＜１回微分-新型母等式(最善形)　No.1＞

ここ何回かで、下記①の新型母等式(最善形)でＬ(1)の分割を見てきた。

$1/(1-x) -1/(3+x) +1/(5-x) -1/(7+x) +1/(9-x) -1/(11+x) +\cdots = (\pi/4)\tan(\pi(x+1)/4)$　----①

少なくとも$-1< x <1$で成り立つ。

今回からしばらく①の両辺を<u>１回微分した</u>次の②を使ってζ(2)の分割を考察していく。②を１回微分-新型母等式(最善形)と名付ける。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

１回微分-新型母等式(最善形)

$1/(1-x)^2 +1/(3+x)^2 +1/(5-x)^2 +1/(7+x)^2 +1/(9-x)^2 +1/(11+x)^2 +\cdots = (\pi/4)^2/\cos^2(\pi(x+1)/4)$　----②

少なくとも$-1< x <1$で成り立つ。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

この②を使うと、ζ(2)の分割ができる、つまりζ(2)の分身を得ることができる。

以下では、ζ(2)と本質的に同じＺ(2)の分身として求めていく。Ｚ(s)は次のものであり、本質的にζ(s)に等しい。以下のように変形でき、それはζ(s)そのものである。

$Z(s) = 1 +1/3^s +1/5^s +1/7^s +1/9^s +1/11^s +\cdots$　　----(1)

$Z(s) = 1 +1/3^s +1/5^s +1/7^s +1/9^s +1/11^s +\cdots$

$= 1 +1/2^s +1/3^s +1/4^s +1/5^s +1/6^s +1/7^s +\cdots - (1/2^s +1/4^s +1/6^s + \cdots)$

$= \zeta(s) - 1/2^s\zeta(s)$

$= (1-1/2^s)\zeta(s)$　　------(2)

これより、ζ(2)の分身の値はＺ(2)のそれを見ればよいと分かる。ζ(2)はζ(2)＝$\pi^2/6$であり、(2)より<u>Ｚ(2)＝$\pi^2/8$</u>となる。

なお、Ｚ(s)は私が独自に用いている記号で、一般的なものでないので注意いただきたい。

今回は、Ｚ(2)の２分割、４分割を求めよう。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

■Ｚ(2)２分割

②のｘに1/2と-1/2を代入すると、それぞれ以下のA1,A2が得られる。

$A1 = 1 + 1/7^2 +1/9^2 +1/15^2 + 1/17^2 +1/23^2 + \cdots = (\pi/8)^2/\cos^2(3\pi/8)$

$A2 = 1/3^2 +1/5^2 +1/11^2 +1/13^2 + 1/19^2 +1/21^2 + \cdots = (\pi/8)^2/\cos^2(\pi/8)$

A1 +A2＝Ｚ(2)＝$\pi^2/8$である。これらA1, A2がＺ(2)の２分身である。

右辺の$1/\cos^2()$の部分は次の通り。

$1/\cos^2(3\pi/8)=4+2\sqrt{2}$, $1/\cos^2(\pi/8)=4-2\sqrt{2}$

■Z(2) ４分割

②の x に 3/4, 1/4, −1/4, −3/4 を代入すると、それぞれ以下の B1, B2, B3, B4 が得られる。

$B1=1+1/15^2+1/17^2+1/31^2+1/33^2+1/47^2+\cdots=(\pi/16)^2/\cos^2(7\pi/16)$

$B2=1/3^2+1/13^2+1/19^2+1/29^2+1/35^2+1/45^2+\cdots=(\pi/16)^2/\cos^2(5\pi/16)$

$B3=1/5^2+1/11^2+1/21^2+1/27^2+1/37^2+1/43^2+\cdots=(\pi/16)^2/\cos^2(3\pi/16)$

$B4=1/7^2+1/9^2+1/23^2+1/25^2+1/39^2+1/41^2+\cdots=(\pi/16)^2/\cos^2(\pi/16)$

$B1+B2+B3+B4=Z(2)=\pi^2/8$ である。これら B1, B2, B3, B4 が Z(2) の４分身である。

右辺の $1/\cos^2()$ の部分を計算した結果は、以下の通り。

$1/\cos^2(7\pi/16)=8+4\sqrt{2}+4\sqrt{(2+\sqrt{2})}+2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

$1/\cos^2(5\pi/16)=8-4\sqrt{2}+4\sqrt{(2-\sqrt{2})}-2\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

$1/\cos^2(3\pi/16)=8-4\sqrt{2}-4\sqrt{(2-\sqrt{2})}+2\sqrt{(4-2\sqrt{2})}$

$1/\cos^2(\pi/16)=8+4\sqrt{2}-4\sqrt{(2+\sqrt{2})}-2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$

以上。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして（これまでと同様)、Z(2) すなわち ζ(2) の２分身、４分身が求まった。

L(1) のときの繰り返しになるが、新型母等式(最善形)の分かりやすい点は、分割（分身）の数と代入する分数の分母の数が一致することである。

すなわち、Z(2) の２分割を求める際は、分母を 2 とした分数の 1/2 と−1/2 を代入すればよい。また４分割を求める際は、分母を 4 とした分数の 3/4, 1/4, −1/4, −3/4 を代入すればよい。

さらには６分割を求める際は分母を 6 とした分数の 5/6, 3/6, 1/6, −1/6, −3/6, −5/6 を代入すればよい！

以下同様となる。

このように分割の数と代入する分数の分母の数が一致するので、わかりやすいのである。

さて、２分割と４分割において注目すべきは、次の関係が成り立つことである。

B1 +B4＝A1

B2 +B3＝A2

これも何年か前に見た関係であるが、<u>あまりにも美しい</u>。

同様のことは４分割と８分割の間でも成り立つし、８分割と１６分割の間でも成り立つし、１６分割と３２分割の間でも・・と延々と成り立っていく。

このように、ζ(2) は、分身たちの<u>無限フラクタル構造の上に成り立っている</u>。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● オイラーが発見した次式は有名であり、そしてふしぎである。

$\zeta(2) = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + 1/5^2 + 1/6^2 + 1/7^2 + \cdots = \pi^2/6$

しかしこの式の後ろに分身たちの無限フラクタル構造があることを知ると、その凄さに圧倒される。上式は、地下に眠る巨大ピラミッドの先端部分のように私には見える。その先端だけが地表に見えている・・

● 単純な繰り返しから成るフラクタル構造は美しい。そう感じるのは、人間に共通の感覚なのだろうか。

ゼータのフラクタル構造を見ると、私はイメージとして、コッホの雪辺やシュルピンスキーの三角形を思い浮かべる。前者はきれいであるし、後者は絨毯の模様のようである。

ペンタフレークというフラクタルもある。これもとてもきれいである。ペンタフレークは歴史的に最初に発見されたフラクタルであるという。デューラーの著書「測定法教則」(1525 年刊)にて描かれた。

● 話は変わる。

高瀬正仁氏の数学史サイトに「近世数学史談」(高木貞治著、共立出版)のことが言及されている。昔から気になっていた本だが、面白そうなので少し前購入した。ガウス(1777-1855)が大きく取り上げられていて、それが面白い！

ガウスは幼少期より異常な計算狂であったと分かった。その計算の凄さは異様であり、誰も真似などできない。計算が趣味としか思えない。その計算の中から次々に数学的な新発見をなしていった。ガウスは空前絶後の超天才である。

しかし、実際に発表したものは少ない。楕円関数や非ユークリッド幾何学、また５次方程式が解の公式を持ちえないこと、モジュラー関数の発見、複素関数論の解析的延長など、どれも発表はされなかった。

そんなガウスは幸せで悩みなどなかったのでは？と想像してしまうが、事実はまったく違っていたようである。

ガウスは雑務に時間を取られすぎ、自由に研究できない暮らしに悩み抜いていた・・！

p.15 より略しつつ引用。

****

1807 年以後、天文台長兼数学教授としてのゲッチンゲン時代のガウスは最早や「妨げられない，切り刻まれない時間」に恵まれなかった。天文台というても、現代的のそれではない。設備もない。助手もない。観測から計算まで台長が殆んど一手でするのである。・・何よりも「まとまった大きい理論的の仕事をする暇がない」のが、なさけなかったのである。

其上に大学の講義がある。「虚空に漂う精霊の影を捉えようとして頭が一杯になっているさなかに講義の時刻が来る。飛び上がるようにして、丸で違った世界へ心を向けかえねばならない。その苦しさは言語に絶する」。

・・・

その上に生活難がある。Gottingen へ聘(へい)せられても勿論薄給である。・・「こんなにして活きているよりは死んでしまうのがましだ」・・このような述懐がガウスの手記に係る楕円函数の計算のごたごたの中に混じて突然書かれている。

****

このように「妨げられない，切り刻まれない時間」に恵まれなかったガウスは、常に悩み困窮していたと分かった。

上記のあと、ガウス全集を編纂したクラインの言葉をヒントに、次のように高木氏は書く。
「滾々（こんこん）として湧いて止まない思想は内部から恐るべき圧迫を加える。あまりにも多産なる母体は時として衰弱の期間を持たねばならないであろう。」と。

なるほど、と思った。

次々に湧き出るアイディアを形にできないもどかしさにガウスは苦しんだ・・

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2022.1.16　杉岡幹生

参考文献

・「マスペディア 1000」（リチャード・エルウィス著、宮本寿代訳、ディスカヴァー・トゥエンティワン）

・「近世数学史談」（高木貞治著、共立出版）