＜ 双曲線ゼータとその派生式　その４＞

前回の（その３）では一般式をカンで予想した。そして私は「一般式は厳密に導出できそうである。」とつぶやいたわけであるが、導出できたので紹介したい。ただし、それは変数も混じった一般式の一般式という感じの普遍的な式になった。その式を微分したもの、積分したものと合わせて三種類を出した。

結論から述べると、以下のものである。sinh(x)は sh(x)、cosh(x)は ch(x)と略記した。

$$\frac{\sin x}{e^{a}-1}+\frac{\sin 2x}{e^{2a}-1}+\frac{\sin\ 3x}{e^{3a}-1}+\frac{\sin 4x}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{\sin x}{\mathrm{ch}a-\cos x}+\frac{\sin x}{\mathrm{ch}2a-\cos x}+\frac{\sin x}{\mathrm{ch}3a-\cos x}+\frac{\sin x}{\mathrm{ch}4a-\cos x}+\cdot\cdot\right\}\quad\text{----①}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\quad a>0)$$

①を x について１回微分して次を得た。

$$\frac{\cos x}{e^{a}-1}+\frac{2\cos 2x}{e^{2a}-1}+\frac{3\cos\ 3x}{e^{3a}-1}+\frac{4\cos 4x}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{\mathrm{ch}a\cdot\cos x-1}{(\mathrm{ch}a-\cos x)^2}+\frac{\mathrm{ch}2a\cdot\cos x-1}{(\mathrm{ch}2a-\cos x)^2}+\frac{\mathrm{ch}3a\cdot\cos x-1}{(\mathrm{ch}3a-\cos x)^2}+\frac{\mathrm{ch}4a\cdot\cos x-1}{(\mathrm{ch}4a-\cos x)^2}+\cdot\cdot\right\}\quad\text{----②}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\quad a>0)$$

①を 0～x の範囲で１回積分して次を得た。

$$\frac{1-\cos x}{e^{a}-1}+\frac{(1/2)(1-\cos 2x)}{e^{2a}-1}+\frac{(1/3)(1-\cos 3x)}{e^{3a}-1}+\frac{(1/4)(1-\cos 4x)}{e^{4a}-1}+\cdot\cdot$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\log\left|\frac{\mathrm{ch}a-\cos x}{\mathrm{ch}a-1}\right|+\log\left|\frac{\mathrm{ch}2a-\cos x}{\mathrm{ch}2a-1}\right|+\log\left|\frac{\mathrm{ch}3a-\cos x}{\mathrm{ch}3a-1}\right|+\log\left|\frac{\mathrm{ch}4a-\cos x}{\mathrm{ch}4a-1}\right|+\cdot\cdot\right\}\quad\text{----③}$$

$$(-\pi\le x\le\pi,\quad a>0)$$

導出方法は、ファン・ネス彗星　その１での＜ラマヌジャン式周辺の「ゼータの香りの漂う式」の導出　その１＞の母関数を

$F(x)=\sin(x)/(e^{2\pi}-1)+\sin(2x)/(e^{4\pi}-1)+\sin(3x)/(e^{6\pi}-1)+\sin(4x)/(e^{8\pi}-1)+\cdot\cdot\cdot\cdot$　　----①

から

$F(x)=\sin(x)/(e^{a}-1)+\sin(2x)/(e^{2a}-1)+\sin(3x)/(e^{3a}-1)+\sin(4x)/(e^{4a}-1)+\cdot\cdot\cdot\cdot$

に替えて、そこで用いた同じフーリエ級数を使って、同じ計算を実行しただけである。

ファン・ネス彗星　その１での”A”式に①が対応し、”B”式に②が対応する。

そして、＜ラマヌジャン式周辺の～の導出　その２＞の”C”式に対応するのが③となる。

９年前にそれら A～C 式を出した際は、ラマヌジャン式を意識しすぎていて、最も一般的な式①～③に到達できていなかった。

ここで、③の x にπを、a に 2πを代入してみよう。すると、（その２）で見た次が得られる。

$$2\left\{\frac{1}{e^{2\pi}-1}+\frac{1/3}{e^{6\pi}-1}+\frac{1/5}{e^{10\pi}-1}+\frac{1/7}{e^{14\pi}-1}+\cdot\cdot\cdot\right\}$$

$$=\log\frac{\mathrm{ch}\,\pi}{\mathrm{sh}\,\pi}+\log\frac{\mathrm{ch}2\,\pi}{\mathrm{sh}2\,\pi}+\log\frac{\mathrm{ch}3\,\pi}{\mathrm{sh}3\,\pi}+\log\frac{\mathrm{ch}4\,\pi}{\mathrm{sh}4\,\pi}+\cdot\cdot\cdot \qquad \text{-----④}$$

左辺は、リーマン・ゼータζ(s)の極ζ(1)の香りが漂っている。

また②の x に 0 を、a に 2πを代入してみよう。すると、（その１）で見た次の式が得られる。

$1/(e^{2\pi}-1) + 2/(e^{4\pi}-1) + 3/(e^{6\pi}-1) + 4/(e^{8\pi}-1) +\cdot\cdot$
$=(1/4)\{1/\sinh^2(\pi) + 1/\sinh^2(2\pi) + 1/\sinh^2(3\pi) + 1/\sinh^2(4\pi) + \cdot\cdot\cdot\}$

左辺はζ(-1)の、右辺はζ(2)の香りが漂っている。

この左辺の値は、ラマヌジャンにより、1/24-1/(8π)と求められている。よって、上式より直ちに

$1/\sinh^2(\pi) + 1/\sinh^2(2\pi) + 1/\sinh^2(3\pi) + 1/\sinh^2(4\pi) + \cdot\cdot\cdot=1/6\ -1/(2\pi)$

が出る。

さて、①～③を再び眺めよう。

眺めていて気付いたのだが、①、②については、左辺は、右辺のフーリエ級数展開になっている。
③も、左辺は、右辺のフーリエ級数の類似物のようになっていて、なんとなく面白い。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●$\frac{1}{e^{2\pi}-1}+\frac{1/2}{e^{4\pi}-1}+\frac{1/3}{e^{6\pi}-1}+\frac{1/4}{e^{8\pi}-1}+\ \cdot\cdot\cdot\ =-\frac{\pi}{12}-\left(\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{\omega}{\pi\sqrt{2}}\right)$

ラマヌジャンは、上の結果を導いている。ωはレムニスケート周率。ω=2.622057・・
これと③とを結びつけるのは、むずかしいか。

上式にはωが見えている。これが出ていること自体、深いものを連想させる。

●高瀬正仁先生の数学史から。

ロピタルの定理は、よく出てくる定理で、私もずいぶんとお世話になっている。

その定理はロピタルが発見したから、“ロピタルの定理”というのだと思っていた。しかし、実際はそうではないらしい。

ロピタル(1661～1704)は当時のフランスの貴族で数学愛好家であり、ヨハン・ベルヌーイに当時最先端の数学であった微積分を（家庭教師のような形で）教えてもらっていた。それを記録した本『曲線の理解のための無限小解析』をロピタルは出版した。その本にはロピタルの定理が載っていた。

その本はヨーロッパで評判を呼んだ。よって、0/0 を回避して有限の値を出すあの定理は自然と“ロピタルの定理“と呼ばれるようになった。

ところが、実際は、その著作の内容は、ベルヌーイの教えたものがほとんどを占め、ロピタルの定理もベルヌーイが考えたものらしい。なんでも、口止め料をもらっていたとか。それでベルヌーイも強くは主張できず、友人たちへの手紙に不平不満をもらすということになったようだ。

http://reuler.blog108.fc2.com/blog-category-1-14.html

本当に面白い話である。歴史をつぶさに見ると、このような例はここかしこにあるのかもしれない。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.9.12　杉岡幹生

(参考文献)

・数論Ⅱ（黒川信重、栗原将人、斎藤毅 著、岩波書店）