＜ 八つ追加、計 16 個の[四重積−二重積]対称式 ＞

前回、前々回で八つの恒等式を見出し、それを（その２５０）で報告した。それとは別にさらに新たな同類の式を八つ見出したので、今回はそれを紹介したい。

以下に先のⅠ、Ⅱと一緒に示す。今回、見出したのはⅢ、Ⅳである。sh, ch はそれぞれ双曲線関数 sinh, cosh を略したものである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

[四重積−二重積]対称式Ⅰ

対称式Ⅰ(1)

sinx・shx・cosy・chy − cosx・chx・siny・shy＝{sin(x+y)・sh(x−y) + sh(x+y)・sin(x−y)}/2

対称式Ⅰ(2)

cosx・shx・siny・chy − sinx・chx・cosy・shy＝{sin(x+y)・sh(x−y) − sh(x+y)・sin(x−y)}/2

対称式Ⅰ(3)

sinx・chx・cosy・shy + cosx・shx・siny・chy＝{sin(x+y)・sh(x+y) − sh(x−y)・sin(x−y)}/2

対称式Ⅰ(4)

sinx・shx・cosy・chy + cosx・chx・siny・shy＝{sin(x+y)・sh(x+y) + sh(x−y)・sin(x−y)}/2

[四重積−二重積]対称式Ⅱ

対称式Ⅱ(1)

cosx・shx・cosy・shy + sinx・chx・siny・chy＝{cos(x−y)・ch(x+y) − ch(x−y)・cos(x+y)}/2

対称式Ⅱ(2)

cosx・chx・cosy・chy + sinx・shx・siny・shy＝{cos(x−y)・ch(x+y) + ch(x−y)・cos(x+y) }/2

対称式Ⅱ(3)

cosx・chx・cosy・chy − sinx・shx・siny・shy＝{cos(x+y)・ch(x+y) + ch(x−y)・cos(x−y)}/2

対称式Ⅱ(4)

cosx・shx・cosy・shy − sinx・chx・siny・chy＝{cos(x+y)・ch(x+y) − ch(x−y)・cos(x−y)}/2

[四重積−二重積]対称式Ⅲ

対称式Ⅲ(1)

cosx・chx・cosy・shy + sinx・shx・siny・chy＝{cos(x−y)・sh(x+y) − sh(x−y)・cos(x+y)}/2

対称式Ⅲ(2)

$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y + \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\cos(x-y)\cdot \mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y)\cdot \cos(x+y)\}/2$

対称式Ⅲ(3)

$\cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\cos(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x+y) + \mathrm{sh}(x-y)\cdot \cos(x-y)\}/2$

対称式Ⅲ(4)

$\cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y - \sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\cos(x+y)\cdot \mathrm{sh}(x+y) - \mathrm{sh}(x-y)\cdot \cos(x-y)\}/2$

[四重積−二重積]対称式Ⅳ

対称式Ⅳ(1)

$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y - \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\sin(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot \sin(x+y)\}/2$

対称式Ⅳ(2)

$\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y - \cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x-y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot \sin(x+y)\}/2$

対称式Ⅳ(3)

$\sin x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{ch}y + \cos x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{sh}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) + \mathrm{ch}(x-y)\cdot \sin(x-y)\}/2$

対称式Ⅳ(4)

$\sin x\cdot \mathrm{sh}x\cdot \cos y\cdot \mathrm{sh}y + \cos x\cdot \mathrm{ch}x\cdot \sin y\cdot \mathrm{ch}y=\{\sin(x+y)\cdot \mathrm{ch}(x+y) - \mathrm{ch}(x-y)\cdot \sin(x-y)\}/2$

ここで、x,y は任意の実数である。

＝＝

今回見つけたのは後半のⅢ、Ⅳの八つだが、きれいであり、面白い形（特に左辺）をしている。

Ⅲ、ⅣもⅠ、Ⅱと同系統のものに属しているといえるが、右辺に関しては、sin と ch、cos と sh の融合体が出ている点が違う。Ⅰ、Ⅱでは、sin と sh，cos と ch の融合体である。

一方、左辺については、結合の仕方がⅠやⅡと違っているのが大変面白い。<u>１項だけ見ると非対称的に見えるが、左辺全体では対称的に</u>なっていて調和がとれている。

今回の式も公式集「数学公式Ⅱ」（岩波書店）の「双曲線函数と三角関数を含む公式」の頁には出ていないが、本当にないのかはわからない。

導出方法を改めて示しておく。（<u>その２４９</u>）では、左辺⇒右辺の方向で導出方法を示したが、しかしその方法は変則的でわかりにくい。式によってはかなり苦労するものもある。

一旦、これらの恒等式が見つかれば、右辺⇒左辺の方向で導出を示すほうが<u>はるかに簡単である</u>。よって、その方法で再度、示しておく。

****

＜導出方法＞

方針は、右辺に対し三角関数/双曲線関数の加法定理を適用していき、公式を導く。Ⅰ(1)の導出を示す。

(1/2){sin(x+y)sh(x−y) +sh(x+y)sin(x−y)}

＝(1/2){(sinx・cosy +cosx・siny)(shx・chy −chx・shy)+(shx・chy +chx・shy)(sinx・cosy −cosx・siny)}

＝(1/2){sinx・cosy・shx・chy − sinx・cosy・chx・shy + cosx・siny・shx・chy − cosx・siny・chx・shy

+sinx・cosy・shx・chy − cosx・siny・shx・chy + sinx・cosy・chx・shy − cosx・siny・chx・shy}

＝sinx・cosy・shx・chy − cosx・siny・chx・shy

＝sinx ・shx・cosy・chy − cosx・chx・siny・shy

このように対称式Ⅰ(1)が導けた。

sinx・shx・cosy・chy − cosx・chx・siny・shy＝{sin(x+y)sh(x−y) +sh(x+y)sin(x−y)}/2

他の式も同様にして導くことができる。

導出終わり。

****

このように右辺⇒左辺の方向で、加法定理からまったく簡単に導ける。

ただし、それは一旦式を見つけたあとの話であって、最初は私の手元には左辺の４重積の方だけがあった（ゼータ香り式分割母等式から得た）。そこから何か出ることを期待し変形していったのである。後述参。

登山ルートはたくさんある。難しいルートを苦労して頂上に達すると、なんとあちら側には容易なルートがあった！というのに似ている。数学ではそのようなことが頻繁にある。

Ⅰ、Ⅱを得たとき「もうこれ以上は出ない」と思った。が、ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗型）を眺めているうちに、まだあるかもしれない・・と思った。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●（その２４２）のゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗型）を再掲。

ゼータ香り式分割母等式Ⅱ（分母４乗型）

$\sin x/(1^4+4a^4) - \sin 3x/(3^4+4a^4) + \sin 5x/(5^4+4a^4) - \sin 7x/(7^4+4a^4) + \cdots$

$= (\pi/(2a)^3)\{(C1+S1)\cos(ax)\mathrm{sh}(ax) - (C1-S1)\sin(ax)\mathrm{ch}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}$ ---①

$(-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2)$

ここで、C1＝cos(aπ/2)ch(aπ/2)、S1＝sin(aπ/2)sh(aπ/2), a は任意の実数（0 の場合 a->0)。

この右辺の分子を眺めて“(C1+S1)cos(ax)sh(ax) -(C1-S1)sin(ax)ch(ax)“が気になった。この形が複雑であり、ゼータの親分ならば「もっと簡明にできるのではないか？」と思った。

”C1・cos(ax)・sh(ax)+S1・sin(ax)・ch(ax)”や“S1・cos(ax)・sh(ax)-C1・sin(ax)・ch(ax)”に着目。”C1・cos(ax)・sh(ax)+S1・sin(ax)・ch(ax)”すなわち、“cosx・chx・cosy・shy +sinx・shx・siny・chx”の計算を実行して、Ⅲ(1)式に行き着いた。

対称式Ⅲ(1)

cosx・chx・cosy・shy + sinx・shx・siny・chy＝{cos(x-y)・sh(x+y) - sh(x-y)・cos(x+y)}/2

●一旦Ⅲ(1)が出たら、あとは簡単である。右辺を機械的にくるくると循環的に変形するだけで、残り７個が次々と得られた。一点突破が全面突破である。

三角関数/双曲線関数-融合域は豊かな土壌から成っていて、様々な作物が育っている（はずである)。今回の公式は、ある根っこを引っ張ると、つぎつぎにイモが出てきた！という感じに似ている。

● 上式①の右辺の“S1・cos(ax)・sh(ax)-C1・sin(ax)・ch(ax)”については、対称式Ⅳ(1)が対応するとわかる。

対称式Ⅳ(1)

sinx・shx・cosy・shy - cosx・chx・siny・chy＝{sin(x-y)・ch(x+y) - ch(x-y)・sin(x+y)}/2

●対称性。これらの恒等式は、高い対称性をもつ。

対称式Ⅰ(1)

sinx・shx・cosy・chy - cosx・chx・siny・shy＝{sin(x+y)・sh(x-y) + sh(x+y)・sin(x-y)}/2

群でいえば、どんな種類の群に対応するのか。

例えば、上式では、x と y を交換しても、式は不変。

また、x と y をそれぞれ ix,iy に変えても（i：虚数単位)、式は不変！！

それ以外の変換でも不変となる。

位数は？　たぶん１６個の式すべて、同じ種類の群になると思う。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.7.16 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「数学公式Ⅱ」(森口・宇田川・一松、岩波書店)