＜ 新フーリエ級数、母等式Ⅱ(分母４乗-B 型) ＞

虚数マジックを使って、新しいフーリエ級数を見出したので報告したい。以下のものである。フーリエ級数が出たので、これはゼータ香り式の無数の分割（分身）を生み出す母等式となる。

ここで虚数マジックとは、実数を虚数で置き換え、最終的に実数の公式を導くふしぎな方法である。なお、ch, sh は、双曲線関数 cosh, sinh を略記したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗-B 型）

$$\sin x/(1^4+4a^4)\ -3^2\sin 3x/(3^4+4a^4)\ +5^2\sin 5x/(5^4+4a^4)\ -7^2\sin 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/4a)\{(C1-S1)\cos(ax)\mathrm{sh}(ax)\ +(C1+S1)\sin(ax)\mathrm{ch}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\quad ---①$$
$$(-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2)$$

ここで、$C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

半年ほど前に見出した虚数マジックだが（その時そう命名）、４年前のゼータ香り式発見時に本質的にほぼ同じものを既に用いていた。半年前は虚数置換を二重に用いる手の込んだものだったが、４年前と実質的に同じであり、それらを一緒にして“虚数マジック”と呼ぶことにする。

つまり虚数マジックとは、「実数の定数を虚数に置き換えて計算し、最終的に実数の定数,変数で成り立つ新公式を生み出す手法」である。

上記①を“ゼータ香り式分割母等式Ⅱ(分母４乗-B 型)”と名付けた。

①は公式集には載っていないので新しいフーリエ級数と考えられるが、本当に発見されていないものなのかはわからない。

最近取り上げてきたのは、上記と似てはいるが異なる下記②のフーリエ級数である。①と②の違いについては、まず左辺級数の分子を見ていただきたい。

その流れから②は名前を以下のように変えた。“ゼータ香り式分割母等式Ⅱ(分母４乗型)”から“ゼータ香り式分割母等式Ⅱ(分母４乗-A 型)”に変更した。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗-A 型）

$$\sin x/(1^4+4a^4)\ -\sin 3x/(3^4+4a^4)\ +\sin 5x/(5^4+4a^4)\ -\sin 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^3)\{(C1+S1)\cos(ax)\mathrm{sh}(ax)\ -(C1-S1)\sin(ax)\mathrm{ch}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\quad ---②$$
$$(-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2)$$

ここで、$C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

（その２４３）では、虚数マジックを使って②を単独の式として導いた。しかしその方法は虚数置換を二回用いる技巧的なもので、簡明さに欠ける。
　今回、虚数置換を一度だけ使って①、②を同時に導出するもっと自然な方法を見出したので、それを示す。

　①と②の導出方法の概要を示しておく。

＜導出の方法＞

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

cosx/(1²+a²) +cos3x/(3²+a²) +cos5x/(5²+a²) +cos7x/(7²+a²)+・・

$$\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cos 7x/(7^2+a^2)+\cdots$$

$$=(\pi/(4a))\,\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad ---③$$

$$(0\leqq x\leqq \pi)$$

a は任意の実数。(後者は 0 の場合、a->0)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　この③でπ/2-x＝t と変数変換してから、できた式の t を x に戻すと次のようになる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ

$$\sin x/(1^2+a^2)-\sin 3x/(3^2+a^2)+\sin 5x/(5^2+a^2)-\sin 7x/(7^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\,\mathrm{sh}(ax)/\mathrm{ch}(a\pi/2) \quad ---④$$

$$(-\pi/2\leqq x\leqq \pi/2)$$

a は任意の実数。(後者は 0 の場合、a->0)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　さて、この④に対し、a を a√(2i)で置き換えよう（i：虚数単位)。ここで、√(2i)＝(1+i)である。
三角関数、双曲線関数の加法定理や式変形を用いて長い計算を行うと（略)、次の式に到達する。

$$\{\sin x/(1^4+4a^4)-3^2\sin 3x/(3^4+4a^4)+5^2\sin 5x/(5^4+4a^4)-7^2\sin 7x/(7^4+4a^4)+\cdots\}$$

$$-i2a^2\{\sin x/(1^4+4a^4)-\sin 3x/(3^4+4a^4)+\sin 5x/(5^4+4a^4)-\sin 7x/(7^4+4a^4)+\cdots\}$$

$$=[\pi/\{(4a)(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))\}]$$

$$\times[\{(C1-S1)\cos(xa)\,\mathrm{sh}(xa)+(C1+S1)\sin(xa)\,\mathrm{ch}(xa)\}-i\{(C1+S1)\cos(xa)\,\mathrm{sh}(xa)-(C1-S1)\sin(xa)\,\mathrm{ch}(xa)\}]$$

　ここで、C1＝cos(aπ/2)ch(aπ/2)、S1＝sin(aπ/2)sh(aπ/2), a は任意の実数（0 の場合 a->0)。

　上式の両辺を見比べ、実数項、虚数項に対応する式を取り上げると、それぞれ①、②が得られる。

　導出終わり。

　**

　このようにして得られた。Excel での数値計算でも正しいことを確認した。

虚数マジックを使うことで、フーリエ級数が求まることが決定的に重要である。
フーリエ級数さえ求まれば、その各フーリエ級数に対応するゼータ香り式の分身たちが無数に得られることになる。

フーリエ級数こそが、ゼータのふしぎを生み出す母体である。

虚数マジックは、壮大なる秩序を明らかにする強力な道具といえるだろう。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● ①や②の母等式に、先日来見出した対称式を用いて、四重積を二重積に変えることもできる。しかし、見た目がそんなにすっきりしないので、そのままでおいている。
分割（分身）が出てきた時点で、対称式の公式で簡単化していく。

● 公式の発見も大事だけれども、手法の発見はもっと大事である。
虚数マジックは、硬い岩盤を繰り抜いてくれる超強力ドリルという感じである。

●４年前に次の値（値は略）を見出していた。（その４）ではＡとＣ。あとはノートに記載。

＜Ａ＞ $1/(1^8+1)+1/(3^8+1)+1/(5^8+1)+1/(7^8+1)+\cdots$
＜Ｂ＞ $1/(1^8+1)+3^2/(3^8+1)+5^2/(5^8+1)+7^2/(7^8+1)+\cdots$
＜Ｃ＞ $1/(1^8+1)+3^4/(3^8+1)+5^4/(5^8+1)+7^4/(7^8+1)+\cdots$
＜Ｄ＞ $1/(1^8+1)+3^6/(3^8+1)+5^6/(5^8+1)+7^6/(7^8+1)+\cdots$

これらに対応するフーリエ級数も出るはずである。①や②の a を $a\cdot i^{(1/4)}$ で置き換えて。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.8.12 杉岡幹生

＜参考文献＞
・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）