

< 三角関数と双曲線関数の融合域 その1 >

--- 積分式の導出 ---

新種と思われる積分式を二つ得たので報告する（以下の青色のもの）。ここ1年で得たものから適当に拾った式も一緒に並べた。

なお、双曲線関数 $\sinh$, $\cosh$ はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は $\sinh(2a)$ のことである。 $\log$ は自然対数。 $\tan^{-1}$ は $\arctan$ 。また $L(1)$ 、 $L(2)$ 、 $Z(2)$ は次のものである。

$$L(1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots = \pi/4$$

$$L(2) = 1 - 1/3^2 + 1/5^2 - 1/7^2 + \dots = 0.91596559 \dots = \text{カタランの定数}$$

$$Z(2) = (3/4) \zeta(2) = 1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + \dots = \pi^2/8$$

$Z(s)$ は、私が独自に使っているもので、 $Z(s) = 1 + 1/3^s + 1/5^s + 1/7^s + \dots = (1 - 1/2^s) \zeta(s)$ であり、本質的に $\zeta(s)$ そのものである。

=====

< 積分式 > [A3]~[D11]までは、[こちら](#)の中から適当に拾ったもの。

$$\log 2 = ((a^2 + 1)/2) \int_0^\infty \frac{\sin x}{\operatorname{ch} ax + \cos x} dx \quad \text{-----[A3]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\log 2 = ((a^2 - 1)/2) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} ax + \operatorname{ch} x} dx \quad \text{-----[A5]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$\pi = \int_0^\infty (1/a) \log \left(\frac{\operatorname{ch} x + \sin a}{\operatorname{ch} x - \sin a} \right) dx \quad \text{-----[B3]}$$

(a は $0 < |a| \leq \pi/2$ を満たす任意の実数。 $a \rightarrow 0$ でも式は成立。)

$$L(1) = \pi/4 = (a^2 + 1) \int_0^\infty \frac{\sin x \cdot \operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} 2ax + \cos 2x} dx \quad \text{-----[B4]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1) = \pi/4 = ((a^2 + 1)/a) \int_0^\infty \frac{\cos x \cdot \operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} 2ax + \cos 2x} dx \quad \text{-----[B5]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(1) = \pi/4 = (a^2 - 1) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} 2ax + \operatorname{ch} 2x} dx \quad \text{-----[B6]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$L(1)=\pi/4=((a^2-1)/a)\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}x \cdot \operatorname{ch}ax}{\operatorname{ch}2ax+\operatorname{ch}2x}dx \quad \text{-----[B7]}$$

(a は 1 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh}ax}\right)dx \quad \text{-----[C8]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(4a))\int_0^\infty \log\left(\frac{\operatorname{ch}ax+\cos x}{\operatorname{ch}ax-\cos x}\right)dx \quad \text{-----[C9]}$$

(a は 0 より大きい任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/(2a))\int_0^\infty \tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sh}ax}\right)dx \quad \text{-----[D9]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\operatorname{ch}ax+\sin x}{\operatorname{ch}ax-\sin x}\right)dx \quad \text{-----[D11]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^\infty \log\left(\frac{\operatorname{ch}x-\cos a}{\operatorname{ch}x-1}\right)dx \quad \text{-----[Ⅲa-1]}$$

(a は $0 \leq a \leq 2\pi$ を満たす任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^3} + \frac{\cos 3a}{3^3} + \frac{\cos 5a}{5^3} + \frac{\cos 7a}{7^3} + \cdots = \int_0^\infty \left(\frac{x}{4}\right) \log\left(\frac{\operatorname{ch}x+\cos a}{\operatorname{ch}x-\cos a}\right)dx \quad \text{-----[Ⅲa-2]}$$

(a は任意の実数。cosa は cos(a) のこと)

$$\frac{\sin a}{1^2} + \frac{\sin 3a}{3^2} + \frac{\sin 5a}{5^2} + \frac{\sin 7a}{7^2} + \cdots = \int_0^\infty \frac{\sin a \cdot x \cdot \operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}2x-\cos 2a}dx \quad \text{-----[Ⅲa-3]}$$

(a は任意の実数)

=====

上記の青色の二式が得られた。これらが Z(3) つまり $\zeta(3)$ や、L(2) を含んでいることはすぐにわかる。

今回の積分式には、 $\zeta(s)$ や L(s) を包含する巨大ゼータ、ディリクレの L 関数 $L(\chi, s)$ の対応するゼータ関数の特殊値を含んでいる。今回の [Ⅲa-2] と [Ⅲa-3] の左辺は、次のようなものになる。

[Ⅲa-2] 左辺 $\Rightarrow$ $L(\chi, s)$ での実 2 次体ゼータに関係している

[Ⅲa-3] 左辺 $\Rightarrow$ $L(\chi, s)$ での虚 2 次体ゼータに関係している

実 2 次体ゼータの代表選手が $\zeta(s)$ であり、虚 2 次体ゼータの代表選手が L(s) である。

例えば、[Ⅲa-2]で $a=0$ としたら $Z(3)$ が出る。[Ⅲa-3]で $a=\pi/2$ とすれば $L(2)$ が出る。

また、[Ⅲa-2]で $a=\pi/4$ としたら $L1(s)$ ゼータの $L1(3)$ が出る。[Ⅲa-3]で $a=\pi/4$ とすれば $L2(s)$ ゼータの $L2(2)$ が出る。

$$L1(3)=1 -1/3^3 -1/5^3 +1/7^3 +1/9^3 -1/11^3 -1/13^3 +1/15^3 + \dots$$

$$L2(2)=1 +1/3^2 -1/5^2 -1/7^2 +1/9^2 +1/11^2 -1/13^2 -1/15^2 + \dots$$

ここで、 $L1(3)$ は、実 2 次体 $Q(\sqrt{2})$ ゼータ $L1(s)$ の $s=3$ に対応。8 で割った余りが 1 と 7 のとき” +”、余りが 3 と 5 のとき” -” の符号になる。

一方、 $L2(2)$ は、虚 2 次体 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータ $L2(s)$ の $s=2$ に対応。8 で割った余りが 1 と 3 のとき” +”、余りが 5 と 7 のとき” -” の符号になる。

注意： $L1$ とか $L2$ の記号自体は私が昔から独自に使っているものであり、一般的ではない。

今回の積分式の導出では、変数定数倍-積分定理（[こちら](#)で証明。名前はまだつけていない）から出た下記の補題 I を使った。

[こちらの「ゼータの香りの・・・（その 307）」](#)で提示した深フーリエ級数[3]とフーリエ級数⑤に補題 I を適用して導いた。前者[3]から[Ⅲa-2]が、後者⑤から[Ⅲa-3]が出る。

<変数定数倍-積分定理>

任意の実関数 $F(x)$ に関して、 $0 \sim \infty$ の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、 $c > 0$ の実定数である。

$$\int_0^{\infty} F(cx) dx = (1/c) \int_0^{\infty} F(x) dx$$

<補題 I（変数定数倍-積分定理から出る）>

任意の実関数 $F(x)$ に関して、 $0 \sim \infty$ の範囲で積分した結果が有限の値となり、且つ $xF'(x)$ が $x \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、 $c > 0$ の実定数である。

$$\int_0^{\infty} xF'(cx) dx = (-1/c^2) \int_0^{\infty} F(x) dx$$

注記： $F'(x)$ は $F(x)$ の微分。

最後に、想うことや気付いた点など述べておく。

- [D11]と今回の二式を並べたい。

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^\infty \log\left(\frac{\operatorname{ch}ax+\sin x}{\operatorname{ch}ax-\sin x}\right)dx \quad \text{-----[D11]}$$

(a は 0 でない任意の実数)

$$\frac{\cos a}{1^3} + \frac{\cos 3a}{3^3} + \frac{\cos 5a}{5^3} + \frac{\cos 7a}{7^3} + \cdots = \int_0^\infty \left(\frac{x}{4}\right) \log\left(\frac{\operatorname{ch}x+\cos a}{\operatorname{ch}x-\cos a}\right)dx \quad \text{-----[Ⅲa-2]}$$

(a は任意の実数)

$$\frac{\sin a}{1^2} + \frac{\sin 3a}{3^2} + \frac{\sin 5a}{5^2} + \frac{\sin 7a}{7^2} + \cdots = \int_0^\infty \frac{\sin a \cdot x \cdot \operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}2x-\cos 2a}dx \quad \text{-----[Ⅲa-3]}$$

(a は任意の実数)

これらはみな、任意の a で成り立つ点でまずふしぎな感じがあるが、青色式の方が $L(\chi, s)$ 特殊値を含む点において、ずっと広い内容を包含している。[D11]は小さいゼータ $L(s)$ の特殊値を表現しているだけである。

とはいうものの、その導出過程は[D11]と青色式では違っていて、その過程から、[D11]の方が青色式よりももっと深いところから来ているような気がする。

- 青色式はフーリエ級数のような形をしているが、これは恒等式と見るのがよりよい見方と思う。

- 昨年秋から新種と思われる積分式を出してきたが、どうしても $\zeta(3)$ や $L(4)$ や $\zeta(5)$ ・ ・ などを出すことができなかった。

ところが今回、補題 I を見つけ、それを使って $\zeta(3)$ つまり $Z(3)$ の積分式を出すことができた。別領域へと通じる通路が見つかった！といえる。ここから補題を改良することで、 $L(4)$ や $\zeta(5)$ の積分式が出るはずである。

- アフリカのナミブ砂漠はカラカラに乾燥した砂漠である。そんなテレビ番組を見た。

ところが驚いたことに、地下には巨大な地底湖がいくつもある。その地底湖を調査している探検家が「潜る度に、新たな発見がある！」と述べていた。

ある地底湖は別の地底湖につながっているのでは？との予想のもと、通じる通路がないか探していた。わずかな隙間があった。人間が通れるぎりぎりの隙間を 30m ほどいくと、別の巨大空間が現れた。探検家は、信じられない！こんな空間（地底湖）があったなんて！！と叫んだ。私が見ている光景と同じだと思った。数学は地底の探検に似ているのである。

2024.6.9 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「数学公式Ⅰ」「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）
- ・「解決！フェルマーの最終定理」（加藤和也著、日本評論社）