＜ 三角関数と双曲線関数の融合域　その１３ ＞

新たに積分式（二変数恒等式）が二つ得られたので下方に青色で示す（これらは本質的には同値である)。これまでの式と一緒に示した。なお、[E9]は[E15]の特殊ケース、[E8]は[E16]の特殊ケースになっていたので削除し欠番とした。

以降において、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan, arctanh。log は自然対数。L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

L(1)＝1 −1/3 +1/5 −1/7 +−・・＝π/4
L(2)＝1 $-1/3^2$ $+1/5^2$ $-1/7^2$ +−・・=0.91596559・・＝カタランの定数
Z(2)＝(3/4)ζ(2)＝1 $+1/3^2$ $+1/5^2$ $+1/7^2$ +・・＝$\pi^2/8$

さらに Z(s)は、私が独自に使っているもので、Z(s)＝1 $+1/3^s$ $+1/5^s$ $+1/7^s$ +・・＝$(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的にζ(s)そのものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜ 積分式 ＞

$$\log 2 = ((a^2+1)/2)\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}\,ax+\cos x}dx \qquad \text{------[A3]}$$
(a は 0 でない任意の実数)

$$\log 2 = ((a^2-1)/2)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,ax+\mathrm{ch}\,x}dx \qquad \text{------[A5]}$$
(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\pi = \int_0^\infty (1/a)\log\left(\frac{\mathrm{ch}\,x+\sin a}{\mathrm{ch}\,x-\sin a}\right)dx \qquad \text{------[B3]}$$
(a は $0<|a|\le\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to 0$ でも式は成立。)

$$L(1) = \pi/4 = (a^2+1)\int_0^\infty \frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{ch}\,2ax+\cos 2x}dx \qquad \text{------[B4]}$$
(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1) = \pi/4 = (a^2-1)\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{ch}\,2ax+\mathrm{ch}\,2x}dx \qquad \text{------[B6]}$$
(a は 1 より大きい任意の実数)

$$Z(2) = \pi^2/8 = ((a^2+1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx \qquad \text{------[C8]}$$
(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{------[C10]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2-1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x))\}dx \quad \text{---[C13]}$$

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdot\cdot=\pi^2/6=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}ax-\cos x))\}dx \quad \text{---[C15]}$$

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(2)=((a^2-1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{-------[D7]}$$

（a は、|a|が 1 より大きい任意の実数）

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}ax+\sin x}{\mathrm{ch}ax-\sin x}\right)dx \qquad \text{------[D11]}$$

（a は 0 でない任意の実数）

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}x-\cos a}{\mathrm{ch}x-1}\right)dx \qquad \text{-----[I a-1]}$$

（a は 0 ≦ a ≦ 2 π を満たす任意の実数）

$$\frac{\cos a}{1^3}+\frac{\cos 3a}{3^3}+\frac{\cos 5a}{5^3}+\frac{\cos 7a}{7^3}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x}{4}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \qquad \text{-----[I a-2]}$$

（a は任意の実数。cosa は cos(a) のこと）

$$\frac{\sin a}{1^2}+\frac{\sin 3a}{3^2}+\frac{\sin 5a}{5^2}+\frac{\sin 7a}{7^2}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{----[I a-3]}$$

（a は任意の実数）

$$\frac{\sin a}{1^4}+\frac{\sin 3a}{3^4}+\frac{\sin 5a}{5^4}+\frac{\sin 7a}{7^4}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^2}{4}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{----[I a-4]}$$

（a は任意の実数）

$$\frac{\cos a}{1^5}+\frac{\cos 3a}{3^5}+\frac{\cos 5a}{5^5}+\frac{\cos 7a}{7^5}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^3}{24}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \qquad \text{-----[I a-5]}$$

（a は任意の実数）

$$\frac{\sin a}{1^6}+\frac{\sin 3a}{3^6}+\frac{\sin 5a}{5^6}+\frac{\sin 7a}{7^6}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^4}{48}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \qquad \text{----[I a-6]}$$

（a は任意の実数）

$$\frac{\cos a}{1^7}+\frac{\cos 3a}{3^7}+\frac{\cos 5a}{5^7}+\frac{\cos 7a}{7^7}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^5}{480}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \quad\text{-----[I a-7]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^8}+\frac{\sin 3a}{3^8}+\frac{\sin 5a}{5^8}+\frac{\sin 7a}{7^8}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^6}{1440}\right)\tan^{-1}\left(\frac{\sin a}{\mathrm{sh}x}\right)dx \quad\text{----[I a-8]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^9}+\frac{\cos 3a}{3^9}+\frac{\cos 5a}{5^9}+\frac{\cos 7a}{7^9}+\cdot\cdot=\int_0^\infty\left(\frac{x^7}{20160}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}x+\cos a}{\mathrm{ch}x-\cos a}\right)dx \quad\text{-----[I a-9]}$$

(a は任意の実数)

[ゼータの香りの漂う公式に関連した積分式]

$$\frac{a\pi/2}{\mathrm{ch}(a\pi/2)}=2a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{3}{3^2+a^2}+\frac{5}{5^2+a^2}-\frac{7}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\cos x}{\mathrm{ch}(x/a)}dx \quad\text{---[E1]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$(a\pi/2)\mathrm{th}(a\pi/2)=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{5^2+a^2}+\frac{1}{7^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{\mathrm{sh}(x/a)}dx \quad\text{---[E2]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$1-\frac{a\pi}{\mathrm{sh}(a\pi)}=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}-\frac{1}{4^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=2\int_0^\infty\frac{\sin x}{1+e^{(x/a)}}dx \quad\text{---[E4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\frac{a\pi}{\mathrm{th}(a\pi)}-1=2a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{1}{2^2+a^2}+\frac{1}{3^2+a^2}+\frac{1}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=2\int_0^\infty\frac{\sin x}{-1+e^{(x/a)}}dx \quad\text{---[E5]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{\alpha}{2^2+a^2}+\frac{\alpha^2}{3^2+a^2}+\frac{\alpha^3}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{-\alpha+e^{(x/a)}}dx \quad\text{-----[E11]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数, α は $-1\leqq\alpha\leqq 1$ を満たす任意の実数)

$$a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}+\frac{2\alpha}{2^2+a^2}+\frac{3\alpha^2}{3^2+a^2}+\frac{4\alpha^3}{4^2+a^2}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\cos x}{-\alpha+e^{(x/a)}}dx \quad\text{------[E12]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数, α は $-1\leqq\alpha<1$ を満たす任意の実数)

$$a\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{3\alpha}{3^2+a^2}+\frac{5\alpha^2}{5^2+a^2}-\frac{7\alpha^3}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\cos x}{e^{(x/a)}+\alpha\cdot e^{(-x/a)}}dx \quad\text{------[E13]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数, α は $-1<\alpha\leqq 1$ を満たす任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{1}{1^2+a^2}-\frac{\alpha}{3^2+a^2}+\frac{\alpha^2}{5^2+a^2}-\frac{\alpha^3}{7^2+a^2}+-\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\frac{\sin x}{e^{(x/a)}+\alpha\cdot e^{(-x/a)}}dx \quad\text{------[E14]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数, α は $-1\leqq\alpha\leqq 1$ を満たす任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{\alpha}{(1^2+a^2)}+\frac{\alpha^2}{2(2^2+a^2)}+\frac{\alpha^3}{3(3^2+a^2)}+\frac{\alpha^4}{4(4^2+a^2)}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty \sin x\cdot\log\left(\frac{1}{1-\alpha\cdot e^{(-x/a)}}\right)dx \quad \text{---[E15]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数, α は $-1\leqq\alpha\leqq 1$ を満たす任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{\alpha}{(1^2+a^2)}+\frac{\alpha^3}{3(3^2+a^2)}+\frac{\alpha^5}{5(5^2+a^2)}+\frac{\alpha^7}{7(7^2+a^2)}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{2}\right)\log\left(\frac{1+\alpha\cdot e^{(-x/a)}}{1-\alpha\cdot e^{(-x/a)}}\right)dx \quad \text{--[E16]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数, α は $-1\leqq\alpha\leqq 1$ を満たす任意の実数)

注記：[E15]と[E16]は本質的に同値である。

＜(積分)変換公式 ＞

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{ch}\,ax+\cos x}\right)dx = a\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}\,ax+\cos x}dx \quad \text{-----[1-a]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty\left(1-\frac{\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{ch}\,ax+\mathrm{ch}\,x}\right)dx = a\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{ch}\,ax+\mathrm{ch}\,x}dx \quad \text{-----[1-b]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{\cos x\cdot\mathrm{ch}\,ax}{\mathrm{ch}\,2ax+\cos 2x}dx = a\int_0^\infty \frac{\sin x\cdot\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{ch}\,2ax+\cos 2x}dx \quad \text{-----[2-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{ch}\,x\cdot\mathrm{ch}\,ax}{\mathrm{ch}\,2ax+\mathrm{ch}\,2x}dx = a\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{ch}\,2ax+\mathrm{ch}\,2x}dx \quad \text{-----[2-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}\,ax-\mathrm{ch}\,x))\}dx = 2\int_0^\infty\{-ax+\log(2(\mathrm{ch}\,ax+\mathrm{ch}\,x))\}dx \quad \text{---[3-a]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty\{ax-\log(2(\mathrm{ch}\,ax-\cos x))\}dx = 2\int_0^\infty\{-ax+\log(2(\mathrm{ch}\,ax+\cos x))\}dx \quad \text{---[3-b]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}\,ax-\cos x}{\mathrm{ch}\,ax-\mathrm{ch}\,x}\right)dx = 2\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}\,ax+\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,ax+\cos x}\right)dx \quad \text{-------[3-c]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{ch}\,ax}\right)dx = a\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{sh}\,ax}\right)dx \quad \text{-------[4-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \ = a\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \qquad \text{------[4-b]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \ = a\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{------[5-a]}$$

(a は|a|が 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\mathrm{sh}ax}\right)dx \ = a\int_0^\infty \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\sin x}{\mathrm{ch}ax}\right)dx \qquad \text{------[5-b]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\mathrm{sh}ax}dx \ = \mathrm{sh}(\pi/(2a))\int_0^\infty \frac{\cos x}{\mathrm{ch}ax}dx \qquad \text{-------[6-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty \frac{x\cdot\sin x}{\mathrm{ch}ax-\cos x}dx \ = 2\int_0^\infty \frac{x\cdot\sin x}{\mathrm{ch}ax+\cos x}dx \qquad \text{-----[7-a]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\int_0^\infty x\left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax-\mathrm{ch}x}\right)dx \ = 2\int_0^\infty x\left(-1+\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{ch}x}\right)dx \qquad \text{------[8-a]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty x\left(1-\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax-\mathrm{co}x}\right)dx \ = 2\int_0^\infty x\left(-1+\frac{\mathrm{sh}ax}{\mathrm{ch}ax+\mathrm{co}x}\right)dx \qquad \text{------[8-b]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$\int_0^\infty \left\{-ax+\mathrm{th}^{-1}\left(\frac{\mathrm{th}ax}{\mathrm{th}x}\right)\right\}dx \ = 2\int_0^\infty \left\{ax-\mathrm{th}^{-1}(\mathrm{th}x\cdot\mathrm{th}ax)\right\}dx \quad \text{---[9-a]}$$

(a は|a|が 1 より小さい任意の実数)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

青色の二式が得られた。二種類の任意の実数（条件付き）で成り立つので二変数恒等式となっている。[E11]を α について積分して[E15]が得られた。さらに[E15]から変形と演算で[E16]が出た。よって、[E15]と[E16]は本質的に同値である。同値だがどちらの形も役立ちそうなので両方とも示した。

今回の式は<u>ζ(3)の香り</u>が漂っている。

なお、Excel と Wolfram Alpha を使って様々な値を代入して数値検証を行ったが、正しいものであった。

最後に想うことや気付いた点など述べておく。

****
●冒頭で述べたように今回は[E9]と[E8]を削除した。[E8]と[E16]を並べたい。

$$2a^2\left\{\frac{1}{(1^2+a^2)}+\frac{1}{3(3^2+a^2)}+\frac{1}{5(5^2+a^2)}+\frac{1}{7(7^2+a^2)}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty \sin x\cdot \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x/a)}\right)dx \quad \text{---- [E8]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$a^2\left\{\frac{\alpha}{(1^2+a^2)}+\frac{\alpha^3}{3(3^2+a^2)}+\frac{\alpha^5}{5(5^2+a^2)}+\frac{\alpha^7}{7(7^2+a^2)}+\cdot\cdot\right\}=\int_0^\infty\left(\frac{\sin x}{2}\right)\log\left(\frac{1+\alpha\cdot e^{(-x/a)}}{1-\alpha\cdot e^{(-x/a)}}\right)dx \quad \text{--[E16]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数, α は $-1\leqq\alpha\leqq1$ を満たす任意の実数)

　αが 1 のときに[E16]は[E8]に一致する。それは公式集にある公式 $2\mathrm{th}^{-1}x=\log((1+x)/(1-x))$ を使えばすぐにわかる。よって[E8]は[E16]と特殊ケースとなっている。これより[E8]は不要となった。

　[E16]は二変数恒等式になっていて[E8]より広い。左辺はべき級数の形なのでフーリエ級数とも解釈できて深いところに通じている。

　●今回も含めてここ何回かの積分式の結果は、一変数恒等式をより広い二変数恒等式で置き換えていく過程であったといえる。その過程はきれいであり、より広いところへ向かう一般化の方向であった。

　　数学では、類似の追求や一般化をよく行う。私は類似が好きである。

　三角関数と双曲線関数の融合域では、母等式（基本式）がたくさんあって、一つの母等式でうまくいくと「あっちの式でもうまくいくはずだ！」として、似た結果をいくつも出すことができる。それは、イモの根っこをひっぱるとつぎつぎにイモが連なって得られていくのと同じである。だから（くりかえしになるが)、数学はイモ堀りに似ているのである。いつも根っこをみつけたい！と思っているのだけれど、よい根はなかなかみつからない。

****

2024.9.28 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）