＜ 双曲線ゼータとその派生式 その２＞

（その２０９）で双曲線ゼータやそれから派生する式を再考した。この領域も豊かな鉱脈をなしており、計算していると興味ある式が続々と出てきた。全部を紹介する余裕はないが、今回は次のものを示す。なお、前回同様、cosh(x)はch(x)と略記した。cosh(x)＝$(e^x+e^{-x})/2$ である。

$$2\sqrt{2}\left\{\frac{1}{e^{2\pi}-1}-\frac{1/3}{e^{6\pi}-1}-\frac{1/5}{e^{10\pi}-1}+\frac{1/7}{e^{14\pi}-1}+\frac{1/9}{e^{18\pi}-1}-\frac{1/11}{e^{22\pi}-1}-\frac{1/13}{e^{26\pi}-1}+\frac{1/15}{e^{30\pi}-1}+\cdot\cdot\cdot\right\}$$
$$=\log\frac{(2\cdot ch2\pi+\sqrt{2})}{(2\cdot ch2\pi-\sqrt{2})}+\log\frac{(2\cdot ch4\pi+\sqrt{2})}{(2\cdot ch4\pi-\sqrt{2})}+\log\frac{(2\cdot ch6\pi+\sqrt{2})}{(2\cdot ch6\pi-\sqrt{2})}+\log\frac{(2\cdot ch8\pi+\sqrt{2})}{(2\cdot ch8\pi-\sqrt{2})}+\cdot\cdot\cdot \quad \text{----①}$$

左辺がゼータの類似物となっていることに注目したい。実２次体Q(√2)ゼータ $L_1(s)$ の s＝1 に対応している。

$L_1(s)$ は、本「ゼータの香り・・」シリーズで何度か出てきたが、次のものである。

$L_1(s)=1-1/3^s-1/5^s+1/7^s+1/9^s-1/11^s-1/13^s+1/15^s+1/17^s-1/19^s-1/21^s+1/23^s+\cdot\cdot\cdot$

①の導出方法の概略を示す。

****

＜導出方法＞

（その２０９）での次の[A]式を 0～x の範囲で積分すると、下記の[B]式を得た。

$$\sin(x)/(e^{2\pi}-1)+\sin(2x)/(e^{4\pi}-1)+\sin(3x)/(e^{6\pi}-1)+\sin(4x)/(e^{8\pi}-1)+\cdots$$
$$=(1/2)\{\sin x/(ch(2\pi)-\cos x)+\sin x/(ch(4\pi)-\cos x)+\sin x/(ch(6\pi)-\cos x)+\cdots\} \quad \text{-----[A]}$$
$$(-\pi<=x<=\pi)$$

$$2\{(1-\cos(x))/(e^{2\pi}-1)+(1/2)(1-\cos(2x))/(e^{4\pi}-1)+(1/3)(1-\cos(3x))/(e^{6\pi}-1)+(1/4)(1-\cos(4x))/(e^{8\pi}-1)+\cdots\}$$
$$=\log\{(ch2\pi-\cos x)/(ch2\pi-1)\}+\log\{(ch4\pi-\cos x)/(ch4\pi-1)\}+\log\{(ch6\pi-\cos x)/(ch6\pi-1)\}+\cdots \quad \text{----[B]}$$
$$(-\pi<=x<=\pi)$$

[B]の x に $\pi/4$, $3\pi/4$ を代入すると、A1, A2 の二式がそれぞれ得られる（A1,A2 は略）。A1 から A2 を辺々引き算(A1-A2)すると、①が得られる。
以上。

****

このようにして①が得られた。Excel で数値検証も行ったが、正しいものであった。左辺も右辺も収束が異常に速いので検証は容易である。

①の左辺の収束が速いのはすぐ分かるが、右辺も異常に速い。log1 に近くなるからそうなのだが、あまり見ない形であり、こんな収束の仕方があったのか！・・という感じである。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

● 双曲線ゼータ周辺で使った公式の一つに、ファン・ネス彗星　その１でのフーリエ級数

$\sin x/(\mathrm{ch}(a)-\cos x)=2\sum_{(n=1\sim\infty)} e^{-n\cdot a}\cdot\sin(nx)$　　　$(-\pi\leqq x\leqq\pi,\ a>0)$

がある。

導出方法を改めて見直すと、母関数は

$F(x)=\sin(x)/(e^{2\pi}-1)+\sin(2x)/(e^{4\pi}-1)+\sin(3x)/(e^{6\pi}-1)+\sin(4x)/(e^{8\pi}-1)+\cdots$ -----②

というものだけなく、

$F(x)=\sin(x)/(e^{\pi}-1)+\sin(2x)/(e^{2\pi}-1)+\sin(3x)/(e^{3\pi}-1)+\sin(4x)/(e^{4\pi}-1)+\cdots$

などの別の形も考えられるはずだ。

９年前はラマヌジャン式に近づけるために、②を考えたのかもしれないが、ラマヌジャンを意識しなければもっと広い世界に出られる。

●導出方法で[B]のｘにπを代入すると、次式が得られる。ch(x)＝cosh(x)、sh(x)＝sinh(x)である。

$$2\left\{\frac{1}{e^{2\pi}-1}+\frac{1/3}{e^{6\pi}-1}+\frac{1/5}{e^{10\pi}-1}+\frac{1/7}{e^{14\pi}-1}+\cdot\cdot\cdot\right\}$$
$$=\log\frac{ch\pi}{sh\pi}+\log\frac{ch2\pi}{sh2\pi}+\log\frac{ch3\pi}{sh3\pi}+\log\frac{ch4\pi}{sh4\pi}+\cdot\cdot\cdot \qquad \text{-----③}$$

この式はあまりに美しい！　左辺はリーマン・ゼータの極ζ(1)の類似物になっている。

これは今回出したのだが、９年前にも出していたことに、さきほど気づき、こちらに回した。自分自身での再発見という所である。http://www5b.biglobe.ne.jp/~sugi_m/page217.htm（2012/6/2 記事）

● 今回、実２次体Q(√2)ゼータの類似物が出た。実２次体ゼータが出たのは導出方法の[B]式の左辺がcos級数となっていることに関係している。

実２次体ゼータはcos級数から生まれる。虚２次体ゼータはsin級数から生まれる。

という１７年前に見出した基本原理に従っているのである。

この美しい泉から(１次の)ゼータは湧き上がってくる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.8.29　杉岡幹生