＜ L(3)類似香り式３分割の導出＞

母等式Ⅰ(分母４乗型)を使ってL(3)類似香り式の３分割を行ったので、今回はそれを紹介したい。

なお、L(3)類似香り式とは次の①である（前回導出)。以下の ch, sh は、それぞれ双曲線関数 cosh, sinh のことである。

$$1/(1^4+4a^4)\ -3/(3^4+4a^4)\ +5/(5^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +9/(9^4+4a^4)\ -11/(11^4+4a^4)\ +13/(13^4+4a^4)\ -15/(15^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)S1/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad ----①$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)sh(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0)。

上は、$L(3)=1\ -1/3^3\ +1/5^3\ -1/7^3\ +\cdot\cdot$ の類似となっている。

まず母等式Ⅰ(分母４乗型)を掲げる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母４乗型)

$$\cos x/(1^4+4a^4)\ -3\cos 3x/(3^4+4a^4)\ +5\cos 5x/(5^4+4a^4)\ -7\cos 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)\{S1\cdot\cos(ax)ch(ax)\ -C1\cdot\sin(ax)sh(ax)\}/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad ---②$$
$$(-\pi/2<x<\pi/2)$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)sh(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)ch(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0)。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

では、今回の結果から示す。L(3)類似香り式の３分割は以下となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(3)類似香り式　３分割＞

$$A1=1/(1^4+4a^4)\ -11/(11^4+4a^4)\ +13/(13^4+4a^4)\ -23/(23^4+4a^4)\ +25/(25^4+4a^4)\ -35/(35^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)\{(S1\cdot C2)/3-(C1\cdot S2)/3+S1/3+(S1\cdot C3)/\sqrt{3}-(C1\cdot S3)/\sqrt{3}\}/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad ---③$$

$$A2=3/(3^4+4a^4)\ -9/(9^4+4a^4)\ +15/(15^4+4a^4)\ -21(21+4a^4)\ +27(27+4a^4)\ -33(33+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)\{2(S1\cdot C2)/3-2(C1\cdot S2)/3-S1/3\}/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad ---④$$

$$A3=5/(5^4+4a^4)\ -7/(7^4+4a^4)\ +17/(17^4+4a^4)\ -19/(19^4+4a^4)\ +29/(29^4+4a^4)\ -31/(31^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)\{(S1\cdot C2)/3-(C1\cdot S2)/3+S1/3-(S1\cdot C3)/\sqrt{3}+(C1\cdot S3)/\sqrt{3}\}/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad ---⑤$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)sh(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)ch(a\pi/2)$,

$S2=\sin(a\pi/3)\,sh(a\pi/3)$, $C2=\cos(a\pi/3)\,ch(a\pi/3)$,

$S3=\sin(a\pi/6)\,sh(a\pi/6)$, $C3=\cos(a\pi/6)\,ch(a\pi/6)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

A1(③) −A2(④) +A3(⑤)＝①となるので、A1,−A2,A3 がＬ(3)類似香り式の３分身である。これは、Ｌ(3)３分割の完全な類似になっている。Ｌ(3)３分割⇒（その１２７）

では、上記結果の導出の方法を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

ゼータ香り式分割母等式Ｉ(分母４乗型)

$$\cos x/(1^4+4a^4) -3\cos 3x/(3^4+4a^4) +5\cos 5x/(5^4+4a^4) -7\cos 7x/(7^4+4a^4) +\cdots$$
$$=(\pi/(2a)^2)\{S1\cdot\cos(ax)\,ch(ax) -C1\cdot\sin(ax)\,sh(ax)\}/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad ----②$$
$$(-\pi/2<x<\pi/2)$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)\,sh(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)\,ch(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

②の母等式Ｉ(分母４乗型)の x に 0 を代入すると、次式[A]となる(冒頭の①と同じ)。

$$1/(1^4+4a^4) -3/(3^4+4a^4) +5/(5^4+4a^4) -7/(7^4+4a^4) +9/(9^4+4a^4) -11/(11^4+4a^4) +13/(13^4+4a^4) -15/(15^4+4a^4) +\cdots$$
$$=(\pi/(2a)^2)\,S1/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad ----[A]$$

次に②の x にπ/3 を代入すると、次式[B]となる(−π/3 を代入しても同じ)。

$$(1/2)\{1/(1^4+4a^4) +5/(5^4+4a^4) -7/(7^4+4a^4) -11/(11^4+4a^4) +13/(13^4+4a^4) +17/(17^4+4a^4) -19/(19^4+4a^4)$$
$$-23/(23^4+4a^4) +25/(25^4+4a^4) +29/(29^4+4a^4) -31/(31^4+4a^4) -35/(35^4+4a^4) +\cdots\}$$
$$+\{3/(3^4+4a^4) -9/(9^4+4a^4) +15/(15^4+4a^4) -21/(21^4+4a^4) +27/(27^4+4a^4) -33/(33^4+4a^4) +\cdots\}$$
$$=(\pi/(2a)^2)(S1\cdot C2 -C1\cdot S2)/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad ----[B]$$

さらに②の x にπ/6 を代入すると、次式[C]となる(−π/6 を代入しても同じ)。

$$(\sqrt{3}/2)\{1/(1^4+4a^4) -5/(5^4+4a^4) +7/(7^4+4a^4) -11/(11^4+4a^4) +13/(13^4+4a^4) -17/(17^4+4a^4) +19/(19^4+4a^4)$$
$$-23/(23^4+4a^4) +25/(25^4+4a^4) -29/(29^4+4a^4) +31/(31^4+4a^4) -35/(35^4+4a^4) +\cdots\}$$
$$=(\pi/(2a)^2)(S1\cdot C3 -C1\cdot S3)/(\cos(a\pi)+ch(a\pi)) \quad ----[C]$$

ここで A1,A2,A3 を次のものとしよう。

$$A1=1/(1^4+4a^4) -11/(11^4+4a^4) +13/(13^4+4a^4) -23/(23^4+4a^4) +25/(25^4+4a^4) -35/(35^4+4a^4) +\cdots$$
$$A2=3/(3^4+4a^4) -9/(9^4+4a^4) +15/(15^4+4a^4) -21/(21^4+4a^4) +27/(27^4+4a^4) -33/(33^4+4a^4) +\cdots$$
$$A3=5/(5^4+4a^4) -7/(7^4+4a^4) +17/(17^4+4a^4) -19/(19^4+4a^4) +29/(29^4+4a^4) -31/(31^4+4a^4) +\cdots$$

[A],[B],[C]を A1,A2,A3 を用いて書き直したものを示す。

$A1 - A2 + A3 = (\pi/(2a)^2) S1/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$ ----[A]

$(1/2)(A1+A3) + A2 = (\pi/(2a)^2)(S1 \cdot C2 - C1 \cdot S2)/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$ ----[B]

$(\sqrt{3}/2)(A1-A3) = (\pi/(2a)^2)(S1 \cdot C3 - C1 \cdot S3)/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$ ----[C]

　これを連立方程式として解いて、A1,A2,A3 を得る。
以上。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　このようにしてＬ(3)類似香り式の３分割が得られた。

　複数のａの値で数値計算も行ったが、大丈夫であった。③～⑤の左辺は右辺値に収束する。

　最後に、今回の結果をもう一度眺めよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜L(3)類似香り式　３分割＞

$A1 = 1/(1^4+4a^4) - 11/(11^4+4a^4) + 13/(13^4+4a^4) - 23/(23^4+4a^4) + 25/(25^4+4a^4) - 35/(35^4+4a^4) + \cdots$

$= (\pi/(2a)^2)\{(S1 \cdot C2)/3 - (C1 \cdot S2)/3 + S1/3 + (S1 \cdot C3)/\sqrt{3} - (C1 \cdot S3)/\sqrt{3}\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$ ---③

$A2 = 3/(3^4+4a^4) - 9/(9^4+4a^4) + 15/(15^4+4a^4) - 21(21+4a^4) + 27(27+4a^4) - 33(33+4a^4) + \cdots$

$= (\pi/(2a)^2)\{2(S1 \cdot C2)/3 - 2(C1 \cdot S2)/3 - S1/3\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$ ---④

$A3 = 5/(5^4+4a^4) - 7/(7^4+4a^4) + 17/(17^4+4a^4) - 19/(19^4+4a^4) + 29/(29^4+4a^4) - 31/(31^4+4a^4) + \cdots$

$= (\pi/(2a)^2)\{(S1 \cdot C2)/3 - (C1 \cdot S2)/3 + S1/3 - (S1 \cdot C3)/\sqrt{3} + (C1 \cdot S3)/\sqrt{3}\}/(\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi))$ ---⑤

　　ここで、$S1 = \sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, $C1 = \cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$,
$S2 = \sin(a\pi/3)\mathrm{sh}(a\pi/3)$, $C2 = \cos(a\pi/3)\mathrm{ch}(a\pi/3)$,
$S3 = \sin(a\pi/6)\mathrm{sh}(a\pi/6)$, $C3 = \cos(a\pi/6)\mathrm{ch}(a\pi/6)$,　ａは任意の実数（0 の場合 a->0)。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　A1(③) -A2(④) +A3(⑤)＝①となるというこの興味ある過程をもう一度味わいたい。

なお、上記結果での S2 と C2 は、前回の２分割の場合と意味を変えているので注意願いたい。（前回は（）の中が aπ/3 ではなく、aπ/4 であった）

　また③と⑤は、左辺はえらく違うのに右辺は見た目がそっくりである点にも注目したい。右辺｛｝内の符号がちょっと違っているだけである。

　最後にテーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝
●ゼータ香り式の分身の右辺を見ていると、三角関数と双曲線関数がつねに一緒に（対称的に）対になって表れている。両者はとても親和性があるというか、二つが結合することで、とても“よい性質”を発揮しているように思える。

　cos,sin.ch.sh を組み合わせて、加法定理が成り立つような新しい関数を構成できないだろうか？
なにか出そうな雰囲気があるが、まだよくわからない。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.5.8 杉岡幹生

＜参考文献＞

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」(Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社)