＜ 新型母等式、ゼータの香りの漂う公式　その３＞

（その２１４）からの続きである。今回は、「ゼータの香りの漂う公式」新型母等式①を４回微分した式を見ることにする。4 回微分式はＬ(5)の分割に対応する。まず新型母等式①とＬ(5)は次のものである。

$1/(1-x)-1/(1+x)+1/(3-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(5+x)+\cdots=(\pi/2)\tan(\pi x/2)$　----①

$L(5)=1-1/3^5+1/5^5-1/7^5+1/9^5-1/11^5+\cdots$

では、以下に上記の①を４回微分した式とそれから得られるＬ(5)の２分割の結果を示す。（その１９）参照。

****

＜①を４回微分した式＞

$1/(1-x)^5-1/(1+x)^5+1/(3-x)^5-1/(3+x)^5+1/(5-x)^5-1/(5+x)^5+\cdots$
$=(\pi/2)^5\{2\sin(\pi x/2)+\sin^3(\pi x/2)\}/\{3\cos^5(\pi x/2)\}$　----②

■Ｌ(5) ２分割

②の x に値 3/4 を代入すると、下記 A1 が得られる。

②の x に値 1/4 を代入すると、下記 A2 が得られる。

$A1=1-1/7^5+1/9^5-1/15^5+1/17^5-1/23^5+\cdots=\alpha^5(2\sin\beta+\sin^3\beta)/(3\cos^5\beta)$

$A2=1/3^5-1/5^5+1/11^5-1/13^5+1/19^5-1/21^5+\cdots=\alpha^5(2\sin\alpha+\sin^3\alpha)/(3\cos^5\alpha)$

表記を簡単にするため、$\alpha=\pi/8$、$\beta=3\pi/8$ とした。例えば、$\sin^3\alpha$は、$\sin^3(\pi/8)$である。

A1 -A2＝L(5)となる。A1 と-A2 がＬ(5)の２分身である。

****

このようにして新型母等式からＬ(5)の２分割が得られた。

３年前の（その１９）で出したときは、計算量を減らす工夫を加えたりと面倒なところがあったが、新型の②を使えばあっという間に求まる。

（その１９）ではＬ(5)～Ｌ(13)まで出しているが、Ｌ(13)２分割をちょっと見ておこう。

表記を簡単にするため、$\alpha=\pi/8$、$\beta=3\pi/8$ とし、さらに sin は s、cos は c とした。例えば、$s^3\alpha$は、$\sin^3(\pi/8)$である。

■L(13) ２分割

A1＝ $1 -1/7^{13} +1/9^{13} -1/15^{13} + 1/17^{13} -1/23^{13} + \cdots$

$= \alpha^{13}(21844s\beta+171511s^3\beta +217186s^5\beta +55196s^7\beta +2036s^9\beta +2s^{11}\beta)/(467775c^{13}\beta)$

A2＝$1/3^{13} -1/5^{13} +1/11^{13} -1/13^{13} + 1/19^{13} -1/21^{13} + \cdots$

$= \alpha^{13}(21844s\alpha+171511s^3\alpha +217186s^5\alpha +55196s^7\alpha +2036s^9\alpha +2s^{11}\alpha)/(467775c^{13}\alpha)$

以上。

ちなみに、L(5)とL(13)の値は次の右のようになる。L(13)の分母は巨大になるので二数（2^{14} と 12!）の掛け算として表した。

$L(5) = 1 -1/3^5 +1/5^5 -1/7^5 + 1/9^5 -1/11^5 + \cdots = 5\pi^5/1536$

$L(13) = 1 -1/3^{13} +1/5^{13} -1/7^{13} + 1/9^{13} -1/11^{13} + \cdots = 2702765\pi^{13}/(2^{14}\cdot 12!)$

なお、L(13)は①を１２回微分した式から出る。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 新型母等式とその１回微分、２回微分の式を並べてみる。

＜0回微分＞（新型母等式そのもの）

$1/(1-x) -1/(1+x) +1/(3-x) -1/(3+x) +1/(5-x) -1/(5+x) + \cdots = (\pi/2)\tan(\pi x/2)$

＜1回微分＞

$1/(1-x)^2 +1/(1+x)^2 +1/(3-x)^2 +1/(3+x)^2 +1/(5-x)^2 +1/(5+x)^2 + \cdots = (\pi/2)^2/\cos^2(\pi x/2)$

＜2回微分＞

$1/(1-x)^3 -1/(1+x)^3 +1/(3-x)^3 -1/(3+x)^3 +1/(5-x)^3 -1/(5+x)^3 + \cdots = (\pi/2)^3\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2)$

これらの右辺の観察から、0回微分式と1回微分式を掛け算したものが2回微分式となっていることに気づく。つまりは次式が成り立っている。

$$1/(1-x)^3 -1/(1+x)^3 +1/(3-x)^3 -1/(3+x)^3 + \cdots$$
$$= \{1/(1-x) -1/(1+x) +1/(3-x) -1/(3+x) + \cdots\} \times \{1/(1-x)^2 +1/(1+x)^2 +1/(3-x)^2 +1/(3+x)^2 + \cdots\} \quad \text{---③}$$

まったく面白い式である！

$1/(1-x)^3 -1/(1+x)^3 +1/(3-x)^3 -1/(3+x)^3 + \cdots =$ L(3)やその分身を生み出す式

$1/(1-x) -1/(1+x) +1/(3-x) -1/(3+x) + \cdots =$ L(1)やその分身を生み出す式

$1/(1-x)^2 +1/(1+x)^2 +1/(3-x)^2 +1/(3+x)^2 + \cdots = \zeta(2)$やその分身を生み出す式

と言えるから、③は

[L(3)家族]＝[L(1)家族]×[ζ(2)家族]

となっている。味わい深いではないか。

● 一つ上で見た式を次のようにそれぞれ L_3、L_1、ζ_2 と表現してみよう。

$1/(1-x)^3 -1/(1+x)^3 +1/(3-x)^3 -1/(3+x)^3 +\cdots=L_3$

$1/(1-x) -1/(1+x) +1/(3-x) -1/(3+x) + \cdots=L_1$

$1/(1-x)^2 +1/(1+x)^2 +1/(3-x)^2 +1/(3+x)^2 +\cdots=\zeta_2$

すると、③は次のように簡潔に表現できる。

$$L_3=L_1\cdot\zeta_2$$

さて、③の<u>左辺を</u>微分すると $\zeta(4)$ を生み出す式が得られ、さらに微分すると $L(5)$ を生み出す式が得られ、さらに微分すると $\zeta(6)$ を生み出す式が・・とどんどんと得られていく。

右辺も同時に計算していくと、結局、左辺のゼータを生み出す式は、L_1 と ζ_2 の組み合わせばかりで表現できると分かる（なぜか考えてみてほしい）。

例えば、$\zeta(4)$ を生み出す式の ζ_4 は、L_1 と ζ_2 のみで表現できる。

$\zeta_4=(2\zeta_2(L_1)^2 \;+(\zeta_2)^2)/3$

それは $L(5)$ でも $\zeta(6)$ でもそうできるし、$L(13)$ でもそうできる。どこまでいっても L_1 と ζ_2 のみで表現できる。

ゼータの明示的な特殊値は、$L(1)$ と $\zeta(2)$ のレゴブロックで構成されているようである。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.9.26　杉岡幹生