

< 双曲線ゼータとその派生式 その37 >

--- 二重倍角公式の追加 ---

二重倍角公式をさらに三つ見出したので報告したい。下方の青色のものである。
ここで二重倍角公式とは私の造語で、二変数で成り立つ倍角公式なので、そのように名付けたものである。

なお、双曲線関数 \sinh , \cosh , \tanh はそれぞれ sh , ch , th と略記した。例えば、 $sh2B$ は $\sinh(2B)$ のこと
であり、 $th2A$ は $\tanh(2A)$ のことである。 \tan^{-1} , th^{-1} は、それぞれ \arctan , $\operatorname{arctanh}$ である。

=====

< 二重倍角公式 >

$$\tan^{-1}(\sin 2A / sh 2B) = \tan^{-1}(\tan A / th B) - \tan^{-1}(\tan A \cdot th B) \quad \text{---F1}$$

(A は $(2n-1)\pi/2$ でない任意の実数 (n は任意の整数)、B は 0 でない任意の実数。)

$$\tan^{-1}(\tan 2A / th 2B) = \tan^{-1}(\tan A / th B) + \tan^{-1}(\tan A \cdot th B) \quad \text{---F2}$$

(A は $(4n-1)\pi/4 < |A| < (4n+1)\pi/4$ を満たす任意の実数 (n は任意の整数)。B は 0 でない任意の実数)

$$th^{-1}(th 2A / th 2B) = th^{-1}(th A / th B) + th^{-1}(th A \cdot th B) \quad \text{---F3}$$

(A, B は $|A| < |B|$ を満たす任意の実数)

$$th^{-1}(sh 2A / sh 2B) = th^{-1}(th A / th B) - th^{-1}(th A \cdot th B) \quad \text{----F4}$$

(A, B は $|A| < |B|$ を満たす任意の実数)

$$\tan^{-1}(th 2A / \tan 2B) = \tan^{-1}(th A / \tan B) - \tan^{-1}(th A \cdot \tan B) \quad \text{---F5}$$

(A は任意の実数。B は $n\pi/4$ でない任意の実数 (n は任意の整数))

$$\tan^{-1}(sh 2A / th 2B) = \tan^{-1}(th A / th B) + \tan^{-1}(th A \cdot th B) \quad \text{---F6}$$

(A は任意の実数。B は 0 でない任意の実数)

$$\tan^{-1}(\sin 2A / \tan 2B) = \tan^{-1}(\tan A / \tan B) - \tan^{-1}(\tan A \cdot \tan B) \quad \text{---F7}$$

(A は $(2n-1)\pi/2$ でない任意の実数。B は $n\pi/4$ でない任意の実数。n は任意の整数。)

=====

今回、青色の三式を見出したが、大変きれいである。公式集にないので新種のものかと思われる。

七式の眺めはなんともよい。山の上にとって美しい街並みを眺めているようなそんな感覚にとられる。

これらは、 \tan^{-1} , th^{-1} の次の加法公式 (加法定理) を使って証明できる (略)。

$$\begin{aligned} \tan^{-1}((x \pm y) / (1 \mp xy)) &= \tan^{-1}x \pm \tan^{-1}y \\ \text{th}^{-1}((x \pm y) / (1 \pm xy)) &= \text{th}^{-1}x \pm \text{th}^{-1}y \\ &\text{(複合同順)} \end{aligned}$$

最初の F1 は、まったく別ルートの複雑な過程を経て偶然に発見した。出たとき、二変数の倍角公式になっていると気づき、驚いた。その後、上記の加法公式を使えば簡単に証明できると気づいたという流れである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、気付いた点など述べておく。

=====

● 上記で述べた「二変数の倍角公式になっている」という意味を考えたい。

例として F6 を見よう。

$$\tan^{-1}(\text{sh} 2A / \text{th} 2B) = \tan^{-1}(\text{th} A / \text{th} B) + \tan^{-1}(\text{th} A \cdot \text{th} B) \quad \text{---F6}$$

(A は任意の実数。B は 0 でない任意の実数)

F6 は

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A \quad \text{---①}$$

とか

$$\text{ch} 2A = 2 \text{ch}^2 A - 1 \quad \text{---②}$$

という三角関数や双曲線関数の倍角公式に比べて、もっと豊かなものを含んでいる。①や②は 1 個の変数 (単変数) の倍角公式になっているが、F6 は二変数 A, B それぞれにおける倍角公式になっていて、より広いものになっている。

● 上記の続き。

二重倍角公式の背後には、二変数の加法公式が控えているのかもしれない。すなわち次のようなものが、どこかに存在しているのではなからうか。

例えば、

$$H(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = F(x_1, y_1) + G(x_2, y_2)$$

とか

$$H(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = F(x_1, y_1) + G(x_1, y_2) + I(x_2, y_1) + J(x_2, y_2)$$

とかそんな感じ。

こういうのがあれば、素晴らしいのだが。

なお、三角関数や双曲線関数の加法公式は、上記の意味では次のような単変数のものになっているといえる。

$$H(x_1 + x_2) = F(x_1, x_2) + G(x_1, x_2)$$

- 二変数の加法公式（加法定理）は、探しているが見つからない。

仮説、予想⇒実験

こんなことの繰り返しである。

数学も他の科学と変わらない。実験をやっては失敗し・・・ということを繰り返している。

そもそもそんなものが存在するのかわからない。もし存在しないとしたら空虚なことをしているといえるが、仮説や予想に突き進まないとなんか新たな発見がないのも事実である。

=====

2024. 1. 20 杉岡幹生

<参考文献>

- ・「数学公式Ⅰ」、「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）
- ・「マグローヒル 数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）