＜ 新型母等式、ゼータの香りの漂う公式＞

この３年間、ゼータの分割という興味深い現象を調べてきた。そのための道具として（ゼータの香りの漂う公式が実質的に部分分数展開式と同じであることに気づいてからは）、①の部分分数展開式とそれを微分（ｎ回微分）した式を使ってきた。

$1/(1^2-x^2)\ +1/(3^2-x^2)\ +1/(5^2-x^2)\ +\cdots = (\pi/(4x))\tan(\pi x/2)$ -----①

つい最近、上とは違った形の次の②の部分分数展開式を見出したので紹介したい。これを新型母等式と名付けたい。

注記：②は少なくとも 0<x<1 では確実に成り立つ。ゼータ分割を調べるには、それで十分。

$1/(1-x)-1/(1+x)+1/(3-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(5+x)+\cdots = (\pi/2)\tan(\pi x/2)$ -----②

じつをいうと、①と②は本質的に同じである。①の簡単な変形で②にもっていける。ならば、なぜわざわざ新型母等式というのか？と思われるかもしれない。両式に関してはたしかにそうなのだが、微分を考えると、①から出発した場合と②から出発した場合では、<u>まるでその後の展開が違ってくる</u>のである。

例えば、①を２回微分した式からは、L(3)、ζ(2)、L(1)の分割（分身）が得られる。一方、②を２回微分したものからは、<u>L(3)のみの</u>分割が出るというふうになる。端的というと、②の方が<u>より単純に</u>議論が進められるのである。②とその微分式からは一種類の特殊値しか出ない点が非常によい。

とはいえ、①から出発した場合も、えもいわれぬ味わいのある状況（景色）が繰り広げられたことはこれまで見てきた通りである。またそこで得た結果は、②から出発した場合に<u>そっくり利用できる</u>。

今回は、この②の新型母等式を使って、０回微分(②そのもの)、１回微分、２回微分の式と、それから得られるゼータ２分割の結果を以下に示す。当然ながら、これまでの結果と同じであるが。

なお、リーマン・ゼータζ(s)に関しては、これまでと同様、実質的に同じ $Z(s)=1+1/3^s+1/5^s+1/7^s+\cdots$ で議論する。例えば、ｓ＝2 のζ(2)と Z(2)の関係は、$Z(2)=1+1/3^2+1/5^2+1/7^2+\cdots=(1-1/2^2)\zeta(2)$ となる。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

＜②を０回微分した式（②そのもの）＞

$1/(1-x)-1/(1+x)+1/(3-x)-1/(3+x)+1/(5-x)-1/(5+x)+\cdots = (\pi/2)\tan(\pi x/2)$ -----②

上式のｘに 3/4 と 1/4 を代入すると、それぞれ以下の A1,A2 を得る。A1, -A2 がＬ(1)の２分身である。

■L(1)２分割

$A1 = 1 -1/7 +1/9 -1/15 + 1/17 -1/23 +\cdots = (\pi/8)\tan(3\pi/8)$

$A2 = 1/3 -1/5 +1/11 -1/13 + 1/19 -1/21 +\cdots = (\pi/8)\tan(\pi/8)$

$A1-A2=\pi/4=L(1)$ である。tan()の値は以下の通り。

$\tan(3\pi/8)=1+\sqrt{2}$,　$\tan(\pi/8)=-1+\sqrt{2}$

＜②を１回微分した式③＞

$$1/(1-x)^2+1/(1+x)^2+1/(3-x)^2+1/(3+x)^2+1/(5-x)^2+1/(5+x)^2+\cdots=(\pi/2)^2/\cos^2(\pi x/2) \quad \text{---③}$$

上式の x に 3/4 と 1/4 を代入すると、それぞれ以下の A1,A2 を得る。A1, A2 が Z(2)の２分身である。

■Z(2) ２分割

$A1= 1+1/7^2+1/9^2+1/15^2+1/17^2+1/23^2+\cdots=(\pi/8)^2/\{\cos(3\pi/8)\}^2$

$A2=1/3^2+1/5^2+1/11^2+1/13^2+1/19^2+1/21^2+\cdots=(\pi/8)^2/\{\cos(\pi/8)\}^2$

$A1+A2=Z(2)=\pi^2/8=Z(2)$ である。

$1/\{\cos()\}^2$ の値は以下の通り。

$1/\{\cos(3\pi/8)\}^2= 4+2\sqrt{2}$,　$1/\{\cos(\pi/8)\}^2=4-2\sqrt{2}$

＜②を２回微分した式④＞

$$1/(1-x)^3-1/(1+x)^3+1/(3-x)^3-1/(3+x)^3+1/(5-x)^3-1/(5+x)^3+\cdots=(\pi/2)^3\sin(\pi x/2)/\cos^3(\pi x/2) \quad \text{---④}$$

上式の x に 3/4 と 1/4 を代入すると、それぞれ以下の A1,A2 を得る。A1、-A2 が L(3)の２分身である。

■L(3) ２分割

$A1= 1-1/7^3+1/9^3-1/15^3+1/17^3-1/23^3+\cdots=(\pi/8)^3\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)$

$A2=1/3^3-1/5^3+1/11^3-1/13^3+1/19^3-1/21^3+\cdots=(\pi/8)^3\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)$

$A1-A2=L(3)=\pi^3/32$ である。右辺の三角関数の値は、以下の通り。

$\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8)= 8+6\sqrt{2}$

$\sin(\pi/8)/\cos^3(\pi/8)=-8+6\sqrt{2}$

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このように新型母等式②、③、④からは単独のゼータ特殊値の分割が得られるのである！　この簡明さを味わっていただきたい。

なお、これら２分割から以下のように２次体ゼータが構成できることも指摘しておく。

③の A1 と A2 から、次のように実2次体 Q(√2)ゼータ L1(s)の s＝2 の特殊値が得られる。A1, −A2 が L1(2)の2分身である。

$A1 - A2 = 1 - 1/3^2 - 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 - 1/11^2 - 1/13^2 + 1/15^2 + 1/17^2 - 1/19^2 - 1/21^2 + 1/23^2 + \cdots$

$= L1(2) = (\pi/8)^2\{1/\cos^2(3\pi/8) - 1/\cos^2(\pi/8)\} = \pi^2/(8\sqrt{2})$

また②、④の A1 と A2 から、次のように虚2次体 Q(√−2)のゼータ L2(s)の s＝1, 3 の特殊値が得られる。それぞれの A1, A2 が L2(1)、L2(3)の2分身である。

[②の場合]

$A1 + A2 = 1 + 1/3 - 1/5 - 1/7 + 1/9 + 1/11 - 1/13 - 1/15 + 1/17 + 1/19 - 1/21 - 1/23 + \cdots$

$= L2(1) = (\pi/8)\{\tan(3\pi/8) + \tan(\pi/8)\} = \pi/(2\sqrt{2})$

[④の場合]

$A1 + A2 = 1 + 1/3^3 - 1/5^3 - 1/7^3 + 1/9^3 + 1/11^3 - 1/13^3 - 1/15^3 + 1/17^3 + 1/19^3 - 1/21^3 - 1/23^3 + \cdots$

$= L2(3) = (\pi/8)^3\{\sin(3\pi/8)/\cos^3(3\pi/8) + \sin(\pi/8)/\cos^3(3\pi/8))\} = \pi \cdot 3\sqrt{2}/128$

なお、この２次体との関連は、（その１９１）～（その１９８）の私の予想と関係するものである。

2021.8.1　杉岡幹生

＜参考文献＞

「マグロウヒル　数学公式・数表ハンドブック（Murray R. Spiegel 著、氏家勝巳訳、オーム社）