＜ 双曲線ゼータとその派生式 その３＞

（その２１１）からの続きである。今回は、双曲線ゼータ周辺で見出した式を並べ、それらを一般化した式を示したい。以下の通りである。sinh(x)はsh(x)、cosh(x)はch(x)と略記した。

$$\frac{1}{e^{4\pi}-1}+\frac{2}{e^{8\pi}-1}+\frac{3}{e^{12\pi}-1}+\frac{4}{e^{16\pi}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{sh^2 2\pi}+\frac{1}{sh^2 4\pi}+\frac{1}{sh^2 6\pi}+\frac{1}{sh^2 8\pi}+\cdot\cdot\right\} \quad ---①$$

$$\frac{1}{e^{4\pi}-1}-\frac{2}{e^{8\pi}-1}+\frac{3}{e^{12\pi}-1}-\frac{4}{e^{16\pi}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{ch^2 2\pi}+\frac{1}{ch^2 4\pi}+\frac{1}{ch^2 6\pi}+\frac{1}{ch^2 8\pi}+\cdot\cdot\right\} \quad ---②$$

$$\frac{1}{e^{8\pi}-1}+\frac{2}{e^{16\pi}-1}+\frac{3}{e^{24\pi}-1}+\frac{4}{e^{32\pi}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{sh^2 4\pi}+\frac{1}{sh^2 8\pi}+\frac{1}{sh^2 12\pi}+\frac{1}{sh^2 16\pi}+\cdot\cdot\right\}---③$$

$$\frac{1}{e^{8\pi}-1}-\frac{2}{e^{16\pi}-1}+\frac{3}{e^{24\pi}-1}-\frac{4}{e^{32\pi}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{ch^2 4\pi}+\frac{1}{ch^2 8\pi}+\frac{1}{ch^2 12\pi}+\frac{1}{ch^2 16\pi}+\cdot\cdot\right\}---④$$

左辺はζ(-1)の香りが漂っており、右辺はζ(2)の香りが漂っている。

これらと９年前にファン・ネス彗星　その１で見出していた次の二式⑤、⑥も合わせて（②もそちらで出していた）、これらの式全体を眺めていた。

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}+\frac{2}{e^{4\pi}-1}+\frac{3}{e^{6\pi}-1}+\frac{4}{e^{8\pi}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{sh^2\pi}+\frac{1}{sh^2 2\pi}+\frac{1}{sh^2 3\pi}+\frac{1}{sh^2 4\pi}+\cdot\cdot\right\} \quad ---⑤$$

$$\frac{1}{e^{2\pi}-1}-\frac{2}{e^{4\pi}-1}+\frac{3}{e^{6\pi}-1}-\frac{4}{e^{8\pi}-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{ch^2\pi}+\frac{1}{ch^2 2\pi}+\frac{1}{ch^2 3\pi}+\frac{1}{ch^2 4\pi}+\cdot\cdot\right\} \quad ---⑥$$

そして、私は、次の一般式が成り立つのではないか？と予想した。aは実数とした所がポイントである。

＜一般式(予想)＞

$$\frac{1}{e^{a\pi}-1}+\frac{2}{e^{2a\pi}-1}+\frac{3}{e^{3a\pi}-1}+\frac{4}{e^{4a\pi}-1}+\cdot\cdot$$
$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{sh^2(a\pi/2)}+\frac{1}{sh^2(2a\pi/2)}+\frac{1}{sh^2(3a\pi/2)}+\frac{1}{sh^2(4a\pi/2)}+\cdot\cdot\right\}$$

$$\frac{1}{e^{a\pi}-1}-\frac{2}{e^{2a\pi}-1}+\frac{3}{e^{3a\pi}-1}-\frac{4}{e^{4a\pi}-1}+\cdot\cdot$$
$$=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{ch^2(a\pi/2)}+\frac{1}{ch^2(2a\pi/2)}+\frac{1}{ch^2(3a\pi/2)}+\frac{1}{ch^2(4a\pi/2)}+\cdot\cdot\right\}$$

ここで、aは実数。

この式が正しいかをいくつかの数で検証した。a が 1 の場合、1/2 の場合、1/π の場合で見たが、数値検証の結果、いずれも正しいものであった。例えば、a=1/π の場合、次式が得られる。

$$\frac{1}{e-1}+\frac{2}{e^2-1}+\frac{3}{e^3-1}+\frac{4}{e^4-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{sh^2(1/2)}+\frac{1}{sh^2(2/2)}+\frac{1}{sh^2(3/2)}+\frac{1}{sh^2(4/2)}+\cdot\cdot\right\} \text{ ---⑦}$$

$$\frac{1}{e-1}-\frac{2}{e^2-1}+\frac{3}{e^3-1}-\frac{4}{e^4-1}+\cdot\cdot=\left(\frac{1}{4}\right)\left\{\frac{1}{ch^2(1/2)}+\frac{1}{ch^2(2/2)}+\frac{1}{ch^2(3/2)}+\frac{1}{ch^2(4/2)}+\cdot\cdot\right\} \text{ ---⑧}$$

きれいな式である。両辺とも収束は速く、検証は容易である。

これらの実験から一般式は正しいと考えられる。ちょっと思いついたのだが、一般式は厳密に導出できそうである。導出できたら、また報告したい。

①～④の導出方法を示しておく。

****
＜導出方法＞

①と③の導出は簡単である。⑤、⑥を辺々引き算すれば①が出る。①、②を辺々引き算すれば③が出る。

②、④の導出方法は以下となる。

（その２０９）での次の[A]式を 1 回微分すると下記[B]式を得る。ch2π は ch(2π)の意味である。

$\sin(x)/(e^{2\pi}-1) + \sin(2x)/(e^{4\pi}-1) + \sin(3x)/(e^{6\pi}-1) + \sin(4x)/(e^{8\pi}-1) +\cdots\cdot$

$=(1/2)\{\sin x/(ch2\pi - \cos x) + \sin x/(ch4\pi - \cos x) + \sin x/(ch6\pi - \cos x) + \cdots \}$ ----[A]

$(-\pi <= x <= \pi)$

$\cos(x)/(e^{2\pi}-1) +2\cos(2x)/(e^{4\pi}-1) +3\cos(3x)/(e^{6\pi}-1) + 4\cos(4x)/(e^{8\pi}-1) +\cdots\cdot$

$=(1/2)\{(ch2\pi\cdot\cos x-1)/(ch2\pi - \cos x)^2 +(ch4\pi\cdot\cos x-1)/(ch4\pi - \cos x)^2 + (ch6\pi\cdot\cos x-1)/(ch6\pi - \cos x)^2 + \cdot\cdot \}$--[B]

$(-\pi <= x <= \pi)$

[B]の x に π/2 を代入すると、②が得られる。これはファン・ネス彗星　その１でも示した通り。

[B]の x に π/4, 3π/4 を代入すると、ある二式がそれぞれ得られる（少し複雑なので略）。その二式を辺々足し算すると、④が得られる。

以上。

****

このようにして①～④が得られた。とくに①や③の導出の過程は簡単とはいえ、えも言われぬ味わいがある。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● この双曲線ゼータの領域は、ラマヌジャンの式などともかなり関係している。よって保型形式とも関連し、だからどんどんとよい結果が得られるのだと思う。この領域は豊かであり、様々な方向に洞窟がのびていて、それぞれの先にまた大鉱脈が待っているという感じがする。

● 今回示したたくさんの式を眺めていると、双曲線ゼータにおいても、ゼータの分割はできそうである。③は、①の２分身（２分割）の一つとなっている。④は、②の２分身（２分割）の一つとなっている。

● 一般式は予想とはいえ、ぜったいに正しいと確信できるものだが、a を変数と見て、式を微分することで、また新たな式が出そうである。

● 話は変わって、高瀬正仁氏の数学史を読み続けている。

高瀬氏は、故・岡潔氏とその業績についても深く研究されている人である。岡潔は、私も気になる数学者であり、昔、『春宵十話』（岡潔著）という本を読んで感銘（と衝撃）を受けた。

ホタル狩りをしていて大問題が解けてしまった次の場面などたいへん興味深い。引用したい。
（岡潔先生を語る 60）藤原松三郎への手紙）http://reuler.blog108.fc2.com/blog-category-2-3.html
****
・・・

論文名が書き列ねられているだけの文面ですが、この時期の岡先生の研究の状況を正確に伝えてくれるきわめて貴重な証言です。第 4 論文と第 5 論文は受理されたものの、掲載誌は一向に発行されないまま月日が流れていきましたが、この間にも岡先生の研究は絶え間なく継続し、昭和 15 年 6 月ころ、昭和 10 年以来の懸案のあのハルトークスの逆問題が解けてしまいました。もう少し正確に言うと、解決の鍵をにぎる最後の関頭は「関数の第二種融合法」だったのですが、岡先生はこれを蛍狩りをしているうちに発見したというのです。次に挙げるのは後年の回想です。

《このあと（註。淡路福良行の後の意です）翌年六月ごろ、昼間は地面に石や棒で書いて考え、夜は子供をつれて谷間でホタルをとっていた。殺すのはかわいそうなので、ホタルをとっては放し、とっては放ししていた。そんな暮らしをしているうちに突然難問が解けてしまった。》
（『春宵十話』第 7 話「宗教と数学」）
・・
****

この発見により、岡潔は第６番目の論文の執筆が可能になった、と高瀬氏は続けている。

それにしても、なんとも美しい状況での発見である。大問題がこんなにも日本情緒ただよう状況下で解かれたとは驚きである。地面に石や棒で書いて考え・・というのは、これはもう岡潔そのもの！である。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.9.5　杉岡幹生