# ＜ 母等式Ⅱによる Z(2)類似香り式４分割の導出＞

今回は、ゼータ香り式分割母等式Ⅱを用いて、Z(2)類似香り式の４分割（４分身）を導出したい。

Z(2)は、$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=(3/4)\zeta(2)=\pi^2/8$ であり、本質的に $\zeta(2)$ と等しいものである。
“Z(n)“の記法は、私が用いているもので一般的なものではない。なお、以下の ch, sh は、それぞれ双曲線関数 cosh, sinh のことである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

**ゼータ香り式分割母等式Ⅰ**

$\sin x/(1^2+a^2)+3\sin 3x/(3^2+a^2)+5\sin 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/4)\mathrm{ch}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$(0<x<\pi)$

**ゼータ香り式分割母等式Ⅱ**

$\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

a は任意の実数。(0 の場合は、a->0 を意味する)

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

では、まず結果から示す。Z(2)類似香り式の４分割は以下となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

**＜Z(2)類似香り式＞**

$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{th}(a\pi/2)$ -----①

a は任意の実数。

この Z(2)類似ゼータ香り式①の４分身は、次の②～⑤となる。

ここで、$\alpha=\sin(\pi/8)=(1/2)\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 、$\beta=\cos(\pi/8)=(1/2)\sqrt{2+\sqrt{2}}$ である。

## ＜Z(2)類似香り式の４分割（４分身）＞

$A1=1/(1^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(31^2+a^2)+1/(33^2+a^2)+1/(47^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/(16a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)+\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)+2\alpha\cdot\mathrm{sh}(a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)+2\beta\cdot\mathrm{sh}(3a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$ --②

$A2=1/(3^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(19^2+a^2)+1/(29^2+a^2)+1/(35^2+a^2)+1/(45^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/(16a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)-\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)+2\alpha\cdot\mathrm{sh}(3a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)-2\beta\cdot\mathrm{sh}(a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$ --③

$A3=1/(5^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+1/(37^2+a^2)+1/(43^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/(16a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)-\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)-2\alpha\cdot\mathrm{sh}(3a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)+2\beta\cdot\mathrm{sh}(a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$ --④

$A4=1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+1/(25^2+a^2)+1/(39^2+a^2)+1/(41^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi/(16a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)+\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)-2\alpha\cdot\mathrm{sh}(a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)-2\beta\cdot\mathrm{sh}(3a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}$ --⑤

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

A1 +A2 +A3 +A4＝①となるので、A1, A2,A3,A4 がZ(2)類似香り式の４分身である。これは、Z(2)４分割の完全な類似になっていることにも注意したい。Z(2)４分割⇒（その１５）

では、上記結果の導出の方法を示す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

以下で $\alpha$ と $\beta$ は、$\alpha=\sin(\pi/8)=(1/2)\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 、$\beta=\cos(\pi/8)=(1/2)\sqrt{2+\sqrt{2}}$ である。

**ゼータ香り式分割母等式Ⅱ**

$\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cos 7x/(7^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a(\pi/2-x))/\mathrm{ch}(a\pi/2)$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

この母等式Ⅱの x に 0 を代入すると、次となる(πを代入しても同じ)。

$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\mathrm{th}(a\pi/2)$ ---⑥

母等式Ⅱの x にπ/4 を代入すると、次となる(3π/4 を代入しても同じ)。

$(1/\sqrt{2})\{1/(1^2+a^2)-1/(3^2+a^2)-1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)-1/(11^2+a^2)-1/(13^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+\cdots\}$

$=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑦

母等式Ⅱの x にπ/8 を代入すると、次となる(7π/8 を代入しても同じ)。

$\beta\{1/(1^2+a^2)-1/(7^2+a^2)-1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(17^2+a^2)-1/(23^2+a^2)-1/(25^2+a^2)+1/(31^2+a^2)+\cdots\}$

$+\alpha\{1/(3^2+a^2)-1/(5^2+a^2)-1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(19^2+a^2)-1/(21^2+a^2)-1/(27^2+a^2)+1/(29^2+a^2)+\cdots\}$

$=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(3a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑧

母等式Ⅱの x に 3π/8 を代入すると、次となる(5π/8 を代入しても同じ)。

$\alpha\{1/(1^2+a^2)-1/(7^2+a^2)-1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(17^2+a^2)-1/(23^2+a^2)-1/(25^2+a^2)+1/(31^2+a^2)+\cdots\}$

$-\beta\{1/(3^2+a^2)-1/(5^2+a^2)-1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(19^2+a^2)-1/(21^2+a^2)-1/(27^2+a^2)+1/(29^2+a^2)+\cdots\}$

$=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑨

さて、ここで A1 と A2 を次のものとしよう。

$A1=1/(1^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(31^2+a^2)+1/(33^2+a^2)+1/(47^2+a^2)+\cdots$

$A2=1/(3^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+1/(19^2+a^2)+1/(29^2+a^2)+1/(35^2+a^2)+1/(45^2+a^2)+\cdots$

$A3=1/(5^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(21^2+a^2)+1/(27^2+a^2)+1/(37^2+a^2)+1/(43^2+a^2)+\cdots$

$A4=1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(23^2+a^2)+1/(25^2+a^2)+1/(39^2+a^2)+1/(41^2+a^2)+\cdots$

⑥～⑨を A1,A2,A3,A4 を用いて書き直すと、次となる。

$A1+A2+A3+A4=(\pi/(4a))\mathrm{th}(a\pi/2)$ ---⑥

$\{A1-A2-A3+A4\}/\sqrt{2}=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑦

$\beta\{A1-A4\}+\alpha\{A2-A3\}=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(3a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑧

$\alpha\{A1-A4\}-\beta\{A2-A3\}=(\pi/(4a))\mathrm{sh}(a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ----⑨

　これを A1, A2,A3,A4 の連立方程式として解いて、冒頭で示した４分身②～⑤を得る。
以上。
＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　このようにして Z(2)類似香り式の４分身が得られた。連立方程式がたって、織物の糸をほどくように、きれいに得られていく。

　面白いことに４分身で a->0 とすると Z(2)の４分身に一致する。よって、上記結果はゼータ分割をも包含する一般的なものとなっている。

　数値計算も行ったが(a＝0.3,a＝10 で)、OK であった。②～⑤左辺の級数は右辺値に収束する。

再度、結果をまとめておこう。

*************************************************************

**＜Z(2)類似香り式＞**

$$1/(1^2+a^2)\ +1/(3^2+a^2)\ +1/(5^2+a^2)\ +1/(7^2+a^2)\ +1/(9^2+a^2)\ +1/(11^2+a^2)\ +\cdots = (\pi/(4a))\,\mathrm{th}(a\pi/2) \quad ----①$$

a は任意の実数。

　この①の Z(2)類似ゼータ香り式①の４分身は、次の②～⑤となる。

　　ここで、$\alpha=\sin(\pi/8)=(1/2)\sqrt{2-\sqrt{2}}$ 、$\beta=\cos(\pi/8)=(1/2)\sqrt{2+\sqrt{2}}$ である。

## ＜Z(2)類似香り式の４分割（４分身）＞

$$A1=1/(1^2+a^2)\ +1/(15^2+a^2)\ +1/(17^2+a^2)\ +1/(31^2+a^2)+\ 1/(33^2+a^2)\ +1/(47^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(16a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)\ +\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\ +2\alpha\cdot\mathrm{sh}(a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\ +2\beta\cdot\mathrm{sh}(3a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\} \quad --②$$

$$A2=1/(3^2+a^2)\ +1/(13^2+a^2)\ +1/(19^2+a^2)\ +1/(29^2+a^2)+\ 1/(35^2+a^2)\ +1/(45^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(16a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)\ -\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\ +2\alpha\cdot\mathrm{sh}(3a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\ -2\beta\cdot\mathrm{sh}(a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\} \quad --③$$

$$A3=1/(5^2+a^2)\ +1/(11^2+a^2)\ +1/(21^2+a^2)\ +1/(27^2+a^2)+\ 1/(37^2+a^2)\ +1/(43^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(16a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)\ -\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\ -2\alpha\cdot\mathrm{sh}(3a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\ +2\beta\cdot\mathrm{sh}(a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\} \quad --④$$

$$A4=1/(7^2+a^2)\ +1/(9^2+a^2)\ +1/(23^2+a^2)\ +1/(25^2+a^2)+\ 1/(39^2+a^2)\ +1/(41^2+a^2)+\cdots$$
$$=(\pi/(16a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)\ +\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\ -2\alpha\cdot\mathrm{sh}(a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\ -2\beta\cdot\mathrm{sh}(3a\pi/8)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\} \quad --⑤$$

*************************************************************

　②から⑤を全部足したら①になるというその素晴らしい秩序を味わっていただきたい。

　最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●　A1 +A4＝B1、A2 +A3＝B2 としよう。

このとき、B1 と B2 は、Z(2)類似香り式の２分割（２分身）となる。これまでの流れからそうなるのだが、その構造の秩序に感嘆してしまう。美しい対称性のなせる技である。

$B1=1/(1^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{th(a\pi/2)+\sqrt{2}\cdot sh(a\pi/4)/ch(a\pi/2)\}$

$B2=1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{th(a\pi/2)-\sqrt{2}\cdot sh(a\pi/4)/ch(a\pi/2)\}$

● 今回の４分身の一つ A1 に着目しよう。

$A1=1/(1^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+1/(17^2+a^2)+1/(31^2+a^2)+1/(33^2+a^2)+1/(47^2+a^2)+\cdots$

$=(\pi/(16a))\{th(a\pi/2)+\sqrt{2}\cdot sh(a\pi/4)/ch(a\pi/2)+2\alpha\cdot sh(a\pi/8)/ch(a\pi/2)+2\beta\cdot sh(3a\pi/8)/ch(a\pi/2)\}$ --②

a->0 とすると、

$1+1/15^2+1/17^2+1/31^2+1/33^2+1/47^2+\cdots=(\pi^2/128)\{4+\sqrt{2}+\sqrt{(2-\sqrt{2})}+3\sqrt{(2+\sqrt{2})}\}$

となる。

これは、Z(2)４分割（その１５）で見た B1 に一致する。一見ちがうように見えるが、じつは

$4\sqrt{(2+\sqrt{2})}+2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}=2\sqrt{(2-\sqrt{2})}+6\sqrt{(2+\sqrt{2})}$であり、ＯＫとなる。

● 母等式Ⅱの対称性を見たい。

$\cos x/(1^2+a^2)+\cos 3x/(3^2+a^2)+\cos 5x/(5^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))sh(a(\pi/2-x))/ch(a\pi/2)$

$(0\leqq x\leqq\pi)$

x, a をともに変数と見てそのセット(x, a)を考えたとき、以下の四つの変換操作に対して式は不変となる。

$(x,a)\Rightarrow(x,a)$、$(x,a)\Rightarrow(x,-a)$、$(x,a)\Rightarrow(\pi-x,a)$、$(x,a)\Rightarrow(\pi-x,-a)$

上の変換操作をそれぞれ左から E, A, B, C と定義しよう。言葉で述べれば、次となる。

E :「x を同じものに置き換える、且つ、a を同じものに置き換える。」$(x,a)\Rightarrow(x,a)$

A :「x を同じものに置き換える、且つ、a を-1 掛けたものに置き換える。」$(x,a)\Rightarrow(x,-a)$

B :「x をπから x を引いたものに置き換える、且つ、a を同じものに置き換える。」$(x,a)\Rightarrow(\pi-x,a)$

C :「x をπから x を引いたものに置き換える、且つ、a を-1 掛けたものに置き換える。」$(x,a)\Rightarrow(\pi-x,-a)$

これらの操作を元として持つ集合Ｇ＝{ E, A, B, C}を考えると、このＧは群を成す。積表は以下の通り。

| | E | A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| E | E | A | B | C |
| A | A | E | C | B |
| B | B | C | E | A |
| C | C | B | A | E |

これは、群論の本にある積表では、４元群Ｖという群に一致する。位数４の群は、巡回群か４元群Ｖかどちらかしかないことが知られているが、母等式Ⅱは後者となった。４元群Ｖは可換群（アーベル群）である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.3.19 杉岡幹生

参考文献

・「やさしい群論入門」（成田進、藤永茂著、岩波書店）