＜ ゼータ香り式母等式Ⅳ(分母４乗-A 型、B 型) ＞

前回示唆した母等式Ⅳ(分母４乗)の A 型、B 型が出たので報告したい。今回も虚数マジックを使うことで得られたが、前回の母等式Ⅲの場合と同様にすれば出るので導出の方法は略す。

得られた母等式を以下に示す。なお、ch,sh は、双曲線関数 cosh,sinh を略記したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅳ（分母４乗-A 型）

$$\cos x/(1^4+4a^4)\ -\cos 2x/(2^4+4a^4)\ +\cos 3x/(3^4+4a^4)\ -\cos 4x/(4^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$

$$=1/(8a^4)-(\pi/(8a^3))\{\cos(a(\pi-x))\mathrm{sh}(a(\pi+x))+\mathrm{sh}(a(\pi-x))\cos(a(\pi+x))+\sin(a(\pi-x))\mathrm{ch}(a(\pi+x))+\mathrm{ch}(a(\pi-x))\sin(a(\pi+x))\}/\{\mathrm{ch}(2a\pi)-\cos(2a\pi)\}\text{---①}$$

$$(-\pi\leqq x\leqq\pi)$$

ゼータ香り式分割母等式Ⅳ（分母４乗-B 型）

$$1^2\cos x/(1^4+4a^4)\ -2^2\cos 2x/(2^4+4a^4)\ +3^2\cos 3x/(3^4+4a^4)\ -4^2\cos 4x/(4^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$

$$=(\pi/(4a))\{\sin(a(\pi-x))\mathrm{ch}(a(\pi+x))+\mathrm{ch}(a(\pi-x))\sin(a(\pi+x))-\cos(a(\pi-x))\mathrm{sh}(a(\pi+x))-\mathrm{sh}(a(\pi-x))\cos(a(\pi+x))\}/\{\mathrm{ch}(2a\pi)-\cos(2a\pi)\}\text{--②}$$

$$(-\pi\leqq x\leqq\pi)$$

ここで、a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようになった。右辺の分子が複雑に見えるかもしれないが、対称的な感じになっていてきれいである。両式とも公式集にないので、新種のフーリエ級数と考えられる。

①の x に 0 を代入して出る母親（１分割）

$$1/(1^4+4a^4)\ -1/(2^4+4a^4)\ +1/(3^4+4a^4)\ -1/(4^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$

を大元として、①の x に様々な値を代入することで、その分割（分身）を得ることができる。

②の x に 0 を代入して出る母親（１分割）

$$1^2/(1^4+4a^4)\ -2^2/(2^4+4a^4)\ +3^2/(3^4+4a^4)\ -4^2/(4^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$

を大元として、②の x に様々な値を代入することで、その分割（分身）を得ることができる。
（下方③、④を参照）

ここで母等式Ⅳと前回の母等式Ⅲを比較しよう。母等式Ⅲを示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅲ（分母４乗-A 型）

$1\sin x/(1^4+4a^4)\ -2\sin 2x/(2^4+4a^4)\ +3\sin 3x/(3^4+4a^4)\ -4\sin 4x/(4^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$
$=(\pi/4a^2)\{\sin(a(\pi-x))\mathrm{sh}(a(\pi+x))\ -\mathrm{sh}(a(\pi-x))\sin(a(\pi+x))\}/\{\mathrm{ch}(2a\pi)-\cos(2a\pi)\}$
$(-\pi\leqq x\leqq\pi)$

ゼータ香り式分割母等式Ⅲ（分母４乗-B 型）

$1^3\sin x/(1^4+4a^4)\ -2^3\sin 2x/(2^4+4a^4)\ +3^3\sin 3x/(3^4+4a^4)\ -4^3\sin 4x/(4^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$
$=(\pi/2)\{\cos(a(\pi-x))\mathrm{ch}(a(\pi+x))\ -\mathrm{ch}(a(\pi-x))\cos(a(\pi+x))\}/\{\mathrm{ch}(2a\pi)-\cos(2a\pi)\}$
$(-\pi<x<\pi)$

ここで、a は任意の実数（0 の場合 a->0)。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

Ⅳと比べると、このⅢの方がすっきりしていることに気づくだろう。

母等式ⅢはL(s)ゼータの世界に属し、母等式Ⅳはリーマン・ゼータζ(s)の世界に属すると言え、次のように言える。

- 母等式Ⅲはすっきりした対称性をもつ。
- 母等式Ⅳは複雑な対称性をもつ。

ゼータ関数を見ていると、「L(s)は素直な性格だが、ζ(s)はひねくれた性格をもっている」とも言えるのでゼータ香り式の母等式もそういう性質を引き継いでいることがわかる。そして、その性質は奥底のリーマン予想にまで引き継がれているはずである。

さて今回母等式Ⅳ(分母４乗)が得られたので、これで以下の４点セットの計８種のフーリエ級数が出揃った。

●母等式Ⅰ(分母４乗)A 型、B 型
●母等式Ⅱ(分母４乗)A 型、B 型
●母等式Ⅲ(分母４乗)A 型、B 型
●母等式Ⅳ(分母４乗)A 型、B 型

これらのフーリエ級数が出たので、ゼータ香り式の分割を自由に行うことができ、ここから多くの分身たちが生み出されていく。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝
● ①と②の x に 0 を代入すると、それぞれ次のゼータ香り式（大元の１分割）の値（右辺）が簡単に得られる。

$1/(1^4+4a^4)\ -1/(2^4+4a^4)\ +1/(3^4+4a^4)\ -1/(4^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$

$=1/(8a^4) -(\pi/(4a^3))\{\cos(a\pi)\mathrm{sh}(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\sin(a\pi)\}/\{\mathrm{ch}(2a\pi)-\cos(2a\pi)\}$ ---③

$1^2/(1^4+4a^4) -2^2/(2^4+4a^4) +3^2/(3^4+4a^4) -4^2/(4^4+4a^4) +\cdot\cdot$

$=(\pi/2a)\{\mathrm{ch}(a\pi)\sin(a\pi)-\cos(a\pi)\mathrm{sh}(a\pi)\}/\{\mathrm{ch}(2a\pi)-\cos(2a\pi)\}$ ----④

これが大元の１分割の母親の姿であり美しい。①や②のｘに様々な値を代入して連立方程式を解くことで、③や④の分身たちを得ることができる。

●今回の母等式Ⅳ(分母４乗)では次の対称式が関係している。これらのおかげで①、②の右辺の分子を四重積から二重積に変換できた。

対称式Ⅲ(2)

$\cos x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}y + \sin x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}y=\{\cos(x-y)\cdot\mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y)\cdot\cos(x+y)\}/2$

対称式Ⅳ(2)

$\sin x\cdot\mathrm{ch}x\cdot\cos y\cdot\mathrm{ch}y - \cos x\cdot\mathrm{sh}x\cdot\sin y\cdot\mathrm{sh}y=\{\sin(x-y)\cdot\mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot\sin(x+y)\}/2$

左辺はひねりが加わって対称性が実現されている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.9.11 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）