＜ Z(4) 類似香り式 2分割 ＞

([その243](#)) では、新しく見出した以下の①のフーリエ級数を報告した。それは Z(4) 類似香り式の分身を無数に生み出す母等式であり、ゼータ香り式分割母等式Ⅱ (分母4乗型) と命名した。

今回、その母等式を用いて、Z(4) 類似香り式の2分割 (2分身) を求めたので報告したい。sh, ch はそれぞれ双曲線関数 sinh, cosh を略記したものである。“Z(n)” は私が用いる独自の記法であり Z(4) は次のものである。

$$Z(4) = 1 + 1/3^4 + 1/5^4 + 1/7^4 + \dots$$

=====

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ (分母4乗型)

$$\begin{aligned} & \sin x / (1^4 + 4a^4) - \sin 3x / (3^4 + 4a^4) + \sin 5x / (5^4 + 4a^4) - \sin 7x / (7^4 + 4a^4) + \dots \\ & = (\pi / (2a)^3) \{ (C1 + S1) \cos(ax) \operatorname{sh}(ax) - (C1 - S1) \sin(ax) \operatorname{ch}(ax) \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \quad \text{---①} \\ & \qquad \qquad \qquad (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2) \end{aligned}$$

ここで、 $C1 = \cos(a\pi/2) \operatorname{ch}(a\pi/2)$ 、 $S1 = \sin(a\pi/2) \operatorname{sh}(a\pi/2)$ 、 a は任意の実数 (0 の場合 $a \rightarrow 0$)。

=====

求めた2分割を示す前に、まず Z(4) 類似香り式 そのもの (1分割) を示す。それは、このシリーズをはじめた4年前の ([その3](#)) で、次の②として見出していた。ただし、 a を $2a^2$ で置き換えて書いた。

＜ Z(4) 類似香り式 (1分割) ＞

$$\begin{aligned} & 1 / (1^4 + 4a^4) + 1 / (3^4 + 4a^4) + 1 / (5^4 + 4a^4) + 1 / (7^4 + 4a^4) + \dots \\ & = (\pi / (16a^3)) \{ \operatorname{sh}(a\pi) - \sin(a\pi) \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \quad \text{---②} \end{aligned}$$

さて今回、この②の2分割を導出した。以下の③、④である。③と④を辺々足し算すると②になることを確認いただきたい。(だから2分割！)

＜ Z(4) 類似香り式の2分割 (2分身) ＞

$$\begin{aligned} & 1 / (1^4 + 4a^4) + 1 / (7^4 + 4a^4) + 1 / (9^4 + 4a^4) + 1 / (15^4 + 4a^4) + \dots \\ & = (\pi / (32a^3)) \{ \operatorname{sh}(a\pi) - \sin(a\pi) + \sqrt{2} (\cos \alpha \operatorname{sh} \beta - \operatorname{sh} \alpha \cos \beta + \sin \alpha \operatorname{ch} \beta - \operatorname{ch} \alpha \sin \beta) \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \quad \text{---③} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 1 / (3^4 + 4a^4) + 1 / (5^4 + 4a^4) + 1 / (11^4 + 4a^4) + 1 / (13^4 + 4a^4) + \dots \\ & = (\pi / (32a^3)) \{ \operatorname{sh}(a\pi) - \sin(a\pi) - \sqrt{2} (\cos \alpha \operatorname{sh} \beta - \operatorname{sh} \alpha \cos \beta + \sin \alpha \operatorname{ch} \beta - \operatorname{ch} \alpha \sin \beta) \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \quad \text{---④} \end{aligned}$$

ここで、 $\alpha = a\pi/4$ 、 $\beta = 3a\pi/4$ 、 a は任意の実数 (0 の場合 $a \rightarrow 0$)。

③、④の導出の方法を示す。

<③、④の導出の方法>

=====

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ (分母4乗型)

$$\begin{aligned} & \sin x / (1^4+4a^4) - \sin 3x / (3^4+4a^4) + \sin 5x / (5^4+4a^4) - \sin 7x / (7^4+4a^4) + \dots \\ & = (\pi / (2a)^3) \{ (C1+S1) \cos(ax) \operatorname{sh}(ax) - (C1-S1) \sin(ax) \operatorname{ch}(ax) \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \quad \text{---①} \\ & \qquad \qquad \qquad (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2) \end{aligned}$$

ここで、 $C1 = \cos(a\pi/2) \operatorname{ch}(a\pi/2)$ 、 $S1 = \sin(a\pi/2) \operatorname{sh}(a\pi/2)$ 、 a は任意の実数 (0 の場合 $a \rightarrow 0$)。

=====

上記①を利用する。

①の x に $\pi/2$ を代入して、次を得る。

$$\begin{aligned} & 1/(1^4+4a^4) + 1/(3^4+4a^4) + 1/(5^4+4a^4) + 1/(7^4+4a^4) + 1/(9^4+4a^4) + 1/(11^4+4a^4) + 1/(13^4+4a^4) + 1/(15^4+4a^4) + \dots \\ & = (\pi / (8a^3)) \{ (C1+S1) P1 - (C1-S1) Q1 \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \quad \text{---⑤} \end{aligned}$$

ここで $P1, Q1$ は右の通り。 $P1 = \cos(a\pi/2) \operatorname{sh}(a\pi/2)$ 、 $Q1 = \sin(a\pi/2) \operatorname{ch}(a\pi/2)$

①の x に $\pi/4$ を代入して、次を得る。

$$\begin{aligned} & (1/\sqrt{2}) \{ 1/(1^4+4a^4) - 1/(3^4+4a^4) - 1/(5^4+4a^4) + 1/(7^4+4a^4) + 1/(9^4+4a^4) - 1/(11^4+4a^4) - 1/(13^4+4a^4) + 1/(15^4+4a^4) + \dots \} \\ & = (\pi / (8a^3)) \{ (C1+S1) P2 - (C1-S1) Q2 \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \quad \text{---⑥} \end{aligned}$$

$P2, Q2$ は右の通り。 $P2 = \cos(a\pi/4) \operatorname{sh}(a\pi/4)$ 、 $Q2 = \sin(a\pi/4) \operatorname{ch}(a\pi/4)$

ここで、 A, B を次のように定義しよう。

$$A = 1/(1^4+4a^4) + 1/(7^4+4a^4) + 1/(9^4+4a^4) + 1/(15^4+4a^4) + 1/(17^4+4a^4) + 1/(23^4+4a^4) + \dots$$

$$B = 1/(3^4+4a^4) + 1/(5^4+4a^4) + 1/(11^4+4a^4) + 1/(13^4+4a^4) + 1/(19^4+4a^4) + 1/(21^4+4a^4) + \dots$$

A, B を用いると、⑤、⑥は次のようになる。

$$A + B = (\pi / (8a^3)) \{ (C1+S1) P1 - (C1-S1) Q1 \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \quad \text{---⑦}$$

$$(1/\sqrt{2}) [A - B] = (\pi / (8a^3)) \{ (C1+S1) P2 - (C1-S1) Q2 \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \quad \text{---⑧}$$

⑦、⑧を A, B の連立方程式と見て解くと、次を得る。

$$A = (\pi / (16a^3)) \{ (C1+S1) (P1 + \sqrt{2} \cdot P2) - (C1-S1) (Q1 + \sqrt{2} \cdot Q2) \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \quad \text{---⑨}$$

$$B = (\pi / (16a^3)) \{ (C1+S1) (P1 - \sqrt{2} \cdot P2) - (C1-S1) (Q1 - \sqrt{2} \cdot Q2) \} / \{ \cos(a\pi) + \operatorname{ch}(a\pi) \} \quad \text{---⑩}$$

ここで、C1, S1, a と P1, Q1, P2, Q2 を整理すると、以下の通り。

$$C1 = \cos(a\pi/2) \operatorname{ch}(a\pi/2), S1 = \sin(a\pi/2) \operatorname{sh}(a\pi/2), a \text{ は任意の実数 } (0 \text{ の場合 } a \rightarrow 0)$$

$$P1 = \cos(a\pi/2) \operatorname{sh}(a\pi/2), Q1 = \sin(a\pi/2) \operatorname{ch}(a\pi/2)$$

$$P2 = \cos(a\pi/4) \operatorname{sh}(a\pi/4), Q2 = \sin(a\pi/4) \operatorname{ch}(a\pi/4)$$

さて、以下の対称式Ⅲ(1)と対称式Ⅳ(1)を用いて、⑨、⑩の右辺の分子を整備すると③、④に到達する。

対称式Ⅲ(1)

$$\cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y + \sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y = \{\cos(x-y) \cdot \operatorname{sh}(x+y) - \operatorname{sh}(x-y) \cdot \cos(x+y)\} / 2$$

対称式Ⅳ(1)

$$\sin x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \cos y \cdot \operatorname{sh} y - \cos x \cdot \operatorname{ch} x \cdot \sin y \cdot \operatorname{ch} y = \{\sin(x-y) \cdot \operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y) \cdot \sin(x+y)\} / 2$$

導出終わり。

このようにして、Z(4)類似香り式の2分割(③、④)が得られた。

導出の最後で、最近見出した公式のⅢ(1)とⅣ(1)を使うことで式を簡単化できたことにも注目いただきたい。

③、④は複雑に感じられるであろうか。

しかしよく見ると、両式の右辺はほとんど見た目が同じである！ 違いは $\sqrt{2}$ の符号のみ。③では“ $+\sqrt{2}$ ”だが、④では“ $-\sqrt{2}$ ”となっていて、違いはそれだけである。

②は4年前に見つけていたものだが、その分割(分身)を4年後に見出した形になった。②を見出してすぐのちに、ゼータの分割というびっくりの現象(ある洞窟!)を発見し、その洞窟を4年間探索し続けた。それは壮大なる探索であったが、最近ゼータ香り式の分割に研究を移行している。

- ・ゼータの分割は、三角関数の世界に属する。
- ・ゼータ香り式の分割は、三角関数と双曲線関数の融合世界に属する。

後者は前者より深いところにある洞窟である。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

=====

● (その238) のZ(2)類似香り式の2分割と、Z(4)類似香り式の2分割を並べよう。

前者は、若干変形した。

<Z(2)類似香り式の2分割>

$$1/(1^2+a^2) + 1/(3^2+a^2) + 1/(5^2+a^2) + 1/(7^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) + 1/(11^2+a^2) + \dots = (\pi/(4a)) \operatorname{sh}(a\pi/2) / \operatorname{ch}(a\pi/2)$$

この Z(2) 類似ゼータ香り式の 2 分身は、次となる。

$$1/(1^2+a^2) + 1/(7^2+a^2) + 1/(9^2+a^2) + 1/(15^2+a^2) + \dots = (\pi/(8a)) \{ \text{sh}(a\pi/2) + \sqrt{2} \cdot \text{sh}(a\pi/4) \} / \text{ch}(a\pi/2)$$

$$1/(3^2+a^2) + 1/(5^2+a^2) + 1/(11^2+a^2) + 1/(13^2+a^2) + \dots = (\pi/(8a)) \{ \text{sh}(a\pi/2) - \sqrt{2} \cdot \text{sh}(a\pi/4) \} / \text{ch}(a\pi/2)$$

a は任意の実数。

<Z(4) 類似香り式の 2 分割 (2 分身) >

$$1/(1^4+4a^4) + 1/(3^4+4a^4) + 1/(5^4+4a^4) + 1/(7^4+4a^4) + \dots$$

$$= (\pi/(16a^3)) \{ \text{sh}(a\pi) - \sin(a\pi) \} / \{ \cos(a\pi) + \text{ch}(a\pi) \}$$

この Z(4) 類似ゼータ香り式の 2 分身は、次となる。

$$1/(1^4+4a^4) + 1/(7^4+4a^4) + 1/(9^4+4a^4) + 1/(15^4+4a^4) + \dots$$

$$= (\pi/(32a^3)) \{ \text{sh}(a\pi) - \sin(a\pi) + \sqrt{2} (\cos \alpha \text{sh} \beta - \text{sh} \alpha \cos \beta + \sin \alpha \text{ch} \beta - \text{ch} \alpha \sin \beta) \} / \{ \cos(a\pi) + \text{ch}(a\pi) \}$$

$$1/(3^4+4a^4) + 1/(5^4+4a^4) + 1/(11^4+4a^4) + 1/(13^4+4a^4) + \dots$$

$$= (\pi/(32a^3)) \{ \text{sh}(a\pi) - \sin(a\pi) - \sqrt{2} (\cos \alpha \text{sh} \beta - \text{sh} \alpha \cos \beta + \sin \alpha \text{ch} \beta - \text{ch} \alpha \sin \beta) \} / \{ \cos(a\pi) + \text{ch}(a\pi) \}$$

ここで、 $\alpha = a\pi/4$ 、 $\beta = 3a\pi/4$ 、a は任意の実数 (0 の場合 $a \rightarrow 0$)。

両香り式 2 分割の構造の類似性を味わいたい。比べやすくするため、色をつけた。

驚くべき類似性！

香り式もゼータと同じく、きれいな秩序を持っている。

●数学者で数学史家の高瀬正仁氏のブログを 2 回目、読み返している。

[数学史研究の回想 \(fc2.com\)](http://fc2.com)

膨大な内容であるが、面白いことこの上ない。ガウスは足場が見えないほどに完成度を高くしたものでないと公表しなかった、とは通説でよく言われることだが、必ずしもそれは当てはまらない。

ガウスは、足場を見せまくっている。著書や論文で、苦悩する場面、感動する場面、未解決の場면을吐露している。

通説など当てにならないものだ、と思った。

●「笑わない数学」という番組が、すこし前からBSではじまった。

先日は、P=NP? を取り上げていた。

最後の5分ほどだけ見ることができた。もしP=NPなどということになれば、社会構造がさらに効率化されるとも言っていた。ある数学者は「戦争、兵器など悪いことにも利用される。自分がもしその証明を持っていたとしても公表しないだろう」と冗談交じりに述べた。

純粋な数学は社会と切りはなされた理想世界と思っている人もいような気がするが、そんなことはないだろう。

=====