＜ 双曲線ゼータとその派生式 その５０ ＞

--- 三変数母等式、新種の積分式と恒等式の導出 ---

今回、新たに三変数の母等式を見出し、そこから新種と思われる積分式と恒等式を得たので報告する。以下の青色のものである。ここ１年で得たもので重要と思うものの中から拾った式も一緒に並べた。

なお、双曲線関数 sinh, cosh, tanh はそれぞれ sh, ch, th と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は「a は 0 より大きい任意の実数」を意味する。log は自然対数、e は自然対数の底である。$\tan^{-1}$, th^{-1} はそれぞれ arctan、arctanh。

また、L(1)、L(2)、Z(2)は次のものである。

$L(1)=1-1/3+1/5-1/7+-\cdots=\pi/4$

$L(2)=1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+-\cdots=0.91596559\cdots$＝カタランの定数

$Z(2)=(3/4)\zeta(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=\pi^2/8$

Z(s)は、私が独自に使っているもので、$Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+\cdots=(1-1/2^s)\zeta(s)$であり、本質的に$\zeta(s)$そのものである。

＝＝

＜恒等式＞

＜1＞以下は、こちらの中から重要と思うものを適当に拾ったもの。

$$\left\{(1-e^{-2a})^{1/1}\times(1-e^{-6a})^{1/3}\times(1-e^{-10a})^{1/5}\times(1-e^{-14a})^{1/7}\times\cdots\right\}^2$$

$$=(\mathrm{th}a)^{1/1}\times(\mathrm{th}2a)^{1/2}\times(\mathrm{th}3a)^{1/3}\times(\mathrm{th}4a)^{1/4}\times\cdots \quad \text{---＜ⅢA-1＞}$$

$(a\geq 0)$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}a-1}-\frac{1}{\mathrm{sh}a}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+\cdots\right) \quad \text{-----＜1＞}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a}-\frac{1}{\mathrm{ch}a+1}=2\left(\frac{1}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}4a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{1}{\mathrm{ch}8a+\mathrm{ch}a}+\cdots\right) \quad \text{-----＜2＞}$$

$(a>0)$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(a/2)}=4\left(\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}2a}{\mathrm{ch}4a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}4a}{\mathrm{ch}8a-\mathrm{ch}a}+\cdots\right) \quad \text{-----＜3＞}$$

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{ch^2(a/2)}=4\left(\frac{cha}{ch2a+cha}-\frac{ch2a}{ch4a+cha}+\frac{ch3a}{ch6a+cha}-\frac{ch4a}{ch8a+cha}+-\cdot\cdot\right)$$ -----<4>

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{sha}=2\left(\frac{sha}{ch2a-cha}-\frac{sh2a}{ch4a-cha}+\frac{sh3a}{ch6a-cha}-\frac{sh4a}{ch8a-cha}+-\cdot\cdot\right)$$ -----<5>

$(a\neq 0)$

$$\frac{1}{sha}=2\left(\frac{sha}{ch2a+cha}+\frac{sh2a}{ch4a+cha}+\frac{sh3a}{ch6a+cha}+\frac{sh4a}{ch8a+cha}+\cdot\cdot\right)$$ -----<6>

$(a\neq 0)$

$$th\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{ch2a-cha}{ch2a+cha}\right)\times\left(\frac{ch4a+cha}{ch4a-cha}\right)\times\left(\frac{ch6a-cha}{ch6a+cha}\right)\times\left(\frac{ch8a+cha}{ch8a-cha}\right)\times\cdot\cdot$$ -----<E1>

$(a>0)$

$$th\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{sh2a-sha}{sh2a+sha}\right)\times\left(\frac{sh4a-sha}{sh4a+sha}\right)\times\left(\frac{sh6a-sha}{sh6a+sha}\right)\times\left(\frac{sh8a-sha}{sh8a+sha}\right)\times\cdot\cdot$$ -----<E2>

$(a>0)$

====================================
====================================

< 積分式 >

[A3]以下は、こちらの中から重要と思うものを適当に拾ったもの。

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^{\infty}\log\left(\frac{chx-cosa}{chx-1}\right)dx$$ -----[Ⅲa-1]

（a は 0 ≦ a ≦ 2π を満たす任意の実数。cosa は cos(a) のこと）

$$\log2=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\frac{sinx}{chax+cosx}dx$$ -----[A3]

（a は 0 でない任意の実数）

$$\log2=((a^2-1)/2)\int_0^{\infty}\frac{shx}{chax+chx}dx$$ -----[A5]

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$\pi=\int_0^{\infty}(1/a)\log\left(\frac{\mathrm{chx}+\mathrm{sina}}{\mathrm{chx}-\mathrm{sina}}\right)dx$$ -----[B3]

（a は 0 < |a| ≤ π/2 を満たす任意の実数。 a → 0 でも式は成立。）

$$L(1)=\pi/4=(a^2+1)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sinx}\cdot\mathrm{shax}}{\mathrm{ch2ax}+\mathrm{cos2x}}dx$$ -----[B4]

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=((a^2+1)/a)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{cosx}\cdot\mathrm{chax}}{\mathrm{ch2ax}+\mathrm{cos2x}}dx$$ -----[B5]

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=(a^2-1)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{shx}\cdot\mathrm{shax}}{\mathrm{ch2ax}+\mathrm{ch2x}}dx$$ -----[B6]

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$L(1)=\pi/4=((a^2-1)/a)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{chx}\cdot\mathrm{chax}}{\mathrm{ch2ax}+\mathrm{ch2x}}dx$$ -----[B7]

（a は 1 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/2)\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{sinx}}{\mathrm{shax}}\right)dx$$ -------[C8]

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$Z(2)=\pi^2/8=((a^2+1)/(4a))\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{chax}+\mathrm{cosx}}{\mathrm{chax}-\mathrm{cosx}}\right)dx$$ -------[C9]

（a は 0 より大きい任意の実数）

$$L(2)=((a^2+1)/(2a))\int_0^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{cosx}}{\mathrm{shax}}\right)dx$$ --------[D9]

（a は 0 でない任意の実数）

$$L(2)=((a^2+1)/4)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{chax}+\mathrm{sinx}}{\mathrm{chax}-\mathrm{sinx}}\right)dx$$ ------[D11]

（a は 0 でない任意の実数）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

上記の青色の二式が得られた。

恒等式＜ⅢA-1＞は形が面白い。なんとなくだが、いま探求しているこの領域（三角関数と双曲線関数の融合域且つ三変数域）は、保型形式の世界とどこかつながっている気がする。

積分式[Ⅲa-1]も興味ある形をしている。これまで得た式と違っている。

なお、恒等式はExcel マクロで、また積分式はWolfram Alpha で様々な数値を代入してその正しさを検証している。

さて、ここで[Ⅲa-1]の証明の概要を示しておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜積分式[Ⅲa-1]の証明の概要＞

ゼータの香りの漂う・・（その３０７）でのフーリエ級数①を使って、１２年前のこちらの 2012/8/16 の[導出]での手法を一般化した方法（αを加えた）を使うと、次の式（母等式）[1]を得る。

$$\frac{\sin x}{e^{a}-\alpha}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}-\alpha}+\frac{\sin 3x}{e^{3a}-\alpha}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}-\alpha}+\cdot\cdot=\left(\frac{\sin x}{2}\right)\left(\frac{1}{\mathrm{ch}a-\cos x}+\frac{\alpha}{\mathrm{ch}2a-\cos x}+\frac{\alpha^2}{\mathrm{ch}3a-\cos x}+\frac{\alpha^3}{\mathrm{ch}4a-\cos x}+\cdot\cdot\right)\text{---[1]}$$

$$(a>0、|\alpha|<e^{a})$$

この母等式に対し、両辺を 0～αの範囲でαで積分して得た式に対し、さらにその両辺を 0～x の範囲で x で積分して、次の[2]を得る。

$$(\cos x-1)\log(1-\alpha/e^{a})\ +((\cos 2x-1)/2)\log(1-\alpha/e^{2a})+((\cos 3x-1)/3)\log(1-\alpha/e^{3a})+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\alpha\cdot\log\left(\frac{\mathrm{ch}a-\cos x}{\mathrm{ch}a-1}\right)+\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}2a-\cos x}{\mathrm{ch}2a-1}\right)+\left(\frac{\alpha^3}{3}\right)\log\left(\frac{\mathrm{ch}3a-\cos x}{\mathrm{ch}3a-1}\right)+\cdot\cdot\right)\quad\text{---[2]}$$

$$(a>0、|\alpha|<e^{a})$$

上式の両辺に対し、各項を変数 a の関数と見た場合に対してこちらで証明した次の定理を各項別に適用して整理すると、下方の[3]を得る。

****

＜変数定数倍-積分定理＞

任意の実関数 F(x)に関して、0～∞の範囲で積分した結果が有限の値となる場合、次の関係が成り立つ。ここで c は、c>0 の実定数である。

$$\int_0^{\infty}F(cx)dx=(1/c)\int_0^{\infty}F(x)dx$$

****

$$\left(\left(\frac{\cos x-1}{1^2}\right)+\left(\frac{\cos 2x-1}{2^2}\right)+\left(\frac{\cos 3x-1}{3^2}\right)+\cdot\cdot\right)\int_0^{\infty}\log\left(1-\frac{\alpha}{e^{a}}\right)da$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{2^2}+\frac{\alpha^3}{3^2}+\frac{\alpha^4}{4^2}+\cdot\cdot\right)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}a-\cos x}{\mathrm{ch}a-1}\right)da\qquad\text{---[3]}$$

ここで、$\int_0^{\infty}\log\left(1-\frac{\alpha}{e^{a}}\right)da=-\mathrm{Li}_2(\alpha)$、$\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{2^2}+\frac{\alpha^3}{3^2}+\frac{\alpha^4}{4^2}+\cdot\cdot=\mathrm{Li}_2(\alpha)$ であり、Li_2の多重対数関数が現れるが、その部分は両辺で相殺され消えてしまう。よって結局[3]は次の[4]となる。

$$-\left(\left(\frac{\cos x-1}{1^2}\right)+\left(\frac{\cos 2x-1}{2^2}\right)+\left(\frac{\cos 3x-1}{3^2}\right)+\cdot\cdot\right)=\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{ch}a-\cos x}{\mathrm{ch}a-1}\right)da\quad\text{---[4]}$$

上式の左辺を、公式集にある次のフーリエ級数 $\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\cdot\cdot=\frac{(x-\pi)^2}{4}-\frac{\pi^2}{12}$ と、

$\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$を使って整理すると、目的の[Ⅲa-1]に到達する（最後に x と a は交換して表現した。本質は同じ）。

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}x-\cos a}{\mathrm{ch}x-1}\right)dx \qquad \text{-----[Ⅲa-1]}$$

(a は 0≦a≦2π を満たす任意の実数。cosa は cos(a) のこと)

終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

積分式[Ⅲa-1]は、このようにして得られた。恒等式<ⅢA-1>も途中までは同じで、証明中の[2]で x にπを、αに 1 を代入すれば得られる。

いわずもがなだが、一応注意。a やαは定数の意味合いで導入したものだが、変数として扱うことができる。

最後に、想うことや気付いた点など述べておく。

****

●この 1 年半は、恒等式も非常に多く得られた。例えば、次のようなゼータの香りが漂う式もたくさん出た。しかし、この「無限和＝無限和」の式はあまりに出すぎて、そのうち感動がなくなってしまった。

$$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 3a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 5a}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 7a}+\cdot\cdot=\frac{2}{\mathrm{sh}2a}+\frac{4}{\mathrm{sh}4a}+\frac{6}{\mathrm{sh}6a}+\frac{8}{\mathrm{sh}8a}+\cdot\cdot$$

$(a>0)$

一方で、冒頭に記した「値＝無限和」の恒等式は、得られる条件が限られていて、貴重であり希少なものである。形の面でも美しい。どの式もふしぎがただよっていて、いまだ眺めていて飽きがこない。

$$\mathrm{th}\left(\frac{a}{2}\right)=\left(\frac{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}6a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}6a+\mathrm{sh}a}\right)\times\left(\frac{\mathrm{sh}8a-\mathrm{sh}a}{\mathrm{sh}8a+\mathrm{sh}a}\right)\times\cdot\cdot \qquad \text{----<E2>}$$

$(a>0)$

●[Ⅲa-1]を再掲。

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^\infty \log\left(\frac{\mathrm{ch}x-\cos a}{\mathrm{ch}x-1}\right)dx \qquad \text{-----[Ⅲa-1]}$$

(a は 0≦a≦2π を満たす任意の実数。cosa は cos(a) のこと)

この式は上方で羅列した積分式と同様、ふしぎな感じがあり、どこか得体のしれない不気味さがある・・

上記式で a＝π とした結果は、公式集*にある$\int_0^\infty \log(\tanh(x))=-\frac{\pi^2}{8}$ と本質的に等しい。したがって、[Ⅲa-1]はその一般式ともなっている。

＊「数学公式Ⅰ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）p. 236

●　変数定数倍-積分定理は、こちらで昨年証明した定理だが（その時は名前はまだない）、その証明はたったの３行！である。こんな簡単なものから[Ⅲa-1]のような式が出るのはすごいことと思われ、実際、上方で並べた積分式は、全部この定理を使って得たものである。

この定理を使っていると、簡単なものは役に立つ！ということを実感する。ある雑誌で、数学者の黒川氏は次のように述べていたが、それと通じていると思う。

キーはたいてい簡単なのだ！

●　この１年半ずっと二変数の母等式を扱ってきて、公式は出し尽くした感があり、この領域（洞窟）もこれで行き止まりか！と思っていた。が、ひょんなことから三変数の母等式（証明中の[1]がその一例）を導くことができ、二変数域はその一部であることが判明した。なんと、まだ奥があったのだ！

そのイメージは、洞窟を進んでいてだんだんと狭くなってきたと思ったら、小さな穴を抜けると巨大空間が出現した！という感じである。

●　こちらで示した積分式で同値や既知のものがあったので、ここに記して訂正とさせていただきます。

- [C6]は、「数学公式Ⅰ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）p.236 と同値
- 右ペアは同値。[C3]と[C5]／[C7]と[C9]／[C11]と[C12]／[D8]と[D11]／[D1]と[D5]。
- [D4]は、カタラン定数の wikipedia にある式と同じ。

●　じつはいま、今回の積分式[Ⅲa-1]は、昨年秋に自分のノートに記した式と同じとわかった。自分自身の再発見だった。ただしこれは公表していなかった。この１年あまりにも公式の類が出すぎて、実際報告したのは半分程度である。ここで上方での[B3]と[Ⅲa-1]を並べたい。

$$\pi=\int_0^{\infty}(1/a)\log\left(\frac{\mathrm{chx}+\mathrm{sina}}{\mathrm{chx}-\mathrm{sina}}\right)dx \qquad \text{-----[B3]}$$

（a は $0<|a|\leq\pi/2$ を満たす任意の実数。 $a\to 0$ でも式は成立。）

$$a(2\pi-a)/2=\int_0^{\infty}\log\left(\frac{\mathrm{chx}-\mathrm{cosa}}{\mathrm{chx}-1}\right)dx \qquad \text{-----[Ⅲa-1]}$$

（a は $0\leqq a\leqq 2\pi$ を満たす任意の実数。cosa は cos(a) のこと）

どちらも甲乙つけがたい。ノートを見ると、ほぼ同時期に両式を出している。Wolfram Alpha での積分過程を見ると、両方とも、不定積分は多重対数関数 $\mathrm{Li}_2(x)$ などが入り乱れたもので簡単ではない。よってこれら積分式は自明ではないと考えられる。

●[Ⅲa-1]は、上方で羅列した積分式では、[B3]のみ近い親戚のような関係である。その他の積分式とはかなり距離が離れている。赤の他人というところである。

****

2024.6.1 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）

・「数学公式Ⅰ」「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）