＜ L(2)、ζ(2) ２分身のうち少なくとも一つは無理数、そして保型性＞

（その２００）では、新型母関数を使ってL(2)とζ(2)の同時２分身と言えるＡとＢの級数の値を求めた。そして最後で次のようにつぶやいた。「Ａ、Ｂのどちらか少なくとも一つは無理数である。」と。これはそれほど意識して述べたものではなかったが、よく考えると、ゼータの無理性などを調べる上で意味深いものであると、改めて気づく。

さらに“保型性“という観点から面白いことに気づいた。今回はこれらについて報告したい。

****

●L(2)とζ(2)の同時２分割を再掲。

$$A = 1 + 1/5^2 + 1/9^2 + 1/13^2 + 1/17^2 + \cdots$$

$$B = 1/3^2 + 1/7^2 + 1/11^2 + 1/15^2 + 1/19^2 + \cdots$$

$$A = (1/4^2)\{1\cdot\zeta(2)\cdot(3/4)^0 + 2\cdot\zeta(3)\cdot(3/4)^1 + 3\cdot\zeta(4)\cdot(3/4)^2 + 4\cdot\zeta(5)\cdot(3/4)^3 + 5\cdot\zeta(6)\cdot(3/4)^4 + 6\cdot\zeta(7)\cdot(3/4)^5 + 7\cdot\zeta(8)\cdot(3/4)^6 + 8\cdot\zeta(9)\cdot(3/4)^7 + \cdots\}$$

$$B = (1/4^2)\{1\cdot\zeta(2)\cdot(1/4)^0 + 2\cdot\zeta(3)\cdot(1/4)^1 + 3\cdot\zeta(4)\cdot(1/4)^2 + 4\cdot\zeta(5)\cdot(1/4)^3 + 5\cdot\zeta(6)\cdot(1/4)^4 + 6\cdot\zeta(7)\cdot(1/4)^5 + 7\cdot\zeta(8)\cdot(1/4)^6 + 8\cdot\zeta(9)\cdot(1/4)^7 + \cdots\}$$

さて、

$A - B = L(2)$

$A + B = (1-1/2^2)\cdot\zeta(2)$

に関し、無理性でなにか言えるか？

⇒Ａ、Ｂのどちらか少なくとも一つは無理数である。

****

L(2)＝$1-1/3^2+1/5^2-1/7^2+\cdots$は現代数学でよく分からない数とされ、無理数か有理数かも分かっていない。ゼータの非明示な特殊値でその辺が確定しているのは、ζ(3)＝$1+1/2^3+1/3^3+1/4^3+\cdots$だけであり、アペリーによりζ(3)が無理数であることが 1977 年に証明された。

「Ａ，Ｂのうち、少なくとも一つは無理数」がなぜ面白いかというと、L(2)が無理数かどうか分からないのに、その分身（２分身）に関しては「二つのうち、少なくとも一つは無理数」と分かってしまう点にある。

$A - B = L(2)$ ---①

$A + B = (1-1/2^2)\cdot\zeta(2)$ ----②

からすぐいえることだが、Ａ、Ｂともに有理数であることはあり得ない。なぜなら、もし両方とも有理数ならば、「②左辺は有理数＝②右辺は無理数」となって矛盾が出るからである。これより、Ａ，Ｂのうち少なくとも一つは無理数と分かる。

このようなことが分かるのは、明示的に値が分かっているζ(2)が絡んだ形で①、②式が成り立つからである。

２分身Ａ，Ｂの値が求まっていない状況ならばこれはたいした結果ではないが、新型母関数を使うとその値が（ゼータの無限和として）求まるという事実が大事である。Ａ，Ｂの値が求まり、且つ「それらのうち、少なくとも一つは無理数」と言えるがゆえに、上のつぶやきは興味あるものとなる。

（その２００）ではＡ，Ｂの導出過程は略したが、ここでその概要を記しておく。

[L(2)、ζ(2)の同時２分身Ａ、Ｂの導出]

$A = 1 + 1/5^2 + 1/9^2 + 1/13^2 + 1/17^2 + \cdots$

$B = 1/3^2 + 1/7^2 + 1/11^2 + 1/15^2 + 1/19^2 + \cdots$

の値を求める。（ここで、Ａ－Ｂ＝L(2)であり、Ａ＋Ｂ＝$(1-1/2^2)\cdot\zeta(2)$ であることは容易にわかる）

$f(x) = 1/x^2 + 1/(1+x)^2 + 1/(2+x)^2 + 1/(3+x)^2 + 1/(4+x)^2 + \cdots$ ------①

という母関数を考える。

①で x に 1/4 を代入すると、次となる。

$f(1/4) = 1/(1/4)^2 + 1/(5/4)^2 + 1/(9/4)^2 + 1/(13/4)^2 + \cdots$

$= 4^2(1 + 1/5^2 + 1/9^2 + 1/13^2 + \cdots)$

$= 4^2\cdot A$ ---------②

ここで、$1 + 1/5^2 + 1/9^2 + 1/13^2 + \cdots = A$ とした。

①を x＝1 の周りでテイラー展開した結果の x に 1/4 を代入すると、次となる。

$$f(1/4) = 1\cdot\zeta(2)\cdot(3/4)^0 + 2\cdot\zeta(3)\cdot(3/4)^1 + 3\cdot\zeta(4)\cdot(3/4)^2 + 4\cdot\zeta(5)\cdot(3/4)^3 + 5\cdot\zeta(6)\cdot(3/4)^4 + 6\cdot\zeta(7)\cdot(3/4)^5 + 7\cdot\zeta(8)\cdot(3/4)^6 + 8\cdot\zeta(9)\cdot(3/4)^7 + \cdots \quad \text{-----③}$$

②と③から、Aが得られる。

$$A = (1/4^2)\{1\cdot\zeta(2)\cdot(3/4)^0 + 2\cdot\zeta(3)\cdot(3/4)^1 + 3\cdot\zeta(4)\cdot(3/4)^2 + 4\cdot\zeta(5)\cdot(3/4)^3 + 5\cdot\zeta(6)\cdot(3/4)^4 + 6\cdot\zeta(7)\cdot(3/4)^5 + 7\cdot\zeta(8)\cdot(3/4)^6 + 8\cdot\zeta(9)\cdot(3/4)^7 + \cdots\}$$

同様にして、①とテイラー展開の式の x に 3/4 を代入することで、次の B が得られる。

$$B = (1/4^2)\{1\cdot\zeta(2)\cdot(1/4)^0 + 2\cdot\zeta(3)\cdot(1/4)^1 + 3\cdot\zeta(4)\cdot(1/4)^2 + 4\cdot\zeta(5)\cdot(1/4)^3 + 5\cdot\zeta(6)\cdot(1/4)^4 + 6\cdot\zeta(7)\cdot(1/4)^5 + 7\cdot\zeta(8)\cdot(1/4)^6 + 8\cdot\zeta(9)\cdot(1/4)^7 + \cdots\}$$

（導出終わり）

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

このようにして、L(2)とζ(2)の２分身Ａ、Ｂが得られた。

＜保型性が出ている＞

ＡとＢを眺めているうちに面白い事実に気づいた。分かりやすくするために、右辺を色で塗分けた。

$$A=(1/4^2)\{1\cdot\zeta(2)\cdot(3/4)^0+2\cdot\zeta(3)\cdot(3/4)^1+3\cdot\zeta(4)\cdot(3/4)^2+4\cdot\zeta(5)\cdot(3/4)^3$$
$$+5\cdot\zeta(6)\cdot(3/4)^4+6\cdot\zeta(7)\cdot(3/4)^5+7\cdot\zeta(8)\cdot(3/4)^6+8\cdot\zeta(9)\cdot(3/4)^7$$
$$+\cdots\cdots\} \text{ ----④}$$

$$B=(1/4^2)\{1\cdot\zeta(2)\cdot(1/4)^0+2\cdot\zeta(3)\cdot(1/4)^1+3\cdot\zeta(4)\cdot(1/4)^2+4\cdot\zeta(5)\cdot(1/4)^3$$
$$+5\cdot\zeta(6)\cdot(1/4)^4+6\cdot\zeta(7)\cdot(1/4)^5+7\cdot\zeta(8)\cdot(1/4)^6+8\cdot\zeta(9)\cdot(1/4)^7$$
$$+\cdots\cdots\} \text{ ----⑤}$$

青色が共通部分で、赤色が違っている所を示している。驚くべきことに 3/4 と 1/4 が違っているだけである！　興味深い形であり、ものすごい保型性が出ている。

じつは、保型性はこのケースだけに限らない。

上と同じＡ，Ｂは、導出方法を変えることで別の式として得ることもできる。上記と同じ母関数 f(x)に対し x＝1/2 周りでテイラー展開してその x にそれぞれ 1/4、3/4 を代入すると、次を得る。

$$A=(1/2^2)\{1\cdot(1-1/2^2)\zeta(2)\cdot(1/2)^0+2\cdot(1-1/2^3)\zeta(3)\cdot(1/2)^1$$
$$+3\cdot(1-1/2^4)\zeta(4)\cdot(1/2)^2+4\cdot(1-1/2^5)\zeta(5)\cdot(1/2)^3$$
$$+5\cdot(1-1/2^6)\zeta(6)\cdot(1/2)^4+6\cdot(1-1/2^7)\zeta(7)\cdot(1/2)^5$$
$$+7\cdot(1-1/2^8)\zeta(8)\cdot(1/2)^6+8\cdot(1-1/2^9)\zeta(9)\cdot(1/2)^7$$
$$\cdots\cdots\} \text{ ----⑥}$$

$$B=(1/2^2)\{1\cdot(1-1/2^2)\zeta(2)\cdot(1/2)^0-2\cdot(1-1/2^3)\zeta(3)\cdot(1/2)^1$$
$$+3\cdot(1-1/2^4)\zeta(4)\cdot(1/2)^2-4\cdot(1-1/2^5)\zeta(5)\cdot(1/2)^3$$
$$+5\cdot(1-1/2^6)\zeta(6)\cdot(1/2)^4-6\cdot(1-1/2^7)\zeta(7)\cdot(1/2)^5$$
$$+7\cdot(1-1/2^8)\zeta(8)\cdot(1/2)^6-8\cdot(1-1/2^9)\zeta(9)\cdot(1/2)^7$$
$$\cdots\cdots\} \text{ ----⑦}$$

偶数番目の項の符号が違っているだけである！　驚くべき類似性、保型性が出ている。こちらはこちらでまた違った保型性が出ている感じである。

ところで、

$A = 1 + 1/5^2 + 1/9^2 + 1/13^2 + 1/17^2 + \cdots$

$B = 1/3^2 + 1/7^2 + 1/11^2 + 1/15^2 + 1/19^2 + \cdots$

の値は、右辺の Excel の数値計算でＡ＝1.0748330・・、Ｂ＝0.15886747・・となる。

④～⑦の右辺は３０項ほど計算するだけで、これらの値に収束することを Excel マクロで確認した。

最後に、テーマの整理と備忘録の意味から、構想や予想、妄想、つぶやきを述べておく。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

●今回示したことは、じつはζ(s)とＬ(s)の特殊値の明示、非明示のペア全て成り立っていく。

Ｌ(2)非明示----ζ(2)明示

ζ(3)非明示----Ｌ(3)明示

Ｌ(4)非明示----ζ(4)明示

ζ(5)非明示----Ｌ(5)明示

・

・

に関して、今回と同じことが成り立つ。よって、それらの同時２分身に対し「少なくとも一つは無理数である」と言える。また虚２次体と実２次体ゼータのペアでも成り立っているはずである。

●新型母関数（例えば①）の利点は、ゼータ本体のみならず、その分身の値がすぐに求まる点にある。

旧来のフーリエ級数型の母関数（例えばこのページなど）では、ゼータそのものは出るが、分身の形で求めることはちょっと無理である。できるのかもしれないが、改良する必要があるだろう。

●　⑥、⑦に着目。ＡとＢは二つのパーツα、βに分かれている。Ａ＝α+β，Ｂ＝α−βとなっている。

$$\alpha=(1/2^2)\{1\cdot(1-1/2^2)\zeta(2)\cdot(1/2)^0+3\cdot(1-1/2^4)\zeta(4)\cdot(1/2)^2+5\cdot(1-1/2^6)\zeta(6)\cdot(1/2)^4+\cdots\}$$

$$\beta=(1/2^2)\{2\cdot(1-1/2^3)\zeta(3)\cdot(1/2)^1+4\cdot(1-1/2^5)\zeta(5)\cdot(1/2)^3+6\cdot(1-1/2^7)\zeta(7)\cdot(1/2)^5+\cdots\}$$

よって、Ａ−Ｂ＝2β＝Ｌ(2)、Ａ＋Ｂ＝2α＝(1−1/2^2)・ζ(2)、よって、αは無理数であると分かる。
Ａ，Ｂのうち少なくとも一つは無理数であるから、「もしＡが有理数ならばＢが無理数」となり、また「もしＢが有理数ならばＡが無理数」となるが、これらの場合はβは（つまりＬ(2)は）無理数と決まる。
しかし「Ａ、Ｂともに無理数」の場合は、βは（つまりＬ(2)は）無理数とも有理数とも決まらない。

●「ゼータの香りの漂う公式」シリーズで導出した分身たちは、明示的なゼータの分身ばかりであった。一度だけ、大変な計算の末、非明示のＬ(2)の２分割（２分身）の導出に成功し（その４８）で報告したが、その２分身は今回のＡ，Ｂではなく、次のものであった。

$$A1=1-1/7^2+1/9^2-1/15^2+1/17^2-1/23^2+1/25^2-1/31^2+\cdots$$

$$A2=1/3^2-1/5^2+1/11^2-1/13^2+1/19^2-1/21^2+1/27^2-1/29^2+\cdots$$

これはたしかにＡ1−Ａ2＝Ｌ(2)となるが、これらを使ってζ(2)を構成できない。　よって、その２分身では分身の有理性・無理性の考察はできない。
付記：（その４８）の２分身は世にも恐ろしい形をしている。Ａ，Ｂの方がよほどきれいであり、また導出もはるかに簡単である。

●高瀬正仁氏の数学史を読んでいる。http://reuler.blog108.fc2.com/blog-date-200706.html
とても面白いので読み始めるとちょっと止まらなくなってしまう。

1955 年に日本の日光で代数的整数論の国際会議が開催されたのは有名な話なので、ご存知の方は多いと思う。http://reuler.blog108.fc2.com/blog-category-39-3.html
会議には、ヴェイユ、シュバレー、セール、アルチン、ブラウアー、ゼリンスキー、ドイリング、ラマナタン、ネロン、岩澤健吉など当時の世界的な学者が招待された。その辺は「フェルマーの大定理が解けた！」（講談社）などですこし知っていた。

この会議は、戦後の日本の数学を考える上で重要な位置を占めるが、実際の様子はよく知らなかった。高瀬氏はその辺の状況を克明に記している。ヴェイユが、谷山豊を筆頭とする若手数学者集団ＳＳＳに積極的にかかわり、議論をたたかわせた様子が記され、その様は圧巻である。

ヴェイユは、会議が終わってもしばらく（一月ほど？）日本に滞在し、ＳＳＳのメンバーと交流をもったようである。上記ページから一部引用したい。

****

ヴェイユ

日本人の数学を見ていて特に感ずることがある。日本人には、先輩や目上の人に従うように要求する習慣があるのか。

SSS

戦前、戦争中は特にそうだった。日本人のモラルの中心でさえあった。われわれも小学校以来盛んにたたきこまれた。

ヴェイユ

時に数学では、若い人びとに、手軽にできることをやり、あまり大きいことには手をつけないようにすすめる習慣があるのか。自分の考えを押し出さず、偉い人の思想圏内で仕事をするほうが安全だと忠告する習慣があるのか。

SSS

だいたいそうだ。

ヴェイユ

日本で本当に独創的な研究を始める人は少なかった。岩澤（健吉）はその少ないひとりだが、一方小平（邦彦）は非常によくできるにもかかわらず、私やレフシェッツ、ホッジなどの仕事を完成するようなことしか手を出さなかった。ごく最近、やっと彼自身の考えに基づく研究が出始めた。もっともっこれは岩澤が小平よりすぐれた数学者だという意味ではない。私の言いたいのは、小平のようにすばらしい数学者が、自分のアイデアを見出だすのにこんなにも遅れたことで、これはまさに驚くべきことだ。

しかし、戦後、日本の若い人の間に、自分のアイデアを持って始めようとする者が増えてきた。特に君たちはみな高みをねらっているが、日本でこのような傾向ができたのはごく最近のことで、非常によいことだ。

とにかくも自分のアイデアを持って始めるように。ガウスはそうだった。君たちもガウスのように始めろ。そうすればまもなく君たちは自分がガウスではないことを発見するだろうが、それでもよい。とにかくガウスのようにやれ。

モラルを変えるのはたいへんだが、数学のやり方を変えるだけならそれほどむずかしくはないだろう。

****

これなどとても面白い。「ガウスのように・・」というのはヴェイユが日光会議で語った有名な言葉であり、この場面で出てきた言葉であると分かった。

＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝＝

2021.7.24　杉岡幹生

＜参考文献＞

●「フェルマーの大定理が解けた！」（足立恒雄著、講談社）