＜ 四つの分母８乗ゼータ香り式の簡単化 ＞

前回、４年前に導いた分母８乗ゼータ香り式の一つの簡単化を行った。今回、残りの三つも簡単化できたので、前回分も合わせ、下記Ⅰ～Ⅳの全ての値を示しておきたい。

Ⅰ⇒$1/(1^8+1)+1/(3^8+1)+1/(5^8+1)+1/(7^8+1)+\cdots$

Ⅱ⇒$1^4/(1^8+1)+3^4/(3^8+1)+5^4/(5^8+1)+7^4/(7^8+1)+\cdots$

Ⅲ⇒$1^2/(1^8+1)+3^2/(3^8+1)+5^2/(5^8+1)+7^2/(7^8+1)+\cdots$

Ⅳ⇒$1^6/(1^8+1)+3^6/(3^8+1)+5^6/(5^8+1)+7^6/(7^8+1)+\cdots$

これらの値は以下となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜分母８乗ゼータ香り式Ⅰ＞

$$1/(1^8+1)+1/(3^8+1)+1/(5^8+1)+1/(7^8+1)+\cdots$$
$$=K[\alpha(\mathrm{sh}2\alpha-\sin2\alpha)+\beta(\mathrm{sh}2\beta-\sin2\beta)$$
$$+(\alpha+\beta)\{\cos(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)\}+(\alpha-\beta)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\}]\quad\text{---①}$$

＜分母８乗ゼータ香り式Ⅱ＞

$$1^4/(1^8+1)+3^4/(3^8+1)+5^4/(5^8+1)+7^4/(7^8+1)+\cdots$$
$$=K[\beta(\mathrm{sh}2\alpha-\sin2\alpha)-\alpha(\mathrm{sh}2\beta-\sin2\beta)$$
$$-(\alpha-\beta)\{\cos(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha+\beta)-\sin(\alpha+\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)\}+(\alpha+\beta)\{\cos(\alpha-\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha-\beta)\}]\quad\text{---②}$$

＜分母８乗ゼータ香り式Ⅲ＞

$$1^2/(1^8+1)+3^2/(3^8+1)+5^2/(5^8+1)+7^2/(7^8+1)+\cdots$$
$$=(K/\sqrt{2})[(\alpha-\beta)(\mathrm{sh}2\alpha+\sin2\alpha)-(\alpha+\beta)(\mathrm{sh}2\beta+\sin2\beta)$$
$$+2\alpha\{\sin(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)\}-2\beta\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\}]\quad\text{---③}$$

＜分母８乗ゼータ香り式Ⅳ＞

$$1^6/(1^8+1)+3^6/(3^8+1)+5^6/(5^8+1)+7^6/(7^8+1)+\cdots$$
$$=(K/\sqrt{2})[(\alpha+\beta)(\mathrm{sh}2\alpha+\sin2\alpha)+(\alpha-\beta)(\mathrm{sh}2\beta+\sin2\beta)$$
$$+2\beta\{\sin(\alpha-\beta)\mathrm{ch}(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)\mathrm{sh}(\alpha-\beta)\}+2\alpha\{\sin(\alpha+\beta)\mathrm{ch}(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)\mathrm{sh}(\alpha+\beta)\}]\quad\text{---④}$$

ここで、$\alpha=(\pi/\sqrt{2})\cos(\pi/8)$, $\beta=(\pi/\sqrt{2})\sin(\pi/8)$, $K=1/[8\{(\mathrm{ch}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\mathrm{ch}\beta)^2+(\mathrm{sh}\alpha\sin\beta-\sin\alpha\,\mathrm{sh}\beta)^2\}]$

sinh, cosh はそれぞれ sh, ch と略記した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようになった。Excel を使った数値検証でも正しいものであった。左辺は右辺値に収束する（Ⅳは収束が遅い)。

Ⅰ とⅡがペアを形成し（分子０乗と４乗がペア)、ⅢとⅣがペアを形成している（分子２乗と６乗がペア)。それは式を見ればすぐ気づくが、互いが似た形になっている。例えばⅢとⅣを見ると以下の赤色の部分が同じである！

＜分母８乗ゼータ香り式Ⅲ＞

$1^2/(1^8+1)+3^2/(3^8+1)+5^2/(5^8+1)+7^2/(7^8+1)+\cdots$

$=(K/\sqrt{2})[(\alpha-\beta)(sh2\alpha+\sin2\alpha)-(\alpha+\beta)(sh2\beta+\sin2\beta)$

$+2\alpha\{\sin(\alpha-\beta)ch(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)sh(\alpha-\beta)\}-2\beta\{\sin(\alpha+\beta)ch(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)sh(\alpha+\beta)\}]$ ---③

＜分母８乗ゼータ香り式Ⅳ＞

$1^6/(1^8+1)+3^6/(3^8+1)+5^6/(5^8+1)+7^6/(7^8+1)+\cdots$

$=(K/\sqrt{2})[(\alpha+\beta)(sh2\alpha+\sin2\alpha)+(\alpha-\beta)(sh2\beta+\sin2\beta)$

$+2\beta\{\sin(\alpha-\beta)ch(\alpha-\beta)+\cos(\alpha-\beta)sh(\alpha-\beta)\}+2\alpha\{\sin(\alpha+\beta)ch(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)sh(\alpha+\beta)\}]$ ---④

トップのⅠを例にとると、４年前は次のような複雑な形だったが（A がⅠの左辺)、かなりすっきりした形になったと思う。

A=K[α{(sh2α-s2α)-2sβshβ(casha+sacha)+2cβchβ(casha-sacha)}+β{(sh2β-s2β)-2sasha(cβshβ+sβchβ)+2cacha(cβshβ-sβchβ)}]

ここで、α=(π/√2)cos(π/8)、β=(π/√2)sin(π/8)です。

sa、ca、sha、chaは、それぞれsina、cosa、sinha、coshaを表します。長くなるので略記しました。sinh、coshは双曲線関数です。またKは、K=1/[8*{(cβcha+cachβ)^2+(sβsha-sashβ)^2}]です。

さて今回の簡単化で用いた道具（公式）は、前回と同じ次の二つの対称式である（１６個の公式のうちの二つ)。Ⅰ～Ⅳの四式ともこの二式が活躍した形となった。

対称式Ⅲ(3)

$\cos x\cdot shx\cdot\cos y\cdot chy-\sin x\cdot chx\cdot\sin y\cdot shy=\{\cos(x+y)\cdot sh(x+y)+sh(x-y)\cdot\cos(x-y)\}/2$

対称式Ⅳ(3)

$\sin x\cdot chx\cdot\cos y\cdot chy+\cos x\cdot shx\cdot\sin y\cdot shy=\{\sin(x+y)\cdot ch(x+y)+ch(x-y)\cdot\sin(x-y)\}/2$

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 分母８乗ゼータ香り式Ⅰ～Ⅳの式でαとβを交換すると、右辺は変わるだろうか。結果は下記の通り。

Ⅰ⇒変わらない
Ⅱ⇒変わる
Ⅲ⇒変わる
Ⅳ⇒変わる

Ⅰのみ変わらない結果となった。Ⅰは特別ななにかがあるのだろうか。

● ゼータの香りの漂う公式（ゼータ香り式）もゼータと同様、無数の分身に分割可能である。

ゼータの分割の場合は、分身を解としてもつ方程式を求めていった。ｎ個の分身ならば、ｎ次方程式という具合に。そしてゼータの分身はすべてルート√で表現できる数になるとわかった。それは２次方程式に還元されていく美しい世界である。ゼータの分割でもやり残した課題がたくさんあるが、それらは予想や問題として残し（原石を磨かず足元に置いて）堀り進んできた。

ゼータ香り式を分割して生まれてくる分身たちも、上記に類した、しかし別世界の可解の方程式となるはずである。円周等分方程式の発展版？

アーベルやガウスは、楕円関数に関しての等分方程式でその方面を極めていった（ただしガウスは公表していない)。レムニスケート曲線の等分あたりからはじまった方向である。

ゼータの分身は円周等分方程式の領域に属している。
アーベルらが行ったものは、楕円関数に関する等分方程式に属している。
おそらくゼータ香り式は、その両者の中間域にあるなんらかの方程式に関係しているはずである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.9.24 杉岡幹生