＜ ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母４乗型)の提示 ＞

------ 新しいフーリエ級数の発見 -----

（その２４３）では、Z(4)類似香り式の分身を生み出す母等式Ⅱ（分母４乗型）を見出した。
その類似を辿って今回、新しいフーリエ級数、すなわちL(3)類似香り式の分身を生み出す母等式Ⅰ(分母４乗型)を見出したので紹介したい。

これも強力な手法“虚数マジック”を使って見出した。得られたそのフーリエ級数は母等式Ⅱ(分母４乗型)と同様にふしぎな形をしている。
私は、数学の式では、ふしぎな式と異様な式はきわめて価値が高い、美しい式はそれなりに価値が高い・・と独断で思っている。

とりあえず、まず発見したフーリエ級数つまり母等式Ⅰ(分母４乗型)を示す。次のものである。

なお、正式な呼称？“ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母４乗型)”は、“母等式Ⅰ(分母４乗型)”と略すことも多い。ch, sh は、双曲線関数 cosh, sinh のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母４乗型)

$$\cos x/(1^4+4a^4)\ -3\cos 3x/(3^4+4a^4)\ +5\cos 5x/(5^4+4a^4)\ -7\cos 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)\{S1\cdot\cos(ax)\,ch(ax)\ -C1\cdot\sin(ax)\,sh(ax)\}/\{\cos(a\pi)+ch(a\pi)\}\quad ---①$$
$$(-\pi/2<x<\pi/2)$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)\,sh(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)\,ch(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

これが今回得たフーリエ級数である。それと同時にL(3)類似香り式の分割（分身）を生み出す母等式となっている。

左辺から、$L(3)=1\ -1/3^3\ +1/5^3\ -1/7^3\ +\cdot\cdot$の類似になっていることが感じ取れるのではなかろうか。

さて、今回見出したフーリエ級数の導出の方法を示しておく。

****

＜導出の方法＞

今回得た下記①の母等式Ⅰ(分母４乗型)の導出の方法を以下に示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ｉ（分母４乗型）

$\cos x/(1^4+4a^4) -3\cos 3x/(3^4+4a^4) +5\cos 5x/(5^4+4a^4) -7\cos 7x/(7^4+4a^4) +\cdots$
$=(\pi/(2a)^2)\{S1\cdot\cos(ax)\mathrm{ch}(ax) -C1\cdot\sin(ax)\mathrm{sh}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}$ ---①
$(-\pi/2<x<\pi/2)$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0）。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

前回までの次の母等式Ｉを利用する。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ｉ

$\sin x/(1^2+a^2) +3\sin 3x/(3^2+a^2) +5\sin 5x/(5^2+a^2) +\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---②
$(0<x<\pi)$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

まず、虚数マジックの最初のステップとして、②で a＝ib（i は虚数単位）として計算し、最終に b を a に置き換える（戻す）と、次の③を得る。（②右辺の ch が cos に変わった！）

$\sin x/(1^2-a^2) +3\sin 3x/(3^2-a^2) +5\sin 5x/(5^2-a^2) +\cdots=(\pi/4))\cos(a(\pi/2-x))/\cos(a\pi/2)$ ---③

③に到達するまでに、$\sin(ix)=i\,\mathrm{sh}(x)$、$\cos(ix)=\mathrm{ch}(x)$の関係を使った。虚数マジックではこの関係をよく使う。②と③を並べよう。

$\sin x/(1^2+a^2) +3\sin 3x/(3^2+a^2) +5\sin 5x/(5^2+a^2) +\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---②
$\sin x/(1^2-a^2) +3\sin 3x/(3^2-a^2) +5\sin 5x/(5^2-a^2) +\cdots=(\pi/4))\cos(a(\pi/2-x))/\cos(a\pi/2)$ ---③

②から③を引き算して、次を得る。

$-2a^2\{\sin x/(1^4-a^4) +3\sin 3x/(3^4-a^4) +5\sin 5x/(5^4-a^4) +7\sin 7x/(7^4-a^4) +\cdots\}$
$=(\pi/4)\{\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2) -\cos(a(\pi/2-x))/\cos(a\pi/2)\}$ ----④

次に虚数マジックの第 2 段階として、④で $a=\sqrt{i}\cdot(b\sqrt{2})$（i は虚数単位）として長い計算を行うと、次の⑤に到達する。

$\sin x/(1^4+4b^4) +3\sin 3x/(3^4+4b^4) +5\sin 5x/(5^4+4b^4) +7\sin 7x/(7^4+4b^4) +\cdots$
$=(\pi/(2b)^2)\{S1\cdot\cos(b(\pi/2-x))\mathrm{ch}(b(\pi/2-x)) -C1\cdot\sin(b(\pi/2-x))\mathrm{sh}(b(\pi/2-x))\}/\{\cos(b\pi)+\mathrm{ch}(b\pi)\}$ ---⑤

⑤で、$\pi/2-x=t$ として x から t に置き換えると、本質的に①と同じ式に行きつく。
導出終わり。

****

このようにして母等式Ⅰ(分母４乗型)が求まった。虚数を道具的に使うことによって、本質的に重要な公式に行き着くというこのふしぎな感覚を味わっていただきたい。
なお、今回のフーリエ級数に対しては、x と a の複数の組み合わせで数値検証を行っているが、すべて正しい。左辺は右辺値に収束する。

再び式を眺めよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母４乗型)

$$\cos x/(1^4+4a^4)\ -3\cos 3x/(3^4+4a^4)\ +5\cos 5x/(5^4+4a^4)\ -7\cos 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)\{S1\cdot\cos(ax)\mathrm{ch}(ax)\ -C1\cdot\sin(ax)\mathrm{sh}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\quad \text{---①}$$
$$(-\pi/2<x<\pi/2)$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0)。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

ともかくフーリエ級数が得られたことが重要である。これで、L(1)類似香り式の分身を出すのとまったく同じやり方で、L(3)類似香り式の分身たちを次々に生み出すことができるようになった。機械的に無数の分身たちを生み出せる点がポイントである。
分身生成の母体となるフーリエ級数がいかに大切かがわかる。

なお、今回見出した母等式Ⅰ(分母４乗型)を使って、L(3)類似香り式の分身を出すのは、おいおい行っていきたい。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 前回の母等式でもそうだが、今回のものでも分母の形がとくに私にはふしぎである。

$$\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)$$

こんなふうに三角関数と双曲線関数が足し算で並んでいるなどという式は見たことがない。
ふしぎだ・・
しかし、この形が驚くべき対称性を生み出している。⇒二つ下の群の考察を参照。

● **ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母４乗型)**

$$\cos x/(1^4+4a^4)\ -3\cos 3x/(3^4+4a^4)\ +5\cos 5x/(5^4+4a^4)\ -7\cos 7x/(7^4+4a^4)\ +\cdot\cdot$$
$$=(\pi/(2a)^2)\{S1\cdot\cos(ax)\mathrm{ch}(ax)\ -C1\cdot\sin(ax)\mathrm{sh}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\}\quad \text{---①}$$
$$(-\pi/2<x<\pi/2)$$

この①で、x＝0,a->0 とすると、簡単な計算で（ロピタルの定理を使用)、L(s)の特殊値L(3)が得られる。
$1 -1/3^3 +1/5^3 -1/7^3 + \cdot\cdot = \pi^3/32$

また①で、x はそのままで、a->0 として計算すると、次の公式集にも載っているフーリエ級数に到達する。
$\sin x/1^3 + \sin 3x/3^3 + \sin 5x/5^3 + \sin 7x/7^3 + \cdot\cdot = \pi x(\pi - x)/8 \quad (0 \leqq x \leqq x\pi)$

こっちの計算は気の遠くなるような長大なものになるが（三角関数/双曲線関数の加法定理、ロピタルを使用)、既知のフーリエ級数が①から得られるとわかったことは、うれしいことである。

● ゼータ香り式分割母等式Ⅰ(分母４乗型)

$$\cos x/(1^4+4a^4) - 3\cos 3x/(3^4+4a^4) + 5\cos 5x/(5^4+4a^4) - 7\cos 7x/(7^4+4a^4) + \cdot\cdot$$
$$= (\pi/(2a)^2)\{S1\cdot\cos(ax)\mathrm{ch}(ax) - C1\cdot\sin(ax)\mathrm{sh}(ax)\}/\{\cos(a\pi)+\mathrm{ch}(a\pi)\} \quad \text{---①}$$
$$(-\pi/2 < x < \pi/2)$$

ここで、$S1=\sin(a\pi/2)\mathrm{sh}(a\pi/2)$, $C1=\cos(a\pi/2)\mathrm{ch}(a\pi/2)$, a は任意の実数（0 の場合 a->0)。

この①は、高い対称性（不変性）を備えている。その対称性を見よう。結局は、母等式Ⅱ(分母４乗型)の対称性と同じものになるのだが・・

三角関数と双曲線関数の間には、i(虚数単位)を用いて次の興味深い関係がある。
$\sin(ia) = i\cdot\mathrm{sh}(a)$, $i\cdot\sin(a) = \mathrm{sh}(ia)$,　$\cos(ia) = \mathrm{ch}(a)$, $\cos(a) = \mathrm{ch}(ia)$　　----[C]

この関係を使ってみていく。分母の奇妙さは、この関係とかかわっている。

x,a をともに変数と見てそのセット(x,a)を考えたとき、以下の八つの変換操作に対して①は不変となる！

(x,a)に対するそれぞれの変換操作を言葉で述べれば、次となる。(i：虚数単位)
E:「x を同じものに置き換える、且つ、a を同じものに置き換える。」
A1:「x を同じものに置き換える、且つ、a を i 倍したものに置き換える。」
A2:「x を同じものに置き換える、且つ、a を i^2 倍したものに置き換える。」
A3:「x を同じものに置き換える、且つ、a を i^3 倍したものに置き換える。」
A4:「x を-1 倍したものに置き換える、且つ、a を同じものに置き換える。」
A5:「x を-1 倍したものに置き換える、且つ、a を i 倍したものに置き換える。」
A6:「x を-1 倍したものに置き換える、且つ、a を i^2 倍したものに置き換える。」
A7:「x を-1 倍したものに置き換える、且つ、a を i^3 倍したものに置き換える。」

上を表にまとめると、以下となる。

E:(x,a)⇒ (x,a)	A4:(x,a)⇒ (-x,a)
A1:(x,a)⇒ (x,ia)	A5:(x,a)⇒ (-x,ia)
A2:(x,a)⇒ (x,i^2a)	A6:(x,a)⇒ $(-x,i^2a)$
A3:(x,a)⇒ (x,i^3a)	A7:(x,a)⇒ $(-x,i^3a)$

これらの操作を元として持つ集合Ｇ＝{E, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7}を考えると、このＧは群を成す。積表を下に示す。この位数８の群の種類を調べると、C4×C2 というタイプの群と分かる（サイトでの下図 C4×C2 の積表に一致）。右下への対角線に対称的に並んでいるので、この群は可換群（アーベル群）である。

	E	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
E	E	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
A1	A1	A2	A3	E	A5	A6	A7	A4
A2	A2	A3	E	A1	A6	A7	A4	A5
A3	A3	E	A1	A2	A7	A4	A5	A6
A4	A4	A5	A6	A7	E	A1	A2	A3
A5	A5	A6	A7	A4	A1	A2	A3	E
A6	A6	A7	A4	A5	A2	A3	E	A1
A7	A7	A4	A5	A6	A3	E	A1	A2

サイトより引用 http://escarbille.free.fr/group/?g=8_2

Cayley table

.	e	a	aa	aaa	b	ba	baa	baaa
e	e	a	aa	aaa	b	ba	baa	baaa
a	a	aa	aaa	e	ba	baa	baaa	b
aa	aa	aaa	e	a	baa	baaa	b	ba
aaa	aaa	e	a	aa	baaa	b	ba	baa
b	b	ba	baa	baaa	e	a	aa	aaa
ba	ba	baa	baaa	b	a	aa	aaa	e
baa	baa	baaa	b	ba	aa	aaa	e	a
baaa	baaa	b	ba	baa	aaa	e	a	aa

奇妙に見える分母の形が対称性（不変性）に大きく貢献していることに気づく。そんなカラクリが①の背後に隠されている。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.4.24 杉岡幹生

参考文献

・「数学公式Ⅱ」（森口・宇田川・一松、岩波書店）

・「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック」（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）