \frac{1}{ch 6a - cha} + \frac{1}{ch 8a - cha} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 1 \rangle$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{sh a} - \frac{1}{ch a + 1} = 2 \left(\frac{1}{ch 2a + cha} + \frac{1}{ch 4a + cha} + \frac{1}{ch 6a + cha} + \frac{1}{ch 8a + cha} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 2 \rangle$$

$(a > 0)$

$$\frac{1}{sh^2(a/2)} = 4 \left(\frac{cha}{ch 2a - cha} + \frac{ch 2a}{ch 4a - cha} + \frac{ch 3a}{ch 6a - cha} + \frac{ch 4a}{ch 8a - cha} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 3 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{ch^2(a/2)} = 4 \left(\frac{cha}{ch 2a + cha} - \frac{ch 2a}{ch 4a + cha} + \frac{ch 3a}{ch 6a + cha} - \frac{ch 4a}{ch 8a + cha} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 4 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{sha} = 2 \left(\frac{sha}{ch 2a - cha} - \frac{sh 2a}{ch 4a - cha} + \frac{sh 3a}{ch 6a - cha} - \frac{sh 4a}{ch 8a - cha} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 5 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{1}{sha} = 2 \left(\frac{sha}{ch 2a + cha} + \frac{sh 2a}{ch 4a + cha} + \frac{sh 3a}{ch 6a + cha} + \frac{sh 4a}{ch 8a + cha} + \cdots \right) \quad \text{-----} \langle 6 \rangle$$

$(a \neq 0)$

$$\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}2a - \operatorname{cha}} - 1 \right) - \left(\frac{\operatorname{sh}4a}{\operatorname{ch}4a - \operatorname{cha}} - 1 \right) + \left(\frac{\operatorname{sh}6a}{\operatorname{ch}6a - \operatorname{cha}} - 1 \right) - \left(\frac{\operatorname{sh}8a}{\operatorname{ch}8a - \operatorname{cha}} - 1 \right) + \cdots \quad \text{---<7-1>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{2} - \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{2}\right)}{2\operatorname{ch}\left(\frac{a}{2}\right)}$$

$$= \left(1 - \frac{\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}2a + \operatorname{cha}} \right) - \left(1 - \frac{\operatorname{sh}4a}{\operatorname{ch}4a + \operatorname{cha}} \right) + \left(1 - \frac{\operatorname{sh}6a}{\operatorname{ch}6a + \operatorname{cha}} \right) - \left(1 - \frac{\operatorname{sh}8a}{\operatorname{ch}8a + \operatorname{cha}} \right) + \cdots \quad \text{---<7-2>}$$

(a > 0)

$$\left(\frac{1}{2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sha}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}2a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}4a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}6a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{cha}}{\operatorname{sh}8a}\right) + \cdots \quad \text{---}$$

(a ≠ 0)

$$\left(\frac{1}{2}\right) \tan^{-1}\left(\frac{1}{\operatorname{sha}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}2a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}4a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}6a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\operatorname{sha}}{\operatorname{ch}8a}\right) + \cdots \quad \text{---<D>}$$

(a ≠ 0)

$$\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{\operatorname{ch}2a - \operatorname{cha}}{\operatorname{ch}2a + \operatorname{cha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}4a + \operatorname{cha}}{\operatorname{ch}4a - \operatorname{cha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}6a - \operatorname{cha}}{\operatorname{ch}6a + \operatorname{cha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{ch}8a + \operatorname{cha}}{\operatorname{ch}8a - \operatorname{cha}}\right) \times \cdots \quad \text{---<E1>}$$

(a > 0)

$$\operatorname{th}\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{\operatorname{sh}2a - \operatorname{sha}}{\operatorname{sh}2a + \operatorname{sha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{sh}4a - \operatorname{sha}}{\operatorname{sh}4a + \operatorname{sha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{sh}6a - \operatorname{sha}}{\operatorname{sh}6a + \operatorname{sha}}\right) \times \left(\frac{\operatorname{sh}8a - \operatorname{sha}}{\operatorname{sh}8a + \operatorname{sha}}\right) \times \cdots \quad \text{---<E2>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{(e^a - 1)} + \frac{1}{2(e^{2a} - 1)} + \frac{1}{3(e^{3a} - 1)} + \frac{1}{4(e^{4a} - 1)} + \cdots$$

$$= \log\left(\frac{1}{(1 - e^{-a})} \times \frac{1}{(1 - e^{-2a})} \times \frac{1}{(1 - e^{-3a})} \times \frac{1}{(1 - e^{-4a})} \times \cdots\right) \quad \text{---<F1>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{\text{sh}^2(a/2)} = 4\text{sha} \left(\frac{\text{sh}2a}{(\text{ch}2a - \text{cha})^2} + \frac{\text{sh}4a}{(\text{ch}4a - \text{cha})^2} + \frac{\text{sh}6a}{(\text{ch}6a - \text{cha})^2} + \frac{\text{sh}8a}{(\text{ch}8a - \text{cha})^2} + \cdots \right) \text{---<G1>}$$

(a ≠ 0)

$$\frac{1}{\text{ch}^2(a/2)} = 4\text{sha} \left(\frac{\text{sh}2a}{(\text{ch}2a + \text{cha})^2} + \frac{\text{sh}4a}{(\text{ch}4a + \text{cha})^2} + \frac{\text{sh}6a}{(\text{ch}6a + \text{cha})^2} + \frac{\text{sh}8a}{(\text{ch}8a + \text{cha})^2} + \cdots \right) \text{---<G2>}$$

(a ≠ 0)

$$\text{tha} = \left(\frac{\text{ch}3a}{\text{cha}} \cdot \frac{\text{th}2a - \text{tha}}{\text{th}2a + \text{tha}} \right) \times \left(\frac{\text{ch}5a}{\text{ch}3a} \cdot \frac{\text{th}4a - \text{tha}}{\text{th}4a + \text{tha}} \right) \times \left(\frac{\text{ch}7a}{\text{ch}5a} \cdot \frac{\text{th}6a - \text{tha}}{\text{th}6a + \text{tha}} \right) \times \left(\frac{\text{ch}9a}{\text{ch}7a} \cdot \frac{\text{th}8a - \text{tha}}{\text{th}8a + \text{tha}} \right) \times \cdots \text{---<J>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{e^a - 1} - \frac{3}{e^{3a} - 1} + \frac{5}{e^{5a} - 1} - \frac{7}{e^{7a} - 1} + \cdots = \frac{\text{sha}}{\text{ch}2a + 1} + \frac{\text{sh}2a}{\text{ch}4a + 1} + \frac{\text{sh}3a}{\text{ch}6a + 1} + \frac{\text{sh}4a}{\text{ch}8a + 1} + \cdots \text{---<K1>}$$

(a > 0)

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3x^2}{1-x^3} + \frac{5x^4}{1-x^5} - \frac{7x^6}{1-x^7} + \cdots$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{x(1-x^4)}{(1+x^4)^2} + \frac{x^2(1-x^6)}{(1+x^6)^2} + \frac{x^3(1-x^8)}{(1+x^8)^2} + \cdots \text{---<K2>}$$

(|x| < 1)

<K1>と<K2>は同値

$$\tan^{-1} \left(\frac{\text{ch}b}{\text{sha}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\text{ch}b}{\text{sh}3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{ch}b}{\text{sh}5a} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\text{ch}b}{\text{sh}7a} \right) + \cdots$$

$$= \frac{\text{ch}b}{1\text{cha}} - \frac{\text{ch}3b}{3\text{ch}3a} + \frac{\text{ch}5b}{5\text{ch}5a} - \frac{\text{ch}7b}{7\text{ch}7a} + \cdots \text{---<L1>}$$

(|b| ≤ a 且つ a ≠ 0)

$$\tan^{-1} \left(\frac{\text{sh}b}{\text{cha}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sh}b}{\text{ch}3a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sh}b}{\text{ch}5a} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\text{sh}b}{\text{ch}7a} \right) + \cdots$$

$$= \frac{\text{sh}b}{1\text{sha}} - \frac{\text{sh}3b}{3\text{sh}3a} + \frac{\text{sh}5b}{5\text{sh}5a} - \frac{\text{sh}7b}{7\text{sh}7a} + \cdots \text{---<L2>}$$

(|b| ≤ a 且つ a ≠ 0)

下記 A 1 は＜L 1＞での b=a の特殊ケース

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sha}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh3a}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh5a}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\text{cha}}{\text{sh7a}}\right) + \cdots \quad \text{--- A 1}$$

(a > 0)

下記 A 2 は＜L 2＞での b=a の特殊ケース

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{cha}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch3a}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch5a}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{sha}}{\text{ch7a}}\right) + \cdots \quad \text{--- A 2}$$

(a > 0)

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\text{sha}} + \frac{\alpha^2}{2\text{sh2a}} + \frac{\alpha^3}{3\text{sh3a}} + \frac{\alpha^4}{4\text{sh4a}} + \cdots \\ & = 2\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})} \times \frac{1}{(1-\alpha e^{-3a})} \times \frac{1}{(1-\alpha e^{-5a})} \times \frac{1}{(1-\alpha e^{-7a})} \times \cdots\right) \quad \text{----<M1>} \\ & \quad (|\alpha| < e^a \text{ 且つ } a > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\text{sha}} + \frac{\alpha^3}{3\text{sh3a}} + \frac{\alpha^5}{5\text{sh5a}} + \frac{\alpha^7}{7\text{sh7a}} + \cdots \\ & = 2\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^a}\right) + \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right) + \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right) + \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right) + \cdots\right) \quad \text{----<M2>} \\ & \quad (|\alpha| < e^a \text{ 且つ } a > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\text{sha}} - \frac{\alpha^3}{3\text{sh3a}} + \frac{\alpha^5}{5\text{sh5a}} - \frac{\alpha^7}{7\text{sh7a}} + \cdots \\ & = 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right) + \cdots\right) \quad \text{---<M3>} \\ & \quad (|\alpha| < e^a \text{ 且つ } a > 0) \end{aligned}$$

=====

これら青色の三式＜M 1＞～＜M 3＞が得られた。いずれも任意の二変数（条件付き）で成り立つので二変数恒等式となっている。なお、これらは、Excel での数値検証でも正しいことを確認している。

＜F 1＞を再掲。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(e^a-1)} + \frac{1}{2(e^{2a}-1)} + \frac{1}{3(e^{3a}-1)} + \frac{1}{4(e^{4a}-1)} + \cdots \\ & = \log\left(\frac{1}{(1-e^{-a})} \times \frac{1}{(1-e^{-2a})} \times \frac{1}{(1-e^{-3a})} \times \frac{1}{(1-e^{-4a})} \times \cdots\right) \quad \text{----<F1>} \\ & \quad (a > 0) \end{aligned}$$

<M 1>で α を e^{-a} として最後に $2a$ を a で置き換えれば<F 1>になる。したがって、<M 1>は<F 1>の一般化になっている。<F 1>は上記右辺 $\log$ の中にデデキントの η (イータ)関数と本質的に同じものが出ており、特別な式である。

<M 2>は<M 1>から導出される。<M 1>での α を $-\alpha$ で置き換えた式Aを出し、<M 1>からAを辺々引き算して、公式集にある公式 $\text{th}^{-1}x = (1/2) \log \{ (1+x)/(1-x) \}$ を使えば<M 2>が出る。

また<M 3>は<M 2>から簡単に出る。<M 2>の α を形式的に $i\alpha$ として (i : 虚数単位)、公式集の公式 $\text{th}^{-1}(ix) = i \cdot \tan^{-1}x$ を使えば<M 3>が出る。母等式からでも<M 3>が出るはずだが、 i を使えば途中をワープするがごとく瞬時に得られる。

<M 1>の導出方法 (証明) を以下に記す。紙幅を節約するため概要のみ示した。

=====

<M 1>の証明の概要

下式の左辺から出発する。それに対し、12年前の[こちらの](#)2012/8/16の[導出]での手法の類似的な方法を使って変形していき[1]に到達する。途中で[ゼータの香りの漂う・・・\(その307\)](#)でのフーリエ級数⑥を使った。この[1]は、三角関数と双曲線関数の融合域 (三変数) の母等式の一つである。

$$\frac{\sin x}{e^a - \alpha} - \frac{\sin 3x}{e^{3a} - \alpha} + \frac{\sin 5x}{e^{5a} - \alpha} - \frac{\sin 7x}{e^{7a} - \alpha} + \cdots = \sin x \left(\frac{\text{sha}}{\text{ch}2a + \cos 2x} + \frac{\alpha \cdot \text{sh}2a}{\text{ch}4a + \cos 2x} + \frac{\alpha^2 \cdot \text{sh}3a}{\text{ch}6a + \cos 2x} + \frac{\alpha^3 \cdot \text{sh}4a}{\text{ch}8a + \cos 2x} + \cdots \right) \text{---[1]}$$

($a > 0$ 、 $|\alpha| < e^a$, x は任意実数)

上式に対し両辺を $0 \sim \alpha$ の範囲で α で積分して次の[2]を得る。

$$-\sin x \cdot \log(1 - \alpha/e^a) + \sin 3x \cdot \log(1 - \alpha/e^{3a}) - \sin 5x \cdot \log(1 - \alpha/e^{5a}) + \sin 7x \cdot \log(1 - \alpha/e^{7a}) - + \cdots$$

$$= \sin x \left(\frac{\alpha \cdot \text{sha}}{\text{ch}2a + \cos 2x} + \frac{(\alpha^2/2) \cdot \text{sh}2a}{\text{ch}4a + \cos 2x} + \frac{(\alpha^3/3) \cdot \text{sh}3a}{\text{ch}6a + \cos 2x} + \frac{(\alpha^4/4) \cdot \text{sh}4a}{\text{ch}8a + \cos 2x} + \cdots \right) \text{---[2]}$$

($a > 0$ 、 $|\alpha| < e^a$, x は任意実数)

上式の x に $\pi/2$ を代入して、左辺と右辺を入れ替えれば、<M 1>になる。

終わり。

=====

このようにして<M 1>が得られた。

最後に、気になる点や想うことなど述べておく。

=====

- 最近、三変数域に入った。これまで三角関数と双曲線関数の融合域の二変数の地帯を探索してきたが、その向こうにある三変数の地帯を調べはじめた。二変数地帯はきれいな領域であるが、三変数地帯は深い森である。後者は霧がかかっていてわかりにくい。そのわかりにくさは、パラメータの数が多く組み合わせが格段に増えるところから来ている。二変数域は美しいものしかなかったが、三変数域はおそろしい感じがある。

●上方の＜M 1＞の証明中の[1]の母等式が重要である。ただし、これは数ある母等式の一つであって母等式は系列的にたくさんある。三変数の母等式（基本式）はこういう形をしているという一例となっている。

● ＜M 1＞を再掲。

$$\frac{\alpha}{\text{sha}} + \frac{\alpha^2}{2\text{sh}2a} + \frac{\alpha^3}{3\text{sh}3a} + \frac{\alpha^4}{4\text{sh}4a} + \cdots$$

$$= 2\log\left(\frac{1}{(1-\alpha e^{-a})} \times \frac{1}{(1-\alpha e^{-3a})} \times \frac{1}{(1-\alpha e^{-5a})} \times \frac{1}{(1-\alpha e^{-7a})} \times \cdots\right) \quad \text{----<M1>}$$

(| α | < e^a 且つ $a > 0$)

左辺は α のべき級数の形になっていて右辺のフーリエ展開と解釈でき、興味深い。＜M 1＞は＜F 1＞などよりずっと深い。両辺を α で微分しつづけても面白いことが出るが、一旦略。

●＜M 2＞と＜M 3＞を並べたい。鏡映的なシンメトリー（対称性）が美しい！

$$\frac{\alpha}{\text{sha}} + \frac{\alpha^3}{3\text{sh}3a} + \frac{\alpha^5}{5\text{sh}5a} + \frac{\alpha^7}{7\text{sh}7a} + \cdots$$

$$= 2\left(\text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^a}\right) + \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right) + \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right) + \text{th}^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right) + \cdots\right) \quad \text{----<M2>}$$

(| α | < e^a 且つ $a > 0$)

$$\frac{\alpha}{\text{sha}} - \frac{\alpha^3}{3\text{sh}3a} + \frac{\alpha^5}{5\text{sh}5a} - \frac{\alpha^7}{7\text{sh}7a} + \cdots$$

$$= 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^a}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{3a}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{5a}}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{e^{7a}}\right) + \cdots\right) \quad \text{----<M3>}$$

(| α | < e^a 且つ $a > 0$)

● ＜M 2＞は、1年以上前の[ゼータの香りの漂う・・・\(その293\)](#)の[1]の一般化になっている。

$$\frac{1}{\text{sh}2a} + \frac{1}{3\text{sh}6a} + \frac{1}{5\text{sh}10a} + \frac{1}{7\text{sh}14a} + \cdots = \log \frac{\text{cha}}{\text{sha}} + \log \frac{\text{ch}3a}{\text{sh}3a} + \log \frac{\text{ch}5a}{\text{sh}5a} + \log \frac{\text{ch}7a}{\text{sh}7a} + \cdots \quad \text{--[1]}$$

($a > 0$)

＜M 2＞で $\alpha=1$ 、 $a=2a$ として、公式 $\text{th}^{-1}x = (1/2) \log\{(1+x)/(1-x)\}$ を使えば、[1]に行き着く。

=====

2024. 10. 5 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「マグロウヒル 数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)
- ・「数学公式Ⅰ」「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)