＜ 双曲線ゼータとその派生式 その２１＞

前回の式に類似する新たな恒等式が得られたので紹介したい。下記の[3],[4]がそれである。前回の[1],[2]と一緒に示した。

なお、双曲線関数 sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。例えば、sh2a は sinh(2a)のことである。また a は任意の実数であり、よって例えば、$(a>0)$は“a は 0 より大きい実数”を意味する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{sha+sh0}}-\frac{1}{\mathrm{sh2a+sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a+sh2a}}-\frac{1}{\mathrm{sh4a+sh3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[1]}$$

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha-sh0}}-\frac{1}{\mathrm{sh2a-sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a-sh2a}}-\frac{1}{\mathrm{sh4a-sh3a}}+-\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a+cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a+cha}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch10a+cha}}+\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch14a+cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[2]}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha+sh0}}+\frac{1}{\mathrm{sh2a+sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a+sh2a}}+\frac{1}{\mathrm{sh4a+sh3a}}+\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{sha}}{\mathrm{ch2a-cha}}+\frac{\mathrm{sh3a}}{\mathrm{ch6a-cha}}+\frac{\mathrm{sh5a}}{\mathrm{ch10a-cha}}+\frac{\mathrm{sh7a}}{\mathrm{ch14a-cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[3]}$$

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sha-sh0}}+\frac{1}{\mathrm{sh2a-sha}}+\frac{1}{\mathrm{sh3a-sh2a}}+\frac{1}{\mathrm{sh4a-sh3a}}+\cdot\cdot$$

$$=2\left\{\frac{\mathrm{cha}}{\mathrm{ch2a-cha}}+\frac{\mathrm{ch3a}}{\mathrm{ch6a-cha}}+\frac{\mathrm{ch5a}}{\mathrm{ch10a-cha}}+\frac{\mathrm{ch7a}}{\mathrm{ch14a-cha}}+\cdot\cdot\right\} \quad \text{----[4]}$$

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[3],[4]が新たに得られたものだが、[1]～[4]を並べることで美しさがより際立つ。これらは四つではじめて完成するふすま絵のようにも見える。

上記式は、ゼータの香りが漂っているとみることもできそうだが、ここ半年で出してきた恒等式よりもふしぎな感じが出ている式である。

[1]と[2]の関係は、[3]と[4]の関係に似ている。すなわち、左辺の分母の符号を変えると、右辺の分子の sh が ch(or その逆)になる。面白いことである。

[1]と[2]は前回見たように第五系列と第六系列の基本式を組み合わせて得られた。一方、[3]と[4]は第三系列と第四系列の基本式を組み合わせて得られた。

なお、今回の[3],[4]に対して、念のため Excel でいくつかの a を代入して数値検証も行ったが、正しいものであった。

[3]の証明の概要を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[3]の証明の概要

まず第三系列の基本式を示す。[基本式1]とした。

$$\frac{\cos x}{e^{a}-1}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}-1}+\frac{\cos 7x}{e^{7a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\cos x\left\{\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a-\cos 2x}+\cdot\cdot\right\}\quad \text{---[基本式1]}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2},\ a>0\right)$$

次に第四系列の基本式を示す。[基本式 2]とした。

$$\frac{\cos x}{e^{a}+1}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}+1}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}+1}+\frac{\cos 7x}{e^{7a}+1}+\cdot\cdot$$

$$=\cos x\left\{\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}-\frac{\mathrm{sh}2a}{\mathrm{ch}4a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a-\cos 2x}-\frac{\mathrm{sh}4a}{\mathrm{ch}8a-\cos 2x}+-\cdot\cdot\right\}\quad \text{---[基本式 2]}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2},\ a>0\right)$$

これら基本式は、１１年前に双曲線ゼータを導出した手法を一般化した方法（定数を変数に変えた）を用いて導いた。その方法は当時の次サイトの 2012/5/3 の[導出]でのＡを導いた式変形（やや特殊な変形）と類似の方法である。⇒ファン・ネス彗星　その１（biglobe.ne.jp）

なお上記基本式の導出において、公式集に載っているあるフーリエ級数を利用して、次のフーリエ級数を導出し、これを活用した。

$$\frac{\cos x}{e^{a}}+\frac{\cos 3x}{e^{3a}}+\frac{\cos 5x}{e^{5a}}+\frac{\cos 7x}{e^{7a}}+\cdot\cdot\ =\frac{\mathrm{sh}a\cdot\cos x}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2},\ a>0\right)$$

次に、[基本式１]と[基本式2]を辺々足し算して変形していくと、次の＜融合式１＞が得られる。

$$\frac{\cos x}{\mathrm{sh}a}+\frac{\cos 3x}{\mathrm{sh}3a}+\frac{\cos 5x}{\mathrm{sh}5a}+\frac{\cos 7x}{\mathrm{sh}7a}+\cdot\cdot$$

$$=2\cos x\left\{\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a-\cos 2x}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a-\cos 2x}+\cdot\cdot\right\}$$ ---<融合式 1>

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2},\ a>0\right)$$

この式の x に ai/2 を代入して(i：虚数単位)、変形していくと、[3] に到達する。
終わり。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[3]はこのようにして得られた。[4]も同様の方法で得られるが、略す。

四式を再掲して眺めよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a+\mathrm{sh}0}-\frac{1}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}+\frac{1}{\mathrm{sh}3a+\mathrm{sh}2a}-\frac{1}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}3a}+-\cdot\cdot$$
$$=2\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right\}$$ ----[1]

$$(a>0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a-\mathrm{sh}0}-\frac{1}{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}+\frac{1}{\mathrm{sh}3a-\mathrm{sh}2a}-\frac{1}{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}3a}+-\cdot\cdot$$
$$=2\left\{\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a+\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a+\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right\}$$ ----[2]

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a+\mathrm{sh}0}+\frac{1}{\mathrm{sh}2a+\mathrm{sh}a}+\frac{1}{\mathrm{sh}3a+\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}4a+\mathrm{sh}3a}+\cdot\cdot$$
$$=2\left\{\frac{\mathrm{sh}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}5a}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{sh}7a}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right\}$$ ----[3]

$$(a\neq 0)$$

$$\frac{1}{\mathrm{sh}a-\mathrm{sh}0}+\frac{1}{\mathrm{sh}2a-\mathrm{sh}a}+\frac{1}{\mathrm{sh}3a-\mathrm{sh}2a}+\frac{1}{\mathrm{sh}4a-\mathrm{sh}3a}+\cdot\cdot$$
$$=2\left\{\frac{\mathrm{ch}a}{\mathrm{ch}2a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}3a}{\mathrm{ch}6a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}5a}{\mathrm{ch}10a-\mathrm{ch}a}+\frac{\mathrm{ch}7a}{\mathrm{ch}14a-\mathrm{ch}a}+\cdot\cdot\right\}$$ ----[4]

$$(a>0)$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

大変きれいな秩序が出ていて味わい深い式たちである。そしてなんともふしぎな感じをともなっている

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 数学は芋掘りに似ていると思っている。

今回のケースでは最初に[1]が得られた。しばらくして[2]が得られ、その類似を追ってばたばたと[3],[4]が得られた。根っこを引っ張るとまず一つ目の芋が得られ、さらにその根っこを引くと二つ目、三つ目、四つ目の芋が連なって出てきた、というのに似ている。

数学ではそんな状況になることが非常に多い。一つ公式が得られたら、ばたばたと類似の公式が得られていく。

こっちで成り立つならば、あっちでも成り立つはずだ！それならば、微分した場合のあっちとこっちでも・・。そんな根っこがあちこちにあって、だから、ある根っこを引っ張ると芋が連なって得られていく。

● 数学の範囲を広げていく方法として、類似と一般化がある。

私は類似を追うのが好きである。今回の恒等式も類似を追った結果である。だから、ある一つの公式が得られたら、類似を追うことで（根っこを引っ張ることで）、いくつもの芋が出てくる。

やはり数学は芋掘りに似ている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2023.8.17　杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）