＜ ゼータ香り式の分割（２分割） ＞　rev.01

　このシリーズでは、ゼータの香りの漂う公式（や本質的に同じﾀﾝｼﾞｪﾝﾄ部分分数展開式）を使って、ゼータの分割を行ってきた。今回、ゼータの香りの漂う公式そのものの分割に成功したので報告する。
　以下多くの場合、ゼータの香りの漂う公式を“ゼータ香り式”または“香り式”と略記していく。

じつは私は１１年前にゼータ香り式を導出し、そしてそれを分割したようなものも多く見出していた。
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page209.htm
http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page212.htm

　しかし、その分割は本シリーズでやってきたゼータ分割とは少し違うものになっていて、完璧にきれいな分割になっていないような気がした。それが不満であった。
そこで、「ゼータの分割と完全な類似の分割が、香り式でもできないか？」と考え、模索した結果、できることを発見した。

　まず結果から示す。以下の通りである。なお、th,sh,ch は、それぞれ双曲線関数の tanh,sinh,cosh のことである。
注記：Z(2)は、$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=(3/4)\zeta(2)$であり、本質的に$\zeta(2)$と同じ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜Z(2)類似ゼータ香り式の２分割＞

$$1/(1^2+a^2)+1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+\cdots=(\pi/(4a))\,\mathrm{th}(a\pi/2)\quad\text{-----①}$$

a は任意の実数。

　この Z(2)類似ゼータ香り式①の 2 分割は、次の②、③となる。

$$1/(1^2+a^2)+1/(7^2+a^2)+1/(9^2+a^2)+1/(15^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)+\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}\quad\text{---②}$$

$$1/(3^2+a^2)+1/(5^2+a^2)+1/(11^2+a^2)+1/(13^2+a^2)+\cdots=(\pi/(8a))\{\mathrm{th}(a\pi/2)-\sqrt{2}\cdot\mathrm{sh}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)\}\quad\text{--③}$$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

　②、③を辺々足し算すると①になることが容易にわかるであろう。

　これは、Z(2)（すなわちζ(2)）２分割の完全なる類似になっている。しかも面白いことに、a->0 とすると、Z(2)の２分割に一致する。
　よって、上記の結果は、ゼータ分割をも包含する一般的なものとなっている。
数値計算も行ったが(a＝0.3,a＝10 で)、OK であった。左辺の級数は右辺値に収束する。

　導出は、ゼータの分割に比べてかなり複雑になるが、その方法を以下に簡単に記す。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜導出の方法＞

フーリエ級数

$\sin t/1 + \sin 3t/3 + \sin 5t/5 + \sin 7t/7 + \cdots = \pi/4 \quad (0<t<\pi)$ ――④

の両辺に e^{at} を掛け、0～x の範囲で積分する。部分積分を２回行って、次式を得る。

$\{(1-e^{ax}\cdot\cos x)/(1^2+a^2) + (1-e^{ax}\cdot\cos 3x)/(3^2+a^2) + (1-e^{ax}\cdot\cos 5x)/(5^2+a^2) + \cdots\}$
$+(e^{ax}/a)[\{\sin x/1 + \sin 3x/3 + \sin 5x/5 + \cdots\} - \{\sin x/(1^2+a^2) + 3\sin 3x/(3^2+a^2) + 5\sin 5x/(5^2+a^2) + \cdots\}]$
$=(\pi/4a)(e^{ax}-1)$ ---⑤

この⑤の x にπ/4 と 3π/4 を代入して得られる二式と①を組み合わせることで、②、③の２分割（２分身）が得られる。それらに付随して、次式も得られる。

$1/(1^2+a^2)+3/(3^2+a^2)-5/(5^2+a^2)-7/(7^2+a^2)+9/(9^2+a^2)+11/(11^2+a^2)-13/(13^2+a^2)-15/(15^2+a^2)+\cdots$
$=(\pi\sqrt{2}/4)\cdot\mathrm{ch}(a\pi/4)/\mathrm{ch}(a\pi/2)$ ---⑥

これは、虚２次体 $Q(\sqrt{-2})$ ゼータ $L2(s)=1 + 1/3^s - 1/5^s - 1/7^s + \cdots$ の s＝1 の次の類似である。

$1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - 1/13 - 1/15 + \cdots = \pi\sqrt{2}/4$

以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

導出の方法は以上である。

途中の計算は長くなるので飛ばしたが、それほど難しいものではない。ポイントは④のフーリエ級数を出発点とした点にある。１１年前は次のフーリエ級数を出発点としていた。

$(\pi-t)/2 = \sin t/1 + \sin 2t/2 + \sin 3t/3 + \sin 4t/4 + \cdots \quad (0 < t < 2\pi)$ ――⑦

この⑦を出発点としても香り式自体は同じものが出るが、分割した結果に関してはちょっと中心から外れたものになっていく（それはそれで面白いのだが）。一方、④を出発点とすると<u>王道を進んでいける</u>。

今回、香り式の分割ができたことで、未開の大きな領域があることがわかった。それは突然目の前に現れた巨大な地下空間という感じである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 本家本元ともいえるゼータの香りの漂う公式での分割ができたので、とてもうれしい。

これは深いところにつながっていて、ゼータ分割との類似を追求することで、いろいろなことが見えてくるだろう。

● じつは４分割（４分身）も得ることができた。おいおい示していく。
それは＜導出の方法＞の式で、x にπ/8, 3π/8, 5π/8, 7π/8 を代入することで得ることができる。
香り式も、ゼータ分割のようにフラクタル的に無限に分割できることは確実と思う。

● 上の４分割などは長く複雑な計算になり、はじめは「きれいな結果が得られるのか？」と心配になるのだが、対称性の威力でもって、最後は、霧が晴れるようにきれいな結果となる。
　ゼータは対称性という泉の上に浮かんでいる。

● その対称性の泉は三角関数からきている。つまり＜導出の方法＞でのフーリエ級数である。

sint/1 +sin3t/3 +sin5t/5 +sin7t/7 +・・＝π/4 ($0<t<\pi$) ----④

こんなちっぽけな式が豊かなものを生み出している。これが大河の源流である。

● 今回の結果に対し、Sugimoto 氏から「a が複素数でも成り立つ様です」と計算結果とともに連絡があった。面白いことである。Sugimoto 氏に感謝します。私は複素数までは手を広げることができないが、お伝えまで。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.2.20　杉岡幹生

2022.2.26 改訂 rev.01

＜導出の方法＞で以下を修正。

・{sinx/1 +3sin3x/3 +5sin5x/5 +・・}を{sinx/1 +sin3x/3 +sin5x/5 +・・}に修正。

・$1/(11^2+a^2)$ を $11/(11^2+a^2)$ に修正。